This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

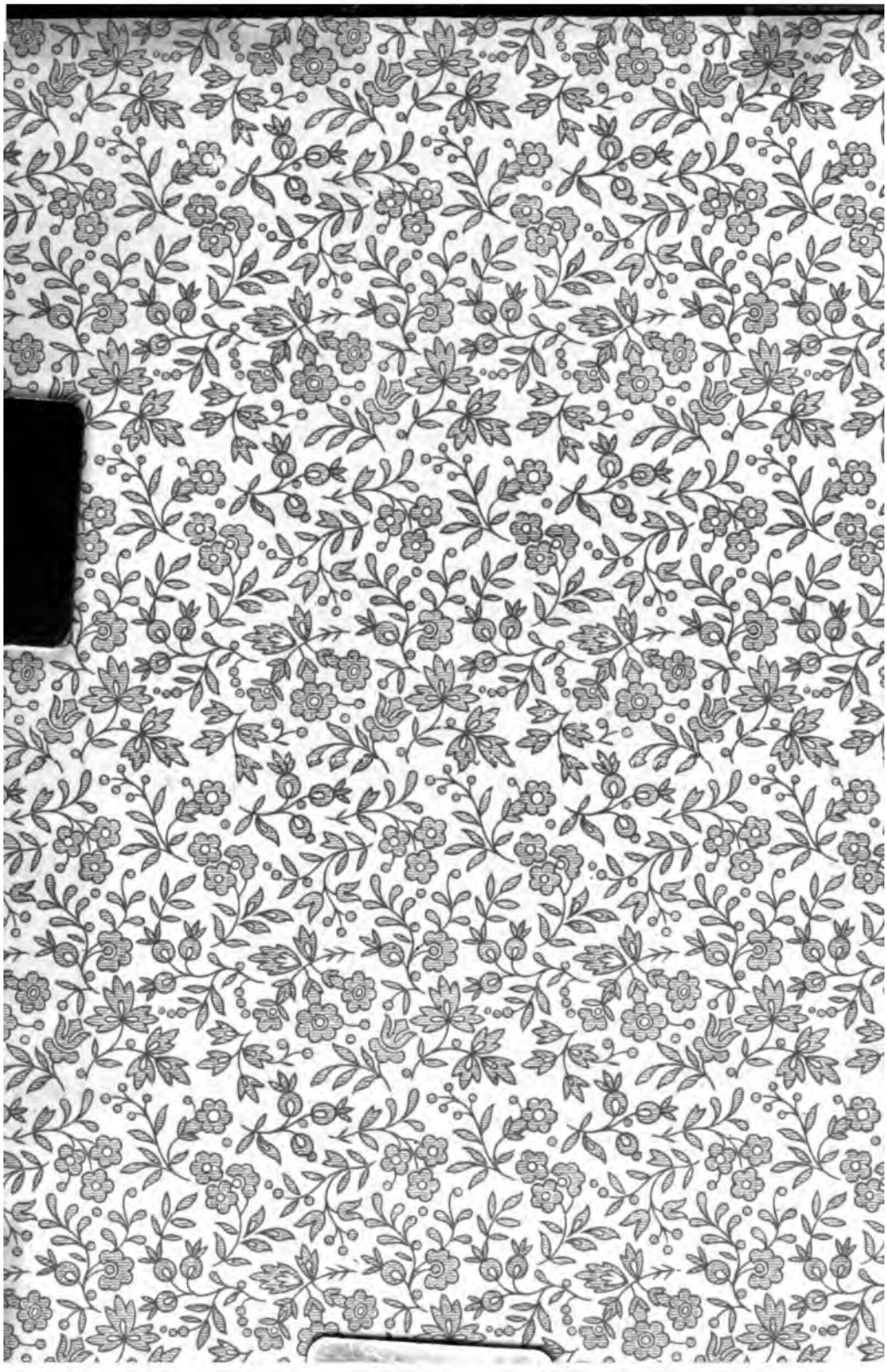
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

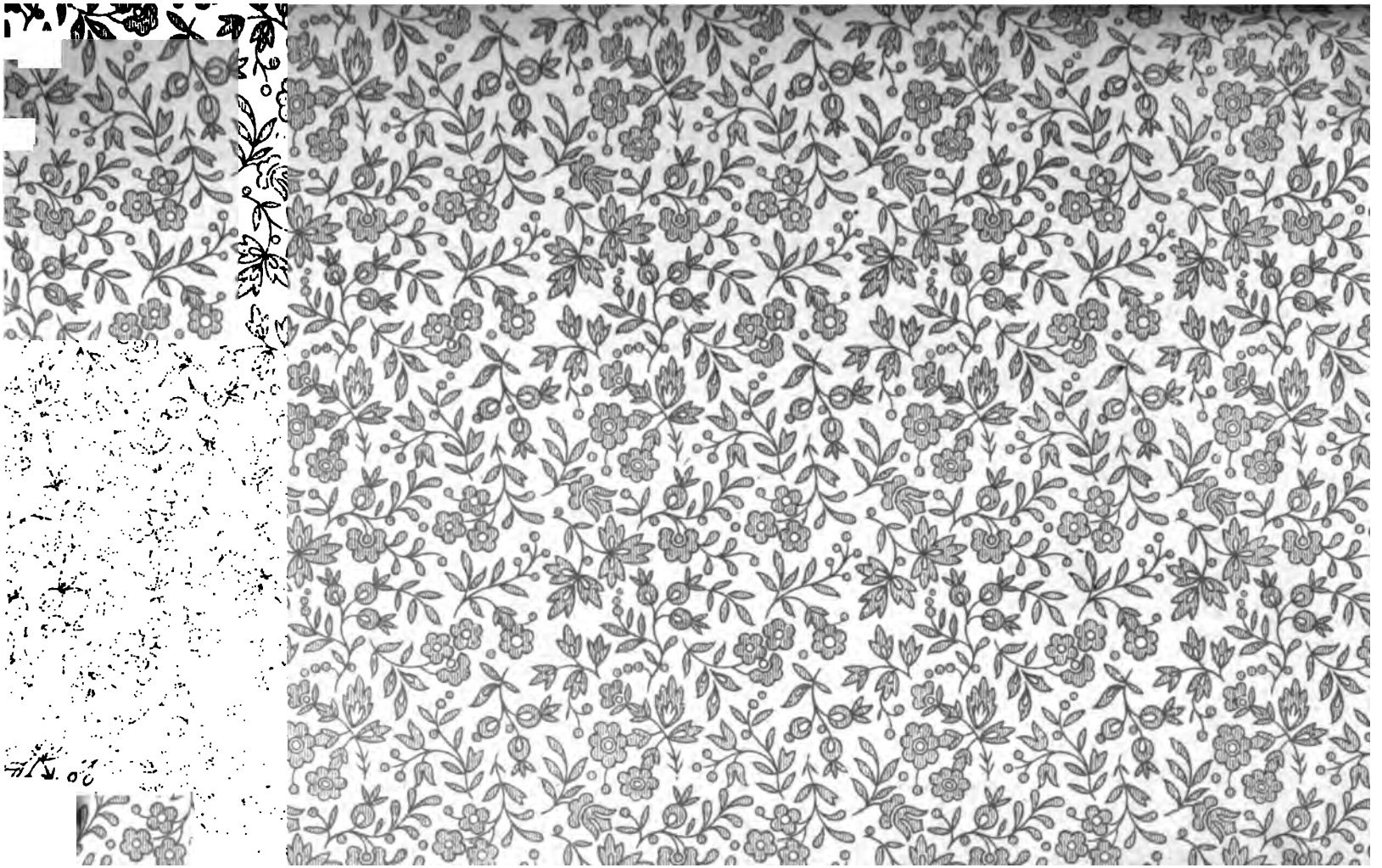
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 497





MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck** zu München. Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXXVII. Band.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1890.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28332

Inhalt des siebenunddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Braunmühl, von, in München. Ueber Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n-teln ganzer Zahlen gebildet sind und die Relationen zugehöriger Thetafunctionen n-ter Ordnung 61

Capelli, in Neapel. Sur les Opérations dans la théorie des formes algébriques 1

Dyck, in München. Beiträge zur Analysis situs. II. Aufsatz. Mannigfaltigkeiten von n-Dimensionen 273

Hess, in Bamberg. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt 153

Kiepert, in Hannover. Ueber gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen 368

Klein, in Göttingen. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie 544

—— Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe 573

Kürschák, in Budapest. Ueber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gleichen Charakteristiken 317

Mayer, in Leipzig. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln 399

Noether, in Erlangen. Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen. I. Theil 417

—— —— II. Theil 465

Peano, in Turin. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires 182

Pochhammer, in Kiel. Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve 500

—— Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung 512

Pringsheim, in München. Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen 38

—— Zur Theorie der bestimmten Integrale und der unendlichen Reihen. . 591

Schumacher, in Augsburg. Classification der algebraischen Strahlensysteme 100

Stickelberger, in Freiburg i./Br. Ueber eine Verallgemeinerung der Kreistheilung 321

Waelsch, in Prag. Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie 141

Weber, in Marburg. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen 404

Wiltheiss, in Halle a./S. Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation. III. 229

Zeuthen, in Kopenhagen. Sur la révision de la théorie des caractéristiques de **M. Study**. (Extrait d'une lettre à M. Klein) 461

Sur les Opérations dans la théorie des formes algébriques.

Par

Mr. Alfredo Capelli à Naples.

Les choses que je vais exposer dans ce mémoire ne sont pas seulement un résumé systématique de partie des résultats plus importants auxquels je suis parvenu dans mes travaux sur la théorie générale des formes algébriques. On y trouvera quelqu' autre résultat et beaucoup de démonstrations nouvelles dont le but principal est de ramener, autant que possible, le mécanisme de la technique opérative des formes invariantives à ses éléments plus simples, c'est-à-dire aux opérations de polaire, les seules dont l'usage est essentiel dans ce qui va suivre.

On y trouvera aussi une démonstration simple et absolument rigoureuse de la possibilité de developper une fonction de n séries de variables suivant les puissances entières du déterminant des variables et les polaires de covariants qui contiennent seulement $n-1$ séries.*)

§ I.

Théorèmes fondamentaux sur les relations entre les opérations.

1. Dans ce qui va suivre nous désignerons ordinairement par une seule lettre, p. ex. x, l'ensemble de plusieurs variables indépendantes $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, et nous dirons alors que x représente une série de variables de l'espèce ν, ou bien, tout court, que x est une variable de l'espèce ν.

*) J'ai cru d'autant plus utile de donner ici cette démonstration que j'ignore qu'on n'ait donné jusqu'à présent aucune autre démonstration de ce théorème depuis mon mémoire: „*Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* (Memorie della R°. Acc. dei Lincei 1882)" où j'ai établi ce théorème par un procédé qui était peut être un peu pénible et qui se trouve considérablement simplifié dans la démonstration que je vais en donner ici.

Nous considérerons toujours plusieurs séries de variables de même espèce:

$$x \equiv x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu,$$
$$y \equiv y_0, y_1, y_2, \ldots, y_\nu,$$
$$z \equiv z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\nu$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

et nous nous occuperons d'abord avec l'étude des opérations de la forme

$$D_{xy} \equiv y_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + y_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$
$$D_{yx} \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + x_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu},$$
$$D_{xz} \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que nous appellerons opérations *élémentaires*. Nous dirons parfois qu'une opération élémentaire D_{pq} est *propre* ou *impropre* suivant que ses indices représentent deux séries différentes de variables ou la même série; car on sait, par le théorème d'Euler, qu'en effectuant une opération D_{pp} sur une fonction homogène f, de degré k, des variables $p_0, p_1, \ldots, p_\nu$, on obtient simplement

$$D_{pp} \cdot f = p_0 \frac{\partial f}{\partial p_0} + p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} = k \cdot f.$$

Mais, si l'on effectue une opération propre D_{pq} sur une fonction $f(p, q)$ entière, homogène et resp. des degrés k et h par rapport à chaque série, le résultat

$$D_{pq} \cdot f = q_0 \frac{\partial f}{\partial p_0} + q_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + q_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

sera évidemment une fonction entière et homogène de chaque série p et q, des degrés respectifs $k - 1$ et $h + 1$.

L'opération résultante de plusieurs opérations Δ', Δ'', Δ''', ... effectuées successivement sur une même fonction sera représentée par le produit

$$\ldots \Delta''' \cdot \Delta'' \cdot \Delta'$$

où les facteurs opératifs se trouvent rangés, en allant de droite à gauche, dans l'ordre suivant lequel ils doivent s'effectuer.

2. Dans le cours de ce mémoire nous ne considérerons ordinairement d'autres opérations que celles qui s'expriment par un *aggregat* rationnel et entier, à coefficients constants, des opérations élémentaires définies ci-dessus. Si l'on désigne donc par

$$D_1, D_2, \ldots, D_N$$

les $N = n^2$ opérations élémentaires

$$(1) \qquad \begin{array}{l} D_{xx},\ D_{xy},\ D_{xz},\ \ldots,\ D_{xv}, \\ D_{yx},\ D_{yy},\ D_{yz},\ \ldots,\ D_{yv}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{vx},\ D_{vy},\ D_{vz},\ \ldots,\ D_{vv}, \end{array}$$

qu'on peut former avec n séries de variables $x, y, z, \ldots, v$, l'expression plus générale d'une opération sera donnée par

$$F(D_1, D_2, \ldots, D_N).$$

F étant un symbole de fonction rationnelle entière. Cependant il est important de remarquer qu'elle ne sera pas seulement caractérisée par la *forme algébrique* de la fonction F, mais aussi par sa forme *actuelle*, c'est-à-dire par l'ordre suivant lequel se trouvent rangés dans chaque terme de F les facteurs opératifs $D_1, D_2, D_3, \ldots$, qui ne sont pas en général *permutables* entre eux.

3. Relativement à une opération donnée

$$\Delta = F(D_1, D_2, \ldots, D_N)$$

on aura à distinguer des espèces différentes de degrés, c'est-à-dire:

a) le plus grand nombre de facteurs $D_1, D_2, \ldots$ égals ou distincts dont se composent les termes de F, ce que nous appellerons le *degré total* ou simplement *le degré* de Δ.

b) le plus grand nombre de fois que dans un même terme de F se présente, *comme premier indice*, une certaine variable x, ce que nous appellerons le *degré de dérivation en x*.

c) le plus grand nombre de fois qu'une même variable x se présente analoguement *comme second indice*, ce que nous appellerons le *degré de multiplication en x*.

Cependant il faut bien remarquer que les degrés ainsi définis se rattachent essentiellement à la *forme actuelle* de l'expression de Δ et qu'ils pourront quelquefois se diminuer en changeant opportunément la forme de l'expression de Δ.

4. Nous dirons que deux opérations Δ et Δ' sont *égales* si l'on ait identiquement

$$\Delta f = \Delta' f$$

pour toute fonction rationnelle entière*) f des variables qui entrent

*) On verra dans ce même paragraphe, que toute égalité entre deux opérations peut toujours se déduire au moyen des relations fondamentales des types I, II, III données ci-après. Or, ces relations pouvant s'appliquer à une fonction *quelconque*, il s'ensuit que, si deux opérations sont égales d'après notre définition, elles donneront aussi le même résultat lors même qu'on les appliquera à une fonction de nature quelconque satisfaisante aux conditions ordinaires de dérivabilité.

dans la composition de Δ et Δ', et nous appellerons *degré irréductible* d'une opération donnée Δ la plus petite valeur du degré total des différentes opérations qui lui sont égales.

On peut aussi définir d'une manière analogue le degré irréductible de dérivation ou de multiplication par rapport à une série de variables.

5. Les opérations élémentaires qu'on peut former avec des séries *distinctes* de variables de même espèce, $p, q, t, s, \ldots$ sont liées entre elles par des relations dont les plus simples sont données par les types suivants:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} D_{sq}D_{pt} - D_{pt}D_{sq} = 0, \\ D_{sq}D_{st} - D_{st}D_{sq} = 0, \\ D_{sq}D_{pq} - D_{pq}D_{sq} = 0. \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} D_{tq}D_{pt} - D_{pt}D_{tq} = D_{pq}, \\ D_{pq}D_{pp} - D_{pp}D_{pq} = D_{pq}, \\ D_{qq}D_{pq} - D_{pq}D_{qq} = D_{pq}, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \{D_{qp}D_{pq} - D_{pq}D_{qp} = D_{pp} - D_{qq}.$$

Ces relations sont fondamentales, car toute autre relation entre les opérations peut toujours se déduire de celles-ci, ainsi qu'on le reconnaîtra sans peine dans la suite de ce paragraphe.

On pourrait aussi démontrer*), à l'aide de ces relations, que les n^2 opérations élémentaires (1) qu'on peut former avec n séries $x, y, z, t, \ldots, u, v$ sont toujours exprimables comme un aggrégat rationnel entier de $n+1$ d'entre elles, par exemple par les $n+1$ opérations élémentaires:

$$D_{xx},\ D_{xy},\ D_{ys},\ D_{st}, \ldots, D_{uv},\ D_{vx}.$$

Mais nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce point qui a peu d'importance pour ce qui va suivre.

6. Theorème I. *Si* Π *et* Π' *sont deux produits de* λ *opérations élémentaires, qui ne diffèrent que par l'ordre de succession des facteurs, on aura identiquement*

$$\Pi - \Pi' = \sum k_i \cdot \pi_i$$

où les coefficients constants k_i *sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et les* π_i *sont des produits de* $\lambda - 1$ *opérations élémentaires.*

Considérons d'abord le cas où Π et Π' ne diffèrent que par l'échange de deux facteurs consécutifs D_i et D_j, de la sorte qu'on ait:

*) V. *Osservazioni sopra le relazioni che possono aver luogo identicamente fra le operazioni invariantive.* (Rendiconti della R^a. Accademia delle Scienze di Napoli. Giugno 1887).

$$\Pi = \Delta \cdot D_i D_j \cdot \Delta', \quad \Pi' = \Delta \cdot D_j D_i \cdot \Delta',$$

Δ et Δ' désignant resp. les produits des facteurs qui précèdent et qui suivent. On tire de la

$$\Pi - \Pi' = \Delta \cdot \{D_i D_j - D_j D_i\} \cdot \Delta',$$

ce qui démontre le théorème pour le cas considéré, car le facteur de deuxième degré peut se remplacer, en vertu des relations fondamentales (I), (II), (III), par le zéro ou par un facteur de premier degré:

$$\varepsilon_1 \cdot D_\mu + \varepsilon_2 \cdot D_\nu.$$

ε_1 et ε_2 représentant l'unité positive ou négative, ou bien le zéro.

Maintenant, on peut ramener le cas général, où Π et Π' diffèrent par des échanges quelconques des facteurs, au cas précédent, en considérant, ce qui est évidemment toujours possible, une succession limitée de produits $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$, tous composés des mêmes facteurs de Π et Π', telle que deux produits consécutifs quelconques de la succession

$$\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, \Pi'$$

ne diffèrent que par une transposition de deux facteurs consécutifs. On aura alors d'après ce que précède

$$\begin{aligned}
\Pi - \Pi_1 &= \varepsilon_0 \pi_0 + \varepsilon_0' \pi_0', \\
\Pi_1 - \Pi_2 &= \varepsilon_1 \pi_1 + \varepsilon_1' \pi_1', \\
\Pi_2 - \Pi_1 &= \varepsilon_2 \pi_2 + \varepsilon_2' \pi_2', \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Pi_k - \Pi' &= \varepsilon_k \pi_k + \varepsilon_k' \pi_k',
\end{aligned}$$

les ε exprimant le zéro ou bien ± 1, et les π étant des produits de $\lambda - 1$ opérations élémentaires; et en sommant ces relations on en déduira

$$\Pi - \Pi' = \sum \varepsilon \cdot \pi$$

ainsi qu'il fallait démontrer.

7. Corollaire. *Si* $\Delta = F(D_{xx}, D_{xy}, D_{xz}, \ldots)$ *est une fonction de degré total* λ, *et* Δ' *une opération qui coincide avec* Δ *si l'on a regard seulement à sa forme algébrique, mais qui en diffère par l'ordre des facteurs opératifs, leur différence* $\Delta - \Delta'$ *est une opération dont le degré irréductible ne peut supérer* $\lambda - 1$, *et dont les coefficients seront des fonctions linéaires (ou coefficients numériques entiers) des coefficients de* Δ.

Ça découle immédiatement du théorème démontré en l'appliquant successivement à chaque terme de Δ et au terme correspondant de Δ'.

8. Théorème II. *Si* $D_1, D_2, \ldots, D_N$ *sont les* n^2 *opérations élémentaires* (1) *rangées dans un ordre choisi arbitrairement, une opération*

quelconque Δ *composée par ces opérations élémentaires peut toujours s'exprimer par une somme de termes de la forme*

$$(2) \qquad \alpha \cdot D_N^{\mu_N} \cdot D_{N-1}^{\mu_{N-1}} \cdots D_3^{\mu_3} \cdot D_2^{\mu_2} \cdot D_1^{\mu_1},$$

α étant un coefficient constant (fonction linéaire à coefficients numériques entiers des coefficients de Δ) et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ des entiers positifs dont la somme ne peut dépasser le degré total de Δ.

Ce théorème étant évident pour les opérations Δ de degré égal à l'unité, supposons le déjà démontré pour toutes les opérations Δ dont le degré soit égal ou inférieur à $\lambda - 1$, et proposons nous de le démontrer pour les opérations de degré λ. Ça suffira évidemment pour établir la vérité du théorème.

A cet effet, étant donnée une opération quelconque Δ de degré λ, désignons par Δ' l'opération qui se déduit de Δ en permutant dans chaque terme de Δ l'ordre des facteurs de manière à les ranger dans l'ordre fixé (2). On aura:

$$\Delta' = \sum \beta \cdot D_N^{\mu_N} \cdots D_2^{\mu_2} \cdot D_1^{\mu_1},$$

les β étant les mêmes coefficients de Δ. Mais, les opérations Δ et Δ' coincidant entre elles par rapport à la forme algébrique, leur différence $\Delta - \Delta'$ sera une opération réductible au degré $\lambda - 1$, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure. On pourra donc l'exprimer, en vertu de notre hypothèse, sous la forme

$$\Delta - \Delta' = \sum \gamma \cdot D_N^{\mu_N} \cdots D_2^{\mu_2} \cdot D_1^{\mu_1},$$

es γ étant des fonctions linéaires (à coefficients numériques entiers) des coefficients de Δ et la somme des exposants $\mu_1 + \cdots + \mu_N$ ne pouvant dépasser $\lambda - 1$. On trouve donc en additionnant cette expression lavec la précédente

$$\Delta = \sum (\beta + \gamma) \cdot D_N^{\mu_N} \cdots D_2^{\mu_2} \cdot D_1^{\mu_1},$$

ce qui démontre le théorème.

Nous allons en déduire quelques corollaires qui nous seront très utils dans la suite.

9. Corollaire A. *Si les séries de variables* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *ne sont pas contenues dans une fonction* f *qui dépend seulement des* $x, y, z, \ldots$, *toute autre fonction déduite de* f *au moyen d'opérations formées avec les* $x, y, z, \ldots$ *et les* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *peut aussi s'en déduire plus simplement au moyen des seules opérations élémentaires qui ont pour premier indice les* $x, y, z, \ldots$.

En effet, si Δ est une opération quelconque formée avec les $x, y, z, \ldots$ et les $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, on peut toujours l'écrire, d'après le théorème ci-dessus, sous la forme

$$\Delta = \sum \alpha \,.\, \Pi \,.\, \Pi',$$

Π désignant un produit d'opérations élémentaires D_{pq} dont le premier indice p soit l'une des $x, y, z, \ldots$ et Π' un produit d'opérations élémentaires ayants pour premier indice les $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Mais la fonction f ne dépendant pas des $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, on aura évidemment

$$\Pi' \,.\, f = 0$$

à l'exception du cas où Π' se réduit à l'unité. Il reste donc précisément pour Δf une expression de la forme

$$\Delta f = \sum \alpha \,.\, \Pi \,.\, f,$$

c. q. f. d.

10. Corollaire B. *Si une fonction φ des séries $x, y, z, \ldots$ ait été déduite d'une fonction f des mêmes séries au moyen d'opérations composées avec les $x, y, z, \ldots$ et avec des nouvelles séries $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, elle pourrait aussi s'en déduire directement avec des opérations formées des seules $x, y, z, \ldots$.*

En effet, si après avoir représenté φ, comme tout à l'heure, sous la forme

$$\varphi = \sum \alpha \,.\, \Pi \,.\, f,$$

les Π ne contenant aux premiers indices que les $x, y, z, \ldots$, et après avoir effectuées les opérations indiquées par celles des Π qui contiennent le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ au seconds indices, on y substitue partout le zéro au lieu des $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ qui ne se trouvent qu'au second membre, il restera

$$\varphi = \sum{}' \alpha \,.\, \Pi \,.\, f,$$

où dans le second membre ne sont restées que les Π formées exclusivement avec les $x, y, z, \ldots$

11. Théorème III. *Toute fonction entière des n séries $x, y, \ldots, u, \ldots, v$*

$$f = \sum \alpha \,.\, x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_p^{\lambda_p} \,.\, y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \ldots y_p^{\sigma_p} \ldots v_1^{\varrho_1} v_2^{\varrho_2} \ldots v_p^{\varrho_p}, \qquad p \leqq n,$$

homogène et de degré α_i par rapport à chaque indice i, c'est-à-dire telle que l'on ait dans tous les termes

$$\lambda_i + \sigma_i + \cdots + \varrho_i = \alpha_i$$

peut toujours s'écrire sous la forme

$$f = \Delta \,.\, E$$

en désignant par E la fonction monoterme:

$$E = x_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$$

et par Δ une certaine opération, composée avec les séries $x, y, \ldots, u, \ldots, v$,

dont les degrés de dérivation par rapport aux séries $x, y, \ldots, u$ *ne dépassent pas les nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *respectivement.*

En désignant en effet par

$$\begin{aligned} &\xi', \ \xi'', \ \xi''', \ \ldots, \ \xi^{(n)}, \\ &\eta', \ \eta'', \ \eta''', \ \ldots, \ \eta^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\omega', \ \omega'', \ \omega''', \ \ldots, \ \omega^{(n)}, \end{aligned}$$

$n \cdot p$ nouvelles séries de variables *auxiliaires* de même espèce que les $x, y, z, \ldots, u, \ldots, v$, indépendantes entre elles et des $x, y, \ldots, u, \ldots, v$, on peut écrire, ainsi qu'on peut le vérifier immédiatement

$$(3) \qquad x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_p^{\lambda_p} \cdot y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \ldots y_p^{\sigma_p} \ldots v_1^{\varrho_1} v_2^{\varrho_2} \ldots v_p^{\varrho_p} = k \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_1 \cdot E,$$

où

$$\Delta_1 = D^{\lambda_1}_{x\xi} D^{\sigma_1}_{x\xi'} \ldots D^{\varrho_1}_{x\xi^{(n)}} \cdot D^{\lambda_2}_{y\eta'} D^{\sigma_2}_{y\eta''} \ldots D^{\varrho_2}_{y\eta^{(n)}} \ldots D^{\lambda_p}_{v\omega'} D^{\sigma_p}_{v\omega''} \ldots D^{\varrho_p}_{v\omega^{(n)}},$$

$$\Delta_2 = D^{\lambda_1}_{\xi' x} D^{\sigma_1}_{\xi'' y} \ldots D^{\varrho_1}_{\xi^{(n)} y} \cdot D^{\lambda_2}_{\eta' x} D^{\sigma_2}_{\eta'' y} \ldots D^{\varrho_2}_{\eta^{(n)} y} \ldots D^{\lambda_p}_{\omega' x} D^{\sigma_p}_{\omega'' y} \ldots D^{\varrho_p}_{\omega^{(n)} y}$$

et

$$k = \frac{1}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2 \cdots \lfloor\alpha_p} \cdot \frac{1}{\lfloor\lambda_1 \lfloor\lambda_2 \cdots \lfloor\lambda_n \cdots \lfloor\varrho_1 \lfloor\varrho_2 \cdots \lfloor\varrho_n}.$$

Mais, d'après l'article 10, on peut toujours transformer l'opération $\Delta_2 \Delta_1$, à l'aide des formules fondamentales (I), (II), (III), jusqu'à en éliminer les variables auxiliaires, et l'on obtiendra alors

$$\Delta_2 \cdot \Delta_1 \cdot E = \Delta \cdot E.$$

Δ étant une opération composée par les seules $x, y, z, \ldots, v$; et l'on voit immédiatement que les degrés de dérivation de Δ par rapport à ces séries ne supéreront les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ qui représentent les degrés de dérivation de l'opération $\Delta_2 \cdot \Delta_1$ par rapport à ces mêmes séries.

12. Corollaire. *Si* $D_1, D_2, \ldots, D_{N'}$, *sont les opérations élémentaires propres entre les* n *séries* $x, y, \ldots, v$, *et si* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ *sont tous les termes de la forme*

$$(4) \qquad D_{N'}^{\mu_{N'}} \ldots D_2^{\mu_2} \cdot D_1^{\mu_1}$$

dont les degrés de dérivation en $x, y, \ldots, v$ *ne dépassent pas resp. les nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *et que l'on pose*

$$E = x_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots v_n^{\alpha_n},$$

entre les fonctions entières

$$Q_1 E, \ Q_2 E, \ \ldots, \ Q_t E$$

ne peut avoir lieu aucune relation linéaire à coefficients constants.

Il suffit de supposer dans le théorème que précède $p = n$ et d'observer 1°) qu'en vertu de ce théorème et du théorème II la fonction f peut se déduire de E par une opération composée de termes de la forme (4), 2°) que le nombre des termes distincts de f coincide précisément avec le nombre t des termes opératifs de cette forme (4).

13. Le théorème II peut se généraliser en deux sens différents au moyen de quelques modifications légères de la démonstration que nous en avons donné.

Soit ϑ l'un quelconque des produits que l'on peut former avec les n^2 opérations (1), et désignons en général par

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \tag{5}$$

les degrés de dérivation par rapport aux différents groupes de variables

$$x, y, z, \ldots, v$$

respectivement, et désignons analoguement par

$$j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n, \tag{5}'$$

les degrés de multiplication par rapport aux mêmes séries.

Si nous imposons aux degrés (5) et (5)' des conditions de la forme

$$\begin{aligned} &\varphi_1(i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n) < e_1, \\ &\varphi_2(i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n) < e_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{A}$$

où les φ sont des fonctions rationnelles entières à coefficients réels et positifs, et les e des nombres positifs donnés, le nombre des termes ϑ qui satisfont à ces conditions sera évidemment *limité*. Maintenant nous imaginerons que l'on adjoigne, si l'on veut, à ces conditions des nouvelles conditions, de nature complètement arbitraire, pour les différences

$$i_1 - j_1, \; i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n$$

et nous désignerons le système de ces nouvelles conditions par (B). On pourrait, p. exemple, imposer des conditions exprimables analytiquement par des équations de la forme:

$$\begin{aligned} &\psi_1(i_1 - j_1, \; i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n) = 0, \\ &\psi_2(i_1 - j_1, \; i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les ψ désignant des fonctions bien déterminées quelconques. Ou bien, on pourrait imposer des conditions de nature arithmétique, p. exemple, que la somme

$$(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 + \cdots + (i_n - j_n)^2$$

fût un carré exact etc. etc.

Désignons par Θ l'ensemble de tous les termes ϑ qui satisfont simultanément aux conditions (A) et (B). Les termes dont se compose Θ peuvent s'écrire comme il suit:

$$(6)\qquad \begin{array}{l} \Theta_1,\ \Theta_1',\ \Theta_1'',\ \Theta_1''',\ \ldots, \\ \Theta_2,\ \Theta_2',\ \Theta_2'',\ \Theta_2''',\ \ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Theta_\varrho,\ \Theta_\varrho',\ \Theta_\varrho'',\ \Theta_\varrho''',\ \ldots, \end{array}$$

en plaçant dans une même ligne horizontale tous les termes ϑ qui ne diffèrent entre eux que par l'ordre des facteurs élémentaires. Cela posé, on a le théorème suivant.

Théorème III. *Si* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\varrho$ *sont* ϱ *termes choisis arbitrairement resp. dans chacune des* ϱ *lignes horizontales* (6), *tous les termes* (6) *peuvent s'exprimer par une somme de ces* ϱ *termes* $\Theta_1, \ldots, \Theta_\varrho$ *multipliés resp. par des nombres entiers positifs ou négatifs.*

Supposons, en effet, qu'on ait déjà démontré que tous les termes de Θ, dont le degré total ne dépasse pas $\lambda - 1$, sont exprimables par une somme de la forme

$$\alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \cdots + \alpha_\varrho\Theta_\varrho,$$

les α étant des nombres entiers. Il suffira alors de démontrer, comme à l'art. 8, qu'un terme quelconque de degré λ, appartenant à Θ, sera aussi exprimable par une somme de la même forme.

Soit $\Theta_\nu^{(\mu)}$ un terme quelconque de Θ de degré λ. Le théorème I nous apprend que la différence $\Theta_\nu^{(\mu)} - \Theta_\nu$ est exprimable par une somme, à coefficients numériques entiers, de termes de degré $\lambda - 1$. Mais en examinant la démonstration du théorème I il est facile de s'apercevoir que ces termes de degré $\lambda - 1$ feront eux mêmes partie de Θ. Car les formules fondamentales (I), (II), (III), en substituant aux termes de deuxième degré des premiers membres des termes de degré inférieur, n'augmentent jamais par cette substitution ni les degrés de derivation $i_1, i_2, \ldots, i_n$, ni les degrés de multiplication $j_1, j_2, \ldots, j_n$, et laissent complètement inaltérées les différences $i_1 - j_1, i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n$. Donc, les termes $\Theta_\nu^{(\mu)}$ et Θ_ν satisfaisant déjà aux conditions (A) et (B), les termes de degré $\lambda - 1$, par lesquels s'exprime leur différence, devront y satisfaire de même. Ces derniers termes appartiendront donc à Θ et conséquemment ils pourront s'exprimer, d'après notre hypothèse, en fonction linéaire, à coefficients numériques entiers, des $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\varrho$. On aura alors:

$$\Theta_\nu^{(\mu)} - \Theta_\nu = \alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \cdots + \alpha_\varrho\Theta_\varrho$$

d'où

$$\Theta_\nu^{(\mu)} = \beta_1\Theta_1 + \beta_2\Theta_2 + \cdots + \beta_\varrho\Theta_\varrho,$$

les β étant des entiers positifs ou négatifs.

14. Une opération quelconque Δ, dont les termes appartiennent à Θ, pourra donc s'exprimer sous la forme

$$\alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \cdots + \alpha_\varrho\Theta_\varrho,$$

les α étant des fonctions linéaires (à coefficients numériques entiers) des coefficients de l'opération Δ.

Si l'on n'impose aux termes de Θ que la condition $\sum i < k$, on a en particulier:

Théorème IV. *Une opération quelconque de degré k peut aussi s'exprimer par les mêmes termes de la forme*

$$\alpha \,.\, D_N^{\mu_N} \ldots D_3^{\mu_3} \,.\, D_2^{\mu_2} \,.\, D_1^{\mu_1},$$

considérés au théorème II, avec la condition $\sum \mu \leqq k$, *lors même qu'on ait exécuté dans quelq'un ou dans chacun de ces termes une permutation quelconque des facteurs élémentaires qui le composent. Seulement les valeurs des coefficients numériques entiers αx ne resteront en générale pas les mêmes.*

On pourrait p. exemple dans l'expression d'une opération donnée par le théorème II substituer au terme $D_3^{\mu} D_2^{\mu} D_1^{\mu}$ le terme $D_3^{\mu-1} D_2^{\mu-1} D_1^{\mu-1} \,.\, D_3 D_2 D_1$ ou bien la puissance $[D_3 D_2 D_1]^{\mu}$ pourvu qu'on change convenablement les coefficients de l'expression.

15. Théorème V. *Entre les opérations monômes de la forme*

$$D_N^{\mu_N} \ldots D_3^{\mu_3} D_2^{\mu_2} D_1^{\mu_1} \tag{7}$$

(ou entre ces mêmes termes après avoir effectué dans chacun une permutation quelconque des facteurs $D_1, D_2, \ldots$) ne peut avoir lieu aucune relation linéaire à coefficients constants.

Nous considérerons d'abord les termes de la forme (7) et supposerons aussi que les n premières opérations élémentaires $D_1, D_2, \ldots, D_n$ coincident avec les n opérations impropres D_{xx}, D_{yy}, $\ldots$, D_{vv}.

Désignons par Θ l'ensemble de tous les termes de la forme (7) dont les degrés de dérivation par rapport aux $x, y, z, \ldots, v$ ne dépassent pas respectivement certains nombres $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$, et supposons, s'il est possible, qu'ils soient liés par une relation linéaire à coefficients constants. Soient, maintenant, $Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, \ldots, Q_h^0$ les termes appartenants à Θ qui ne contiennent pas d'opérations élémentaires impropres $D_{xx}, D_{yy}, \ldots, D_{vv}$; et $Q_i', Q_i'', Q_i''', \ldots$ les autres termes de Θ qui ne diffèrent de Q_i que par des facteurs impropres $D_{xx}, D_{yy}, \ldots, D_{vv}$.

Soit, s'il est possible

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} Q_i^{(j)} = 0, \tag{8}$$

une relation linéaire à coefficients constants α_{ij} dont on veut supposer l'existence. Si on l'applique à la fonction monôme $F = x_1^{\lambda'} y_2^{\mu'} \ldots, v_n^{\varrho'}$, on aura en particulier

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot Q_i^{(j)} F = 0. \tag{9}$$

Mais il est aisé de voir que les résultats

$$Q_i^0 F,\ Q_i' F,\ Q_i'' F, \ldots$$

ne diffèrent entre eux que par un facteur numérique. On a, en effet, d'après notre hypothèse:

$$Q_i^{(j)} = Q_i^0 \cdot D_{vv}^{t_n} \ldots D_{yy}^{t_2} D_{xx}^{t_1},$$

$t_n, t_2, \ldots, t_1$ étant des exposants resp. inférieurs à $\lambda, \sigma, \ldots, \rho$, et par conséquent

$$Q_i^{(j)} F = \lambda'^{t_1} \cdot \mu'^{t_2} \ldots \rho'^{t_n} \cdot Q_i^0 F.$$

On peut donc écrire:

$$\alpha_{i0} Q_i^0 F + \alpha_{i1} Q_i' F + \alpha_{i2} Q_i'' F + \cdots = \varphi_i(\lambda', \sigma', \cdots, \rho') \cdot Q_i^0 F,$$

où φ_i est le symbole d'une fonction rationnelle entière des arguments $\lambda', \mu', \ldots, \rho'$ dont les degrés par rapport à $\lambda', \mu', \ldots, \rho'$ ne peuvent supérer resp. les nombres $\lambda, \mu, \ldots, \rho$, et dont les coefficients sont les $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots$.

La relation (9) devient ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=h} \varphi_i(\lambda', \mu', \ldots, \rho') \cdot Q_i^0 F = 0.$$

Mais pour toutes les F qui ont des exposants $\lambda', \mu', \ldots, \rho'$, resp. égals ou supérieurs aux nombres $\lambda, \mu, \ldots, \rho$, ne peut subsister (art. 12) aucune relation linéaire à coefficients constants entre les résultats $Q_1^0 F, Q_2^0 F, \ldots, Q_h^0 F$. On aura donc nécessairement pour tous ces systèmes de valeurs

$$\varphi_i(\lambda', \mu', \ldots, \rho') = 0.$$

Maintenant, la fonction entière $\varphi_i(\lambda', \mu', \ldots, \rho')$ devant s'annuler pour un nombre infini de systèmes de valeurs de ses arguments, chaque argument pouvant prendre un nombre infini de valeurs indépendamment des autres, elle doit être identiquement nulle, d'après un théorème bien connu d'algèbre. On aura donc:

$$\alpha_{i0} = 0,\ \alpha_{i1} = 0,\ \alpha_{i2} = 0, \ldots .$$

La relation (8) ne peut donc se vérifier que pour des valeurs nulles des coefficients c. q. f. d.

16. Désignons maintenant par Θ' l'ensemble des mêmes termes Θ après avoir effectué dans chacun d'eux une permutation quelconque des facteurs élémentaires, et supposons, s'il est possible, que les termes Θ' soient liés par une relation linéaire à coefficients constants. Alors, les termes Θ pouvant toujours s'exprimer (art. 14) en fonction linéaire

des Θ' et réciproquement, une relation linéaire devrait aussi avoir lieu entre les termes Θ contrairement à ce que nous avons démontré ci-dessus. Le théorème V se trouve ainsi complètement démontré:

17. Théorème VI. *Pour que le degré d'une opération:*

$$\Delta = F(D_1, D_2, \ldots, D_N)$$

composée d'une manière quelconque avec les opérations élémentaires $D_1, D_2, \ldots, D_N$ *soit irréductible* (art. 4), *il faut et il suffit que ce degré coincide avec le degré de la fonction* $F(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ *considérée comme fonction des variables indépendantes* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$.

En effet, Δ_λ étant une opération quelconque de degré λ, soit Δ_0 l'aggregat de tous ses termes de degré λ. On aura

$$\Delta_\lambda = \Delta_0 + \Delta'_{\lambda-1}.$$

$\Delta'_{\lambda-1}$ étant une opération de degré non superieur à $\lambda - 1$. Si nous désignons maintenant par Δ_0' ce que devient Δ_0 quand on y permute dans chaque terme les opérations élémentaires de manière à les ranger dans l'ordre préfixé $D_1, D_2, D_3, \ldots$, nous pouvons écrire (art. 7):

$$\Delta_0 = \Delta_0' + \Delta''_{\lambda-1}. \tag{10}$$

$\Delta''_{\lambda-1}$ étant une nouvelle opération dont le degré ne dépasse $\lambda - 1$. Nous avons donc

$$\Delta_\lambda = \Delta_0' + (\Delta'_{\lambda-1} + \Delta''_{\lambda-1}). \tag{11}$$

Supposons maintenant que le degré de Δ_λ soit réductible, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Delta_\lambda = \Delta_{\lambda-1}$$

où $\Delta_{\lambda-1}$ soit une opération de degré égal ou inférieur $\lambda - 1$. On tire alors de (10)

$$\Delta_0' = \Delta_{\lambda-1} - \Delta'_{\lambda-1} - \Delta''_{\lambda-1}.$$

Maintenant, le second membre de cette égalité pouvant toujours s'exprimer (art. 8) par des termes dont les facteurs élémentaires se suivent dans l'ordre préfixé et dont le degré ne supère $\lambda - 1$, pendant que les termes du premier membre sont tous de degré λ et composés de facteurs qui se suivent déjà dans le même ordre, cette égalité nous donne une relation linéaire qui ne peut se vérifier (art. 15) que dans le cas où chaque membre soit nul séparément. On aura donc

$$\Delta_0' = 0.$$

Mais Δ_0' n'est autre chose que l'ensemble des termes de degré λ de la fonction $F(D_1, D_2, \ldots, D_N)$ considérée comme fonction des variables indépendantes $D_1, D_2, \ldots$. Cette fonction sera donc, de ce point de vue, une fonction de degré $\lambda - 1$.

La condition énoncée dans notre théorème est donc nécessaire. Mais elle est aussi suffisante. Car si l'on suppose $\Delta_0' = 0$, on tire de (11)

$$\Delta_\lambda = \Delta'_{\lambda-1} + \Delta''_{\lambda-1},$$

ce qui donne une réduction de l'opération Δ_λ à une opération de degré $\lambda - 1$.

Exemple. L'opération de 6^{me} degré:

$$\Delta = D^2_{xy} D^2_{yz} D^2_{zx} - D_{yz} D_{xy} D^2_{zx} D_{yz} D_{xy} + 2 D_{xy} D_{yz} D_{zx} + D^2_{xy} D^2_{yx}$$

a son degré réductible, parce qu'en substituant aux symboles D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}, D_{yx} resp. des variables indépendantes ξ, η, ζ, τ on obtient la fonction

$$\xi^2\eta^2\zeta^2 - \xi^2\eta^2\zeta^2 + 2\xi\eta\zeta + \xi^2\tau^2$$

c'est-à-dire

$$2\xi\eta\zeta + \xi^2\tau^2,$$

qui est seulement du quatrième degré. On trouverait donc que Δ se réduit au cinquième degré ou à un degré plus petit.

19. Théorème VII. *Le degré irréductible du produit de plusieurs opérations, différentes de zéro, est égal à la somme des degrés irréductibles de ces opérations.*

Il suffit évidemment de démontrer ce théorème pour le cas du produit de deux opérations. Soit donc

$$F_1(D_1, D_2, D_3, \ldots) \cdot F_2(D_1, D_2, D_3, \ldots)$$

le produit de deux opérations, des degrés irréductibles μ_1 et μ_2, exprimées resp. par des fonctions entières F_1 et F_2 de ces mêmes degrés; et supposons, s'il est possible, que le degré irréductible de ce produit soit inférieur à $\mu_1 + \mu_2$. Ça revient à dire (art. 17) que la fonction entière

$$F_1(\omega_1, \omega_2, \ldots) \cdot F_2(\omega_1, \omega_2, \ldots),$$

des variables indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots$ est aussi d'un degré inférieur à $\mu_1 + \mu_2$, et, par conséquent, que les deux fonctions $F_1(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ et $F_2(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ ne peuvent être simultanément des degrés respectifs μ_1 et μ_2. Mais si l'on supposait, par exemple, que la fonction $F_1(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ était de degré inférieur à μ_1, il s'ensuivrait (art. 17) que l'opération $F_1(D_1, D_2, \ldots)$ serait de degré irréductible inférieur à μ_1, ce qui est contraire à notre hypothèse.

19. Corollaire A. *Pourque le produit de deux opérations soit identiquement nul, l'une ou l'autre d'entre-elles doît être nulle identiquement.*

Soient, en effet, μ_1 et μ_2 les degrés irreductibles des deux opérations Δ_1 et Δ_2 et supposons, s'il est possible, qu'on ait

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 0,$$

sans que Δ_1 ou Δ_2 soient séparément nulles. Le second membre étant

une opération de degré nul, on aurait par le théorème précédent $\mu_1 + \mu_2 = 0$ et par conséquent

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0.$$

Le produit $\Delta_1 \Delta_2$ serait donc le produit de deux simples constantes différentes de zéro, ce qui serait absurde, ce produit étant supposé égal à zéro.

20. Corollaire B. *Les puissances différentes d'une même opération ne peuvent être liées par aucune relation linéaire à coefficients constants.*

Supposons, en effet, que l'on ait

$$a_0 + a_1\Delta + a_2\Delta^2 + \cdots + a_h\Delta^h = 0,$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant des constantes et Δ une opération quelconque différente de zéro, dont le degré irréductible soit μ. On en déduirait

$$a_h \cdot \Delta^h = -(a_{h-1}\Delta^{h-1} + a_{h-2}\Delta^{h-2} + \cdots + a_1\Delta + a_0)$$

et l'on voit que le coefficient a_h doit être nul, car autrement le premier membre serait, par notre théorème, une opération de degré irréductible $\mu . h$, pendant que le second membre serait une opération d'un degré évidemment inférieur. Le coefficient a_h étant donc nul, il restera

$$a_0 + a_1\Delta + \cdots + a_{h-1}\Delta^{h-1} = 0$$

et l'on démontrerait de même que $a_{h-1} = 0$, etc.

§ II.

L'Opération H.

1. L'opération de M. Cayley

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial}{\partial v_n},$$

formée avec n séries de variables n^{aires}: $x, y, \ldots, v$, opération qui joue un rôle très important dans la théorie des formes invariantives, peut toujours se ramener à des simples opérations élémentaires, telles que nous les avons considéré dans le § qui précède. A cet effet il suffit de considérer l'opération

$$(1) \qquad H = (xy\cdots v)\cdot \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial}{\partial v_n},$$

qui ne diffère de la précédente qu'en ce que le résultat de l'opération Ω doit être encore multiplié par le déterminant

$$\sum \pm x_1 y_2 \ldots v_n = (xy \ldots v)$$

des n séries de variables.

Nous allons démontrer que l'opération H ainsi définie peut être remplacée par un aggregat des n^2 opérations élementaires:

$$(2) \qquad D_{xx},\ D_{xy},\ \ldots,\ D_{xv},\ \ldots,\ D_{vx},\ D_{vy},\ \ldots,\ D_{vv},$$

qu'on peut former avec les mêmes séries de variables.

2. Pour ramener l'opération H à ces dernières opérations nous introduirons pour le moment dans les calculs n nouvelles séries de variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ de même espèce que les $x, y, \ldots, v$, complètement indépendantes entre-elles et de celles-ci. A l'aide de ces nouvelles variables, qu'on pourrait appeler *auxiliaires*, l'opération H peut s'écrire sous la forme suivante

$$\mathsf{H} = D_{\omega v} \ldots D_{\eta y} D_{\xi x} \left\{ (\xi\eta \ldots \omega) \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n} \right\}$$

parce qu'on a

$$D_{\omega v} \ldots D_{\eta y} D_{\xi x} (\xi\eta \ldots \omega) = (xy \ldots v)$$

et parce qu'on peut évidemment toujours supposer que la fonction, sur laquelle on doit effectuer l'opération H, soit indépendante des variables auxiliaires $\xi, \eta, \ldots, \omega$.

Mais, d'après la règle de multiplication des déterminants, on a

$$(\xi\eta \ldots \omega) \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n} = \begin{vmatrix} D_{x\xi} & D_{y\eta} & \ldots & D_{x\omega} \\ D_{y\xi} & D_{y\eta} & \ldots & D_{y\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{v\xi} & D_{v\eta} & \ldots & D_{v\omega} \end{vmatrix}.$$

On peut donc écrire

$$(a) \qquad \mathsf{H} = D_{\omega v} \ldots D_{\eta y} D_{\xi x} \cdot \sum \pm D_{x\xi} D_{y\eta} \ldots D_{v\omega},$$

où le second membre se compose avec les $2n$ séries:

$$x, y, \ldots, v; \quad \xi, \eta, \ldots, \omega.$$

Maintenant il s'agit seulement d'éliminer les variables auxiliaires par le procédé indiqué au §. précédent (voir le théorème II, corollaire B).

On parviendra ainsi à un résultat de la forme suivante:

$$\mathsf{H} = \sum C \cdot D_{v'v}^{\varepsilon_n} \ldots D_{y'y}^{\varepsilon_2} D_{x'x}^{\varepsilon_1},$$

où $x', y', \ldots, v'$ est une permutation quelconque des lettres $x, y, \ldots, v$, les exposants $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ n'ayant que les valeurs 0 et 1, et les coefficients C étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

3. Pour $n = 2$ on trouve:

$$H_{xy} = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right) + D_{xx} + D_{xx}D_{yy} - D_{yx}D_{xy}$$

et pour $n = 3$:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \end{vmatrix}$$

$$= D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{zz}) + D_{zx}D_{xy}D_{yz} + D_{yx}D_{zy}D_{xz} - D_{xx}D_{zy}D_{yz} - D_{zx}(1+D_{yy})D_{xz} - D_{yx}D_{xy}(2+D_{zz}).$$

Ces expressions de H peuvent se représenter d'une manière très-simple sous forme de déterminant en écrivant

$$H_{xy} = \begin{vmatrix} D_{xy} & D_{xy} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} \end{vmatrix}, \quad H_{xyz} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & 2+D_{zz} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

pourvu que dans chaque terme du développement on ait soin de ranger les facteurs opératifs dans le même ordre des lignes verticales auxquelles ils appartiennent.*)

4. Au lieu de partir de l'expression (a) de H composée avec les variables auxiliaires $\xi, \eta, \ldots, \omega$, on peut partir de l'expression suivante:

$$\text{(b)} \qquad H = \left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} \cdot D_{v\omega} \ldots D_{y\eta} D_{x\xi}$$

ou bien de l'expression

$$\text{(c)} \quad H = \frac{1}{\underline{n}}\left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} \cdot \left\{\sum \pm D_{x\xi} D_{y\eta} \ldots D_{v\omega}\right\}$$

qui se deduit de (a) ou de (b) en y permutant de toutes les manières possibles les variables auxiliaires $\xi, \eta, \ldots, \omega$. Cette dernière expression nous apprend que *l'opération H est symmétrique par rapport aux séries de variables $x, y, \ldots, u$ dont elle dépend; ce qu'on pouvait d'ailleurs déduire immédiatement de l'expression* (1).

5. L'expression de H au moyen des opérations élémentaires (2) a un sens parfaitement déterminé quel que soit le nombre m des variables dont se compose chacune des séries $x, y, \ldots, v$. Dans le cas où le nombre m est égal au nombre n des séries $x, y, \ldots, v$ nous avons vu qu'on a identiquement

*) Voir le tome XXIX de ces annales: Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen.

$$H = (xy\cdots v)\sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial}{\partial v_n}\Big\},$$

mais il est aisé de voir qu'on aura une expression analogue aussi pour le cas de $m \gtrless n$. Si l'on pose en effet pour $m \gtrless n$

$$(3)\qquad H = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_m \\ y_1 & y_2 \ldots y_m \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_1 & v_2 \ldots v_m \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_m} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial y_m} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \frac{\partial}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_m} \end{Vmatrix},$$

$$= \sum_i (x_{i_1} y_{i_2} \ldots v_{i_n}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial y_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial v_{i_n}}\right)$$

on pourra transformer le second membre, par l'introduction des séries auxiliaires $\xi, \eta, \ldots, \omega$, d'une manière tout à fait analogue à celle de l'art. 1. On trouvera ainsi:

$$H = D_{\omega v}\ldots D_{\eta y} D_{\xi x} \sum_i (\xi_{i_1} \eta_{i_2} \ldots \omega_{i_n}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial y_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial v_{i_n}}\right)$$

$$= D_{\omega v}\ldots D_{\eta y} D_{\xi x} \sum \pm D_{x\xi} D_{y\eta}\ldots D_{v\omega}$$

expression qui ne diffère point dans sa forme de celle que l'on avait pour le cas de $m = n$. Cependant il est évident que *dans le cas de* $m < n$ *le résultat de l'opération* H *sera toujours nul identiquement.*

6. *L'opération* H *entre des séries de variables* $x, y, z, \ldots, v$ *est permutable avec toutes les opérations qu'on peut former avec ces séries.*

Pour démontrer ce théorème il suffit évidemment de montrer que H est permutable avec chacune des opérations élémentaires (2), et on pourra se borner aux opérations de la forme D_{xp}, p étant une quelconque des variables $x, y, \ldots, v$ parce que l'opération H est symmétrique par rapport aux variables $x, y, \ldots, v$ dont elle dépend, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (art. 4).

En partant de l'expression (6):

$$H = \Big\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} D_{\zeta z}\ldots D_{\omega v}\Big\} \cdot D_{v\omega}\ldots D_{z\zeta} D_{y\eta} D_{x\xi}$$

au moyen des formules

$$D_{xp} D_{\xi x} = D_{\xi x} D_{xp} + D_{\xi p},$$
$$D_{xp} D_{\eta x} = D_{\eta x} D_{xp} + D_{\eta p},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

on trouve aisément:

$$D_{xp} = \left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} = \left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} D_{xp} + \sum \pm D_{\xi p} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}.$$

Maintenant, si p coincide avec y, ou z, ... ou v, on a évidemment

$$\sum \pm D_{\xi p} D_{\eta y} D_{\zeta z} \ldots D_{\omega v} = 0$$

et on conclut immédiatement

$$D_{xp} H = H D_{xp}.$$

Dans le cas où p coincide avec x l'égalité précédente devient

$$D_{xx}\left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} = \left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\}(D_{xx}+1)$$

et l'on aura, encore $D_{xx} H = H D_{xx}$, car

$$(D_{xx}+1) D_{\omega v} \ldots D_{z\zeta} D_{y\eta} D_{x\xi} = D_{v\omega} \ldots D_{z\zeta} D_{y\eta} D_{x\xi} \cdot D_{xx}$$ *)

9. *L'opération H entre les n séries $x, y, z, , \ldots, t, u$ peut toujours s'écrire sous la forme*

$$\Delta_0 + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz} + \cdots + \Delta_{n-1} D_{tu} \tag{4}$$

les Δ_i étant des opérations composées opportunément avec les mêmes séries, et

$$\Delta_0 = D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{zz}) \ldots (n-1+D_{uu})$$

Ce théorème est évident, d'après l'article 3, pour le cas de deux séries x, y. On peut donc le démontrer en le supposant vrai pour le cas de $n-1$ séries et en l'étendant au cas de n séries. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'on l'ait démontré pour le cas de trois séries x, y, z c'est-à-dire que l'on ait

$$H_{xyz} = D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{zz}) + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz} \tag{5}$$

et qu'on cherche à le démontrer pour le cas de quatre séries x, y, z, t. En développant l'expression donnée à l'art. 3:

$$H_{xyzt} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} & D_{xt} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} & D_{yz} & D_{yt} \\ D_{zx} & D_{zy} & 2+D_{zz} & D_{zt} \\ D_{tx} & D_{ty} & D_{tz} & 3+D_{tt} \end{vmatrix}$$

*) Pour n séries il y a, en dehors de l'opération H, $n-1$ autres opérations fondamentales qui jouissent de la même propriété d'être permutables à toute autre opération formée avec les n séries, ainsi que je l'ai démontré dans mon mémoire: *Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione.* (*Atti della R^a. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli. Vol. I, Serie 2^a*).

on trouve d'abord

$$H_{xyst} = (3+D_{tt})H_{xys} + \Delta_1' D_{xt} + \Delta_2' D_{yt} + \Delta_3' D_{st}.$$

Mais en appliquant plusieurs fois de suite l'identité

$$D_{pq} = D_{tq} D_{pt} - D_{pt} D_{tq}$$

on peut facilement exprimer les opérations D_{xt}, D_{yt}, D_{zt} par les trois opérations D_{xy}, D_{ys}, D_{st}. On obtient alors évidemment, après avoir substitué pour H son expression (5), un résultat de la forme

$$H_{xyst} = D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{ss})(3+D_{tt}) + \Delta_1'' D_{xy} + \Delta_2'' D_{ys} + \Delta_3'' D_{st}$$

ainsi qu'on le désirait. La démonstration reste absolument la même pour un nombre quelconque de séries.

9. *Si une fonction rationnelle entière des n séries $x, y, z, \ldots, t, u$, homogène par rapport à chaque série, est annulée par chacune des $n-1$ opérations:*

$$D_{xy}, D_{ys}, \ldots, D_{tu},$$

elle est identiquement égale à une puissance du déterminant $(xyz\ldots u)$ multipliée par une fonction entière des $y, z, \ldots, t$ qui sera aussi annulée par les opérations $D_{ys}, \ldots, D_{tu}$.

En effet, si l'on opère sur une fonction f, qui jouit de ces propriétés, avec l'opération H, le théorème de l'art. précédent nous donnera

$$Hf = \Delta_0 f$$

où le second membre n'est autre chose que la fonction f même multipliée par un nombre entier, positif et différent de zéro. Mais le premier membre Hf est une fonction exactement divisible par le déterminant $(xy \ldots tu)$ ainsi qu'il s'ensuit immédiatement de la définition même (1) de H. On aura donc

$$f = (xyz \ldots tu) \cdot \varphi$$

φ étant une fonction entière qui satisfait encore aux égalités

$$D_{xy}\varphi = 0,\ D_{ys}\varphi = 0, \ldots, D_{tu}\varphi = 0$$

puisqu'on a identiquement

$$D_{xy}f = (xyz \ldots tu) \cdot D_{xy}\varphi,\quad D_{ys}f = (xyz \ldots tu) \cdot D_{ys}\varphi, \ldots$$

Maintenant, si φ dépende encore de x, on démontrera de la même manière que φ est de la forme $(xyz \ldots tu) \cdot \psi$, ψ étant une fonction entière des $x, y, z, \ldots$ qui satisfait aux égalités:

$$D_{xy}\psi = 0,\ D_{ys}\psi = 0, \ldots, D_{tu}\psi = 0.$$

On obtient ainsi

$$f = (xyz \ldots tu)^2 \cdot \psi$$

et on peut continuer de la même manière jusqu'à ce qu'on ait séparé de f une puissance de $(xy \ldots u)$ dont l'exposant soit égal au degré de f en x.

§ III.

Sur la dérivabilité des fonctions rationnelles entières les unes des autres et sur l'impossibilité de dériver une fonction de plusieurs séries de variables, exactement divisible par le déterminant des séries, de fonctions d'un nombre plus petit de séries.

1. Théorème I. *Si deux fonctions rationnelles entières des mêmes séries de variables, homogènes par rapport aux variables de chaque série, ne diffèrent l'une de l'autre que par une permutation quelconque des séries, elles seront toujours dérivables l'une de l'autre au moyen d'opérations.*

Soit p. ex. $f(x, y, z)$ une fonction des trois séries x, y, z homogène par rapport aux variables de chaque série et resp. des degrés λ, μ, ν. Je dis que la fonction $f(y, z, x)$ peut se déduire de $f(x, y, z)$ par des opérations formées avec les séries x, y, z. Soient en effet ξ, η, ζ trois nouvelles séries *auxiliaires* indépendantes des précédentes. On reconnait sans peine que

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}\,\underline{\nu}} \cdot D_{x\xi}^{\lambda} D_{y\eta}^{\mu} D_{z\zeta}^{\nu} f(x, y, z),$$

$$f(y, z, x) = \frac{1}{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}\,\underline{\nu}} \cdot D_{\xi y}^{\lambda} D_{\eta z}^{\mu} D_{\zeta x}^{\nu} f(\xi, \eta, \zeta)$$

d'où:

$$f(y, z, x) = \frac{1}{(\underline{\lambda})^2 (\underline{\mu})^2 (\underline{\nu})^2} \cdot D_{\xi y}^{\lambda} D_{\eta z}^{\mu} D_{\zeta x}^{\nu} D_{x\xi}^{\lambda} D_{y\eta}^{\mu} D_{z\zeta}^{\nu} f(x, y, z).$$

Maintenant on peut éliminer les séries auxiliaires par le procédé que nous avons indiqué au § I. (Théorème II, Cor. B), et on obtiendra

$$f(y, z, x) = \Delta \cdot f(x, y, z)$$

l'opération Δ étant composée avec les opérations élémentaires $D_{xy}, D_{xz}, \ldots$ qui ne dépendent que des x, y, z.

2. Théorème II. *Si une fonction φ de $n-1$ séries de variables peut se dériver, au moyen d'opérations, d'une fonction f rationnelle entière (homogène en chaque série) de n séries de variables $x, y, z, \ldots, u$, on pourra toujours déterminer des opérations Δ_i telles que l'on ait:*

$$\varphi = \sum \Delta_i \cdot D_{xy}^{\alpha_i} D_{xt}^{\beta_i} \ldots D_{xu}^{\lambda_i} \cdot f$$

le symbole $\sum$ s'étendant aux systèmes de valeurs des $n-1$ exposants $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \lambda_i$ dont la somme $\alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i$ est égale au degré de f en x.

Soit p. ex. y la série qui n'est pas contenue dans la fonction $\varphi(x, z, t, \ldots, u)$ dérivée de $f(x, y, z, t, \ldots, u)$. On a d'abord d'après le théorème précédent

$$\varphi(y, z, t, \ldots, u) = \Delta\varphi(x, z, t, \ldots, u).$$

Maintenant, la $\varphi(x, z, t, \ldots, u)$ pouvant, d'après notre hypothèse, se dériver de $f(x, y, z, t, \ldots, u)$, on peut toujours écrire, ainsi que nous l'avons démontré au § I (Théorème II):

$$\varphi(y, z, t, \ldots, u) = \sum \Delta_i \cdot D_{xy}^{\alpha_i} D_{xz}^{\beta_i} \ldots D_{xu}^{\lambda_i} \cdot f$$

les Δ_i ne contenant plus la variable x aux premiers indices. La somme $\alpha_i + \beta_i + \cdots + \delta_i$ doit donc être égale dans tous les termes de $\sum$ au degré de f en x, sans quoi le second membre ne pourrait être de degré nul en x. Le théorème est donc demontré parce que la fonction $\varphi(x, z, t, \ldots, u)$ peut à son tour se déduire de $\varphi(y, z, t, \ldots, u)$ au moyen d'opérations en vertu du théorème précédent.

3. Dans ce qui va suivre nous dirons qu'une fonction entière f des n séries de variables $x, y, z, \ldots, u$ est *impropre* (ou bien qu'elle est *dérivable d'un nombre plus petit de séries*), lorsqu'elle peut se déduire, au moyen d'opérations, de certaines fonctions de $n - 1$ séries de variables. Ça revient à dire que la fonction f doit pouvoir se représenter identiquement sous la forme

$$f(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

les Δ_i étant des opérations entre les n séries $x, y, z, \ldots, u$.

En effet, on peut toujours supposer, sans nuire à la généralité, que les $n - 1$ séries qui entrent dans les φ_i soient partout les mêmes, et l'on pourra toujours les choisir arbitrairement. Car, s'il soit, p. ex., pour le cas de quatre séries de variables x, y, z, t:

$$f(x, y, z, t) = \Delta_1\varphi_1(y, z, t) + \Delta_2\varphi_2(x, z, t) + \Delta_3\varphi_3(y, z, x)$$

on peut toujours écrire, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus:

$$\varphi_2(x, z, t) = D_2 \cdot \varphi_2(y, z, t),$$
$$\varphi_3(y, z, x) = D_3 \cdot \varphi_3(y, z, t)$$

D_2, D_3 étant des opérations entre x, y, z, t; et si l'on pose

$$\Delta_2 D_2 = \Delta', \qquad \Delta_3 D_3 = \Delta''$$

on aura pour f la forme:

$$f(x, y, z, t) = \Delta_1\varphi_1(y, z, t) + \Delta'\varphi_2(y, z, t) + \Delta''\varphi_3(y, z, t).$$

4. Théorème III. *Une fonction impropre f des n séries de variables $x, y, z, \ldots, u$ est toujours de la forme:*

$$f = \sum_i D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{zx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \cdot \psi_i(y, z, \ldots, u).$$

On a d'abord d'après l'article précédent

$$f(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u).$$

Maintenant on peut toujours arranger (§ I, art. 8) les n^2 opérations élémentaires dont se compose Δ_i de manière que l'on ait identiquement

$$\Delta_i = \sum D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{sx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \Delta_j' D_{xu}^{\beta_{n-1}} \ldots D_{xs}^{\beta_2} D_{xy}^{\beta_1}$$

Δ_j' étant une opération qui dépend seulement des $y, z, \ldots, u$. Mais, la fonction φ_i ne contenant pas les x, on aura

$$D_{xu}^{\beta_{n-1}} \ldots D_{xs}^{\beta_2} D_{xy}^{\beta_1} \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u) = 0$$

à l'exception du cas

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0.$$

On pourra donc écrire simplement

$$\Delta_i \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u) = \sum_j D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{sx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \Delta_j' \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

$$= \sum_j D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{sx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \Delta_j \cdot \chi_j(y, z, \ldots, u)$$

parce que $\Delta_j' \cdot \varphi_i$ est évidemment une fonction des seules $y, z, \ldots, u$. Le théorème reste ainsi démontré.

5. Théorème IV. *Une fonction entière impropre des n séries de variables n^{aires} $x, y, z, \ldots, u$ est toujours annulée par l'opération de Cayley*

$$\Omega = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Soit en effet

$$f(x, y, z, \ldots, u) = \sum \Delta_i \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

une fonction impropre des $x, y, z, \ldots, u$. On a (§ II):

$$(x\ y\ z \ldots u) \cdot \Omega f = H \cdot \sum_i \Delta_i \varphi_i(y, z, \ldots, u).$$

Mais les φ_i, ne contenant pas les variables x, seront évidemment annulées par l'opération H. Le second membre de la dernière égalité est donc nul et l'on a par conséquent:

$$\Omega f = 0$$

6. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant qui est d'une importance fondamentale pour notre théorie:

Théorème V. *Une fonction rationnelle entière $F(x, y, z, \ldots, u)$ des n séries de variables n^{aires} $x, y, z, \ldots, u$ qui soit exactement divisible par le déterminant des variables est toujours une fonction propre. En d'autres termes: il ne peut subsister un identité de la forme:*

$$(xyz\ldots u)\,.\,F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i f_i(y, z, \ldots, u)$$

que dans le cas évident où chaque membre est nul séparément.

Évidemment on peut toujours supposer que la fonction F soit homogène par rapport à chacune des n séries $x, y, z, \ldots, u$.

En nous bornant, pour mieux fixer les idées, à cinque séries de variables x, y, z, t, u, soient resp. l, m, n, r, s les degrés dans ces séries de la fonction F qui satisfait par hypothèse à une identité de la forme:

$$(a) \qquad (xyztu)\,.F(x, y, z, t, u) = \sum_i \Delta_i\,.\,f_i(y, z, t, u).$$

Nous considérerons toutes les fonctions dont le degré total est égal au degré total

$$k = l + m + n + r + s$$

de F et nous les rangerons d'après la règle suivante. Qu'on prenne au hasard deux fonctions quelconques Φ et Ψ; soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ les degrés de Ψ par rapport aux cinque séries, écrits dans l'ordre de leur valeur croissante, de sorte que l'on ait:

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \mu_4 \leqq \mu_5$$

et soient $\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3 \leqq \nu_4 \leqq \nu_5$ les degrés analogues pour Φ. Nous dirons alors que la fonction Ψ est *inférieure* à Φ si l'on ait: $\mu_1 < \nu_1$; ou si, étant $\mu_1 = \nu_1$, il soit $\mu_2 < \nu_2$; ou s'il on ait $\mu_1 = \nu_1$, $\mu_2 = \nu_2$, $\mu_3 = \nu_3$ et ainsi de suite.

Cela posé nous allons démontrer que, si une identité de la forme (a) est impossible pour toutes les fonctions Ψ inférieures à une certaine fonction Φ, elle sera de même impossible pour Φ.

Admettons en effet, s'il est possible, qu'on ait identiquement

$$(6) \qquad (xyztu)\,.\,\Phi(\overset{\lambda\ \mu\ \nu\ \varrho\ \sigma}{x\,y\,z\,t\,u}) = \sum_i \Delta_i\,.\,\varphi_i(y, z, t, u)$$

et supposons, ce qui est toujours permis, que l'on ait:

$$\lambda \leqq \mu \leqq \nu \leqq \varrho \leqq \sigma.$$

Si nous opérons sur les deux membres de cette identité avec l'opération élémentaire D_{xy}, nous en déduirons

$$(c) \qquad (xyztu)\,\{D_{xy}\Phi\} = \sum_i \Delta_i'\,\varphi_i(y, z, t, u)$$

où

$$\Delta_i' = D_{xy}\Delta_i$$

Cette identité est de la même forme de (b), la fonction Φ y étant remplacée par la fonction $D_{xy}\Phi$ qui lui est inférieure, parce que les

degrés de cette dernière fonction en x, y, z, t, u sont évidemment $\lambda - 1$, $\mu + 1, \nu, \varrho, \sigma$. On aura donc identiquement d'après notre hypothèse:

(d) $$D_{xy}\Phi = 0$$

Si l'on opère maintenant de la même manière sur l'identité (b) avec les operations élémentaires D_{yz}, D_{zt}, D_{tu} successivement, on en déduira par un raisonnement semblable

(e) $$D_{yz}\Phi = 0, \quad D_{zt}\Phi = 0, \quad D_{tu}\Phi = 0$$

car il est aisé de reconnaître que les fonctions $D_{yz}\Phi$, $D_{zt}\Phi$, $D_{tu}\Phi$ sont toutes inférieures à Φ.

En effectuant désormais sur l'identité (b) l'opération H qu'on peut mettre d'après un théorème démontré précédemment (§ II art 8) sous la forme:

$$H = \Delta_0 + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz} + \Delta_3 D_{zt} + \Delta_4 D_{tu}$$

où

$$\Delta_0 = D_{xx}(1 + D_{yy})(2 + D_{zz})(3 + D_{tt})(4 + D_{uu}),$$

et ayant égard aux identités (d) et (e) on obtient:

$$\Delta_0 \{(xyztu) \cdot \Phi\} = H \sum_i \Delta_i \varphi_i = 0.$$

Mais, l'opération H étant permutable (§ II, art. 6) aux Δ_i, on a

$$H \sum_i \Delta_i \varphi_i = \sum_i \Delta_i \, . \, H\varphi_i = 0$$

puisque l'opération H annule évidemment les fonctions φ_i qui ne contiennent pas les x. Il reste donc:

$$\Delta_0 \{xyztu) \, . \, \Phi\} = 0.$$

Mais on a évidemment, $\lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma$ étant les dégrés de Φ dans les cinque séries:

$$\Delta_0\{(xyztu) \, . \, \Phi\} = (\lambda+1)(\mu+2)(\nu+3)(\varrho+4)(\sigma+5) \, . \, (xyztu) \, . \, \Phi$$

où le facteur numérique est nécessairement différent de zéro. On doit donc avoir identiquement $\Phi = 0$ ainsi qu'il fallait démontrer.

7. Cela posé, le nombre des systèmes différents de degrés qui peuvent se présenter pour les fonctions inférieures à F et de degré total égal au degré total k de F est toujours limité, car les systèmes de nombres entiers et positifs $\lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma$ satisfaisant à l'égalité

$$\lambda + \mu + \nu + \varrho + \sigma = k$$

sont en nombre évidemment fini. Soit N le nombre de ces systèmes et soient

$$\begin{array}{c} \lambda_1, \ \mu_1, \ \nu_1, \ \varrho_1, \ \sigma_1, \\ \lambda_2, \ \mu_2, \ \nu_2, \ \varrho_2, \ \sigma_2, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \lambda_N, \ \mu_{N_1} \ \nu_N, \ \varrho_N, \ \sigma_N \end{array}$$

les systèmes eux-mêmes rangés dans l'ordre des fonctions dont il représentent les degrés, de sorte qu'une fonction des degrés:

$$\lambda_i,\ \mu_i,\ \nu_i,\ \varrho_i,\ \sigma_i$$

sera supérieure à une fonction des degrés

$$\lambda_{i+1},\ \mu_{i+1},\ \nu_{i+1},\ \varrho_{i+1},\ \sigma_{i+1}.$$

Le dernier système aura évidemment les valeurs

$$\text{(g)} \qquad \lambda_N = 0,\ \mu_N = 0,\ \nu_N = 0,\ \varrho_N = 0,\ \sigma_N = k.$$

Maintenant, si une identité de la forme (a) est impossible pour les fonctions F dont les systèmes des degrés soient:

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_{i+1}, & \mu_{i+1}, & \nu_{i+1}, & \varrho_{i+1}, & \sigma_{i+1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_N, & \mu_N, & \nu_N, & \varrho_N, & \sigma_N \end{array}$$

la démonstration donnée à l'art. préc. nous apprend qu'elle sera de même impossible pour une fonction F dont les degrés soient:

$$\lambda_i,\ \mu_i,\ \nu_i,\ \varrho_i,\ \sigma_i.$$

On voit donc que la démonstration de l'impossibilité d'une relation de la forme (a) est réduite à démontrer qu'une relation semblable est impossible pour une fonction F des degrés (g), c'est-à-dire pour une fonction d'une seule série de variables.

Mais si l'on avait p. ex. dans ce cas:

$$(xyztu)\,.\,F(u) = \sum_i \Delta_i f_i(y, z, t, u)$$

on pourrait opérer sur les deux membres avec l'opération H et l'on en déduirait comme à l'art. précédent:

$$H\{(xyztu)\,.\,F(u)\} = 0$$

ce qui revient encore à l'identité

$$F(u) = 0;$$

car, la fonction $F(u)$ ne contenant pas les variables x, y, z, t est annulée par les opérations élémentaires D_{xy}, D_{yz}, D_{zu}, D_{tu}. Notre théorème est donc complètement démontré.

8. Le même procédé qui nous a conduit à la démonstration du théorème précédent peut servir, sans modifications essentielles, à démontrer le théorème suivant:

Théorème VI. *Si $x, y, z, \ldots, u$ sont n séries de variables, n'importe de quelle espèce m, et H est l'opération:*

$$H = \sum_i (x_{i_1} y_{i_2} \ldots u_{i_n}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial y_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial u_{i_n}} \right)$$

il ne peut subsister aucune identité de la forme

$$(\alpha) \qquad H \,.\, F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i \,.\, f_i(y, z, \ldots, u)$$

sans que les deux membres soient nuls séparément.

On démontrera, comme ci-dessus, que si une identité de la forme (α) est impossible pour des fonctions F inférieures à une certaine fonction Φ, l'identité supposée

$$(\beta) \qquad H \,.\, \Phi\,(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i \,.\, \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

entraîne les identités

$$(\gamma) \qquad D_{xy}\Phi = 0,\ D_{yz}\Phi = 0, \ldots, D_{tu}\Phi = 0.$$

Si l'on opère alors sur l'identité (β) avec l'opération

$$H = \Delta_0 + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz} + \cdots$$

on obtiendra d'abord:

$$H \,.\, H \,.\, \Phi = 0.$$

Mais, en vertu des (γ), on a (§ II, art. 8):

$$H\Phi = \Delta_0\Phi, \quad H \,.\, H\Phi = \Delta_0 \,.\, \Delta_0\Phi.$$

On doit donc avoir

$$\Delta_0{}^2 \,.\, \Phi = 0$$

ou, ce qui est la même chose, $\Phi = 0$. Abstraction faite de ces petites modifications la démonstration reste donc la même des articles précédents.

§ IV.

Développement d'une fonction de n séries de variables suivant les puissances du déterminant des séries et les polaires de covariants qui contiennent seulement $n - 1$ séries.

1. En partant des théorèmes démontrés ci-dessus nous allons maintenant établir le théorème suivant.

Théorème I. *Une fonction rationnelle entière quelconque*

$$F(x, y, z, \ldots, u)$$

des n séries $x, y, z, \ldots, u$, d'espèce n, peut toujours s'exprimer sous la forme

$$F(x, y, z, \ldots, u) = (xyz\ldots u) \,.\, \Phi\,(x, y, z, \ldots, u) + \sum \Delta_i \,.\, f_i(y, z, \ldots, u)$$

où le second membre est la somme de deux fonctions rationnelles entières dont la première est exactement divisible par le déterminant $(x, y, z, \ldots, u)$ des variables, et dont la seconde est une fonction dérivable (par nos opérations) de fonctions $f_i(y, z, \ldots, u)$ qui contiennent seulement les séries $y, z, \ldots, u$.

Une fonction quelconque F pouvant toujours s'écrire sous la forme

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_h$$

où les termes d'une même fonction F_i sont tous du même degré par rapport à chacune des séries $x, y, z, \ldots, u$ et du même *poids* par rapport à chacun des indices $1, 2, \ldots n$, qui affectent les variables, il nous sera évidemment suffisant de démontrer le théorème pour une fonction quelconque qui jouit de cette propriété.

Nous supposerons donc que tous les termes de F soient des degrés $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et des poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de sorte que l'on ait:

$$(1) \qquad F = \sum_i A_i \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \ldots y_n^{\beta_n} \ldots u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_n^{\lambda_n}$$

les A_i étant des coefficients constants et les exposant satisfaisant pour chaque terme de F aux conditions:

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = q_1, & \alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \lambda_1 = p_1, \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = q_2, & \alpha_2 + \beta_2 + \cdots + \lambda_2 = p_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = q_n, & \alpha_n + \beta_n + \cdots + \lambda_n = p_n. \end{array}$$

Le nombre M des termes

$$(3) \qquad E_1, E_2, \ldots, E_M,$$

qui peuvent se trouver en F, sera donné par

$$M = \psi(p_1, p_2, \ldots, p_n; \; q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

en désignant par ψ la fonction arithmétique qui exprime combien il y a de systèmes de solutions pour les (2).

Parmi les fonctions des mêmes degrés et poids que F il y en a évidemment

$$M_1 = \psi(p_1 - 1, \; p_2 - 1, \ldots, p_n - 1; \; q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots, q_n - 1)$$

qui sont exactement divisibles par le déterminant $(x\,y\,z \ldots u)$ et entre lesquelles il ne peut subsister aucune relation linéaire à coefficients constants. Mais ces dernières fonctions sont linéairement indépendantes des fonctions *impropres* c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$\sum \Delta_i f(y, z, \ldots, u)$$

ainsi que nous l'avons démontré (§ III, art. 6). Il suffira donc pour démontrer le théorème énoncé ci-dessus de démontrer qu'il y a au moins $M - M_1$ fonctions impropres des mêmes degrés et poids que F, entre lesquelles il n'ait lieu aucune relation linéaire à coefficients constants.

2. Désignons respectivement par

$$\begin{array}{c} D_{11}, D_{12}, \ldots, D_{1n}, \\ D_{21}, D_{22}, \ldots, D_{2n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{n1}, D_{n2}, \ldots, D_{nn} \end{array}$$

les opérations qui occupent la place correspondante dans le tableau

$$\begin{array}{c} 1\ , D_{xy}, D_{xz}, \ldots, D_{xu}, \\ D_{yx}, \ 1\ , D_{yz}, \ldots, D_{yu}, \\ D_{zx}, D_{zy}, \ 1\ , \ldots, D_{zu}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{ux}, D_{uy}, D_{uz}, \ldots, \ 1 \end{array}$$

et rappelons nous (§ I, art. 11) que les différents termes (3) peuvent tous se déduire du terme

$$E_0 = x_1^{p_1} y_2^{p_2} \ldots u_n^{p_n}$$

au moyen d'opérations. Et, plus précisément, si l'on indique par $\Delta_2, \Delta_2, \ldots, \Delta_M$ les M opérations de la forme

$$(4)\quad \Delta_i = D_{nn}^{\lambda_n} \ldots D_{n2}^{\beta_n} D_{n1}^{\alpha_n} \ldots D_{2n}^{\lambda_2} \ldots D_{22}^{\beta_2} D_{21}^{\alpha_2} D_{1n}^{\lambda_1} \ldots D_{12}^{\beta_1} D_{11}^{\alpha_1},$$

où les exposants satisfont aux mêmes conditions (2) considérées ci-dessus, nous savons que les termes (3) s'expriment en fonction linéaire à coefficients constants de

$$(5)\qquad \Delta_1 E_0, \ \Delta_2 E_0, \ldots, \Delta_M E_0$$

et réciproquement.

Nous savons de plus (§ I, art. 14) que l'on peut substituer au système (5) le système

$$(6)\qquad \Delta_1' E_0, \ \Delta_2' E_0, \ldots, \Delta_M' E_0$$

où Δ_i' diffère de Δ_i par une permutation arbitraire des facteurs élémentaires D_{pq} qui la composent.

Maintenant nous nous servirons de ce principe pour permuter, de la manière qu'on va expliquer, l'ordre des facteurs des opérations Δ_i dont les exposants (4) satisfont à l'une *au moins* des équations:

$$(7)\qquad \alpha_1 = 0, \ \beta_2 = 0, \ \gamma_3 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Dans ces opérations il y aura, évidemment un produit de la forme

$$(8)\qquad D_{i1}^{\Theta_1} D_{i2}^{\Theta_2} \ldots D_{i,i-1}^{\Theta_{i-1}} D_{i,i+1}^{\Theta_{i+1}} \ldots D_{i,n}^{\Theta_n}$$

avec la condition

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{i-1} + \Theta_{i+1} + \cdots + \Theta_n = p_i,$$

et, si l'on prend pour Δ_i' ce que devient Δ_i quand on y permute

les facteurs de manière que les premiers facteurs à droite soient précisement les (8), il est clair que la fonction

$$\Delta_i' E_0$$

sera *impropre*, puisque la fonction

$$D_{i,1}^{\theta_1} \dots D_{i,i-1}^{\theta_{i-1}} D_{i,i+1}^{\theta_{i+1}} \dots D_{i,n}^{\theta_n} \cdot E_0$$

ne contient plus l'$i^{ème}$ des séries de variables $x, y, \dots, v$.

Après cela, il y aura, parmi les M fonctions (6), du moins autant de fonctions impropres qu'il y a de solutions des systèmes (2) satisfaisant aussi à l'une au moins des conditions (7). En désignant par ρ ce dernier nombre et en écartant les ρ systèmes de cette espèce, les $M - \rho$ solutions des systèmes (2) qui restent satisfairont aux conditions:

$$\alpha_1 \lesseqgtr 1, \ \beta_2 \lesseqgtr 1, \ \gamma_3 \lesseqgtr 1, \dots, \lambda_n \lesseqgtr 1.$$

Mais alors, si l'on pose

$$\alpha_1 - 1 = \alpha_1', \ \beta_2 - 1 = \beta_2', \dots, \lambda_n - 1 = \lambda_n'$$

et si l'on diminue d'une unité, dans chacun des systèmes qui étaient restés, les n nombres $\alpha_1, \beta_2, \dots, \lambda_n$, on en déduira un nouveau système qui satisfait aux conditions:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1' + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = q_1 - 1, \quad && \alpha_1' + \beta_1 + \dots + \lambda_1 = p_1 - 1,\\
&\beta_1 + \beta_2' + \dots + \beta_n = q_2 - 1, \quad && \alpha_2 + \beta_2' + \dots + \lambda_2 = q_1 - 1,\\
&\dots\dots\dots

4. Corollaire B. *Le nombre des fonctions impropres linéairement indépendantes* $F(x, y, z, \ldots, u)$, *homogènes et resp. des degrés* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *dans les séries* $x, y, \ldots, u$ *et resp. homogènes et des degrés* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *dans les indices* $1, 2, \ldots, n$ *qui affectent les variables, est donné précisément par la différence*

$$\psi(p_1, p_2, \ldots, p_n;\ q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$-\psi(p_1-1, p_2-1, \ldots, p_n-1;\ q_1-1, q_2-1, \ldots, q_n-1).$$

Désignons en effet comme ci-dessus cette différence par $M - M_1$. Nous avons démontré que parmi les M fonctions de ces degrés et poids, il y en a au moins $M - M_1$ impropres qui sont linéairement indépendantes. S'il y en avait de plus, il s'ensuivrait évidemment que l'une au moins des M_1 fonctions linéairement indépendantes du type $(xyz \ldots u)$. Φ pourrait s'exprimer linéairement par les autres fonctions du même type et par des fonctions impropres ce qui contredirait à un théorème démontré précédemment (§ III, art. 6).

5. Théorème II. *La représentation de* $F(x, y, \ldots, u)$ *sous la forme:*

$$\sum_{\mu} (x\,y \ldots u)^{\mu} \cdot \Phi_{\mu}$$

les Φ_{μ} *étant des fonctions impropres ne peut se faire que d'une seule manière.*

Si l'on avait en effet:

$$(a)\quad \Phi_0 + (xy \cdots u)\Phi_1 + (xy \cdots u)^2\Phi_2 + \cdots = \Phi_0' + (xy \cdots u)\Phi_1' + (xy \ldots u)^2\Phi_2' + \cdots,$$

on en déduirait

$$\Phi_0' - \Phi_0 = (xy \cdots u)\{\Phi_1 - \Phi_1') + \cdots\}$$

et l'on devrait avoir par conséquent (§ III, art. 6):

$$\Phi_0' - \Phi_0 = 0$$

car le premier membre est une fonction impropre et le second membre est exactement divisible par le déterminant $(x\,y \ldots u)$. L'identité (a) se réduirait donc à la suivante

$$\Phi_1 + (xg \ldots u)\Phi_2 + \cdots = \Phi_1' + (xy \cdots u)\Phi_2' + \cdots$$

et l'on démontrerait analoguement que $\Phi_1 = \Phi_1'$ et ainsi de suite.

6. Les M_1 fonctions impropres dont nous avons donné la construction à l'art. 2 étaient toutes de la forme

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot E_0$$

où $\Delta_2 E_0$ ne contient que $n - 1$ séries. En prenant donc pour F la fonction monoterme E_0 on aura une identité de la forme:

$$E_0 = (x\,y\,z\,\ldots\,u)\,.\,\Phi + \sum_i \Delta_i'\,.\,f_i(y, z, \ldots, u)$$

où

$$f_i(y, z, \ldots, u) = \Delta_i E_0.$$

D'autre coté, Φ étant une fonction rationnelle entière des degrés $q_1 - 1, \ldots, q_n - 1$ et des poids $p_1 - 1, \ldots, p_n - 1$, on a (§ I, art. 11):

$$\Phi = \Delta E_1$$

en prenant

$$E_1 = x_1^{p_1-1}\, y_2^{p_2-1} \ldots u_n^{p_n-1}$$

où, ce qui est la même chose à moins d'un facteur numérique:

$$E_1 = \Omega\,.\,E_0.$$

Nous pouvons donc écrire:

$$(9) \qquad E_0 = \Delta\,.\,H\,.\,E_0 + \sum_i \Delta_i'\,.\,f_i(y, z, \ldots, u), \quad f_i = \Delta_i E_0.$$

Mais, si l'on a une identité de la forme:

$$F(x_1, x_2, \ldots;\ y_1, y_2; \ldots; \ldots) = \Delta\,.\,F_1(x_1, x_2, \ldots;\ y_1, y_2, \ldots; \ldots)$$

il est aisé de reconnaître que l'on a aussi:

$$F(a_x, b_x, \ldots;\ a_y, b_y, \ldots; \ldots) = \Delta\,.\,F_1(a_x, a_y, \ldots;\ b_x, b_y, \ldots; \ldots)$$

où

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$
$$b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n, \ \cdots$$

les $a, b, c, \ldots$ étant des constantes arbitraires. On peut donc tirer de l'identité (9) la suivante:

$$F = a_x^{p_1}\, b_y^{p_2}\, c_z^{p_3} \ldots e_u^{p_n} = \Delta H\,.\,F + \sum_i \Delta_i' f_i(y, z, \ldots, u), \quad f_i = \Delta_i F.$$

Maintenant il suffit de remarquer que les opérations Δ, H, Δ_i', Δ_i sont indépendantes des $a, b, c, \ldots$ pour reconnaître que cette identité aura lieu pour une fonction rationnelle entière quelconque $F(x, y, \ldots, u)$ resp. homogène et des degrés $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par rapport à chaque série, car

$$a_x^{p_1}\, b_y^{p_2} \ldots e_u^{p_n}$$

est précisément l'expression symbolique d'une fonction générale de ces degrés. Si nous remettons à la place de H son expression en Ω, nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Si $F(x, y, \ldots, u)$ est une forme algébrique générale de certains degrés par rapport à chaque série $x, y, \ldots, u$, on a une identité de la forme:*

$$(10) \quad F(x, y, \ldots, u) = (x y \ldots u)\,.\,\Phi(x, y, \ldots, u) + \sum \Delta_i'\,.\,f_i(y, z, \ldots, u)$$

où

$$\Phi = \Delta \,.\, \Omega F \quad \text{et} \quad f_i = \Delta_i F \tag{11}$$

Ω *étant l'opération de Cayley et les* Δ *des aggrégats des opérations élémentaires* D_{xy}, D_{yz}, D_{zs}, ... *Cette identité a lieu indépendamment des valeurs des coefficients de* F *qui restent absolument arbitraires. En d'autres termes les opérations* Δ, Δ_i, Δ_i' *dépendent seulement des degrés de* F *par rapport aux différentes séries.*

7. La forme donnée dans ce théorème aux fonctions Φ et f_i nous dit qu'elles sont des *covariants* de la forme F. Quant aux f_i on voit aisément, d'après un théorème précédent (§ III, art. 2) qu'on peut toujours les déterminer de la manière plus simple en prenant:

$$f_i = D_{xy}^{\alpha_i} D_{xz}^{\beta_i} \ldots D_{xu}^{\lambda_i} \,.\, F$$

$\alpha_i, \beta_i, \ldots, \lambda_i$ étant un système quelconque de nombres entiers et positifs qui satisfont à la condition

$$\alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i = p_1 .$$

En appliquant la formule (10) p_1 fois successivement on obtient donc, d'après cette remarque, le théorème suivant:

Théorème IV. *Si* $F(x, y, \ldots, u)$ *est une forme algébrique générale des* n *séries d'espèce* n, *de degré* p *par rapport à la série* x, *et de certains degrés donnés par rapport aux autres séries, on a toujours une identité de la forme:*

$$F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_{\mu, i} (xy \ldots u)^{\mu} \,.\, \Delta_i \,.\, \varphi_i(y, z, \ldots, u) \tag{12}$$

où

$$\varphi_i(y, z, \ldots, u) = D_{xy}^{\alpha_i} D_{xz}^{\beta_i} \ldots D_{xu}^{\lambda_i} \,.\, \Omega^{\mu} \,.\, F \tag{13}$$

le signe $\sum$ *s'étendant à tout les systèmes de valeurs des* n *nombres entiers et positifs* $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \lambda_i, \mu$ *qui satisfont à la condition:*

$$\alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i + \mu = p.$$

L'opération Δ_i *qui corresponde à chaque fonction* f_i *ne dépend nullement des coefficients de* F *mais seulement de ses degrés.**)

8. Corollaire A. *Une forme algébrique* F *de* n *séries* $x, y, \ldots, u$ *d'espèce* n, *de degré* p *par rapport à une série* x, *est toujours équivalente au système des* $\binom{n+p-1}{p}$ *formes algébriques:*

$$D_{xy}^{\alpha} D_{xz}^{\beta} \ldots D_{xu}^{\lambda} \Omega^{\mu} \,.\, F$$

où

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu = p.$$

*) Dans le cas de deux seules séries binaires x, y la formule (12) coincide avec une formule bien connue de Clebsch et Gordan. Voir: Clebsch *Theorie der bin. alg. Formen* 1872. pag. 15, ou bien: Kerschensteiner: *Gordan's Vorlesungen* 1887. pag. 81.

Ces formes ne contiennent plus que les $n-1$ *séries* $y, z, \ldots, u$ *et sont des covariants de* F.

Il suit, en effet, des formules (12) et (13) que tout invariant ou covariant de F est un invariant ou covariant du système des φ_i et réciproquement.

9. Corollaire B. *Si une forme algébrique* F *des* n *séries* $x, y, z, \ldots, u$ *d'espèce* n *est annulée par chacune des* $n-1$ *opérations élémentaires:*

$$D_{xy},\ D_{xz},\ \ldots,\ D_{xu},$$

elle se réduit au produit d'une puissance du déterminant $(x\,y\,z\ldots u)$ *par une forme algébrique qui contient seulement les séries* $y, z, \ldots, u$, *et réciproquement.*

La formule (12) devient en effet dans cette hypothèse

$$F(x, y, z, \ldots, u) = (x\,y\,z\ldots u)^p \cdot \Delta_p \cdot \varphi_p(y, z, \ldots, u)$$

où la fonction $\Delta_p \cdot \varphi_p(y, z, \ldots, u)$ ne peut contenir les x, p étant le degré de F par rapport aux x. La proposition réciproque est évidente.

§ V.

Extension au cas de fonctions analytiques quelconques.

1. L'extension de notre développement (§ IV, art. 3):

$$F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_{\mu, i} (xyz\ldots u)^\mu \cdot \Delta_i f_i(y, z, \ldots, u)$$

au cas où F n'est pas une fonction rationnelle entière mais une fonction *analytique**) quelconque des n séries $x, y, z, \ldots, u$, se presente de la manière la plus naturelle si l'on substitue à la définition que nous avons donné de fonction *impropre*, c'est-à-dire d'être dérivable, par nos opérations Δ, de fonctions d'un nombre plus petit de séries, la propriété absolument équivalente d'être annulée par l'opération Ω.

Nous avons démontré en effet (§ III, art. 5) qu'une fonction impropre est toujours annulée par cette opération. D'autre côté les formules (10) et (11) du § préc. nous montrent évidemment que, si une fonction F est annulée par l'opération Ω, elle se réduit à la forme

$$\sum \Delta_i f_i(y, z, \ldots, u)$$

c'est-à-dire qu'elle est nécessairement une fonction impropre. Donc: *pour qu'une fonction rationnelle entière de* u *séries soit dérivable de fonctions de* $n-1$ *séries, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit annulée par l'opération* Ω.**)

---

*) Dans les sens bien connu de M. Weierstrass.

**) Si l'*espèce* des séries est supérieure au nombre n des séries, on peut dire

De ce point de vue la généralisation du premier théorème (§ IV, art. 1) est donnée par le théorème suivant.

2. *Soit* $F(x, y, \ldots, u)$ *une fonction analytique quelconque des variables* $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; \ldots; u_1, \ldots, u_n$, *monodrôme et continue pour toutes les valeurs des variables dont le modul est égal où inférieur à un certain nombre positif* ρ. *On a alors identiquement*

(1) $F(x, y, \ldots, u) = \Psi(x, y, \ldots, u) + (xy \ldots u) \cdot \Phi(x, y, \ldots, u)$

les deux fonctions Φ *et* Ψ *étant monodrômes et continues pour les mêmes valeurs des variables et la première satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles*

$$(2) \qquad \sum \pm \frac{\partial^n \Psi}{\partial x_1 \partial y_2 \cdots \partial u_n} = 0.$$

D'après l'hypothèse on peut toujours représenter la fonction $F(x, y, \ldots, u)$ par une série ordonnée suivant les puissances entières et positives des variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, \ldots$

$$(3) \qquad P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$$

en désignant par une lettre unique P_i l'ensemble de tous les termes de la série qui sont de même degré total par rapport aux variables. Cette série sera convergente pour toutes les valeurs des variables dont les moduls sont égals ou inférieurs à ρ.

P_i étant une fonction rationnelle entière des variables, on peut poser d'après le § IV:

$$P_i = \psi_i + (xy \ldots u) \cdot \varphi_i$$

ψ_i et φ_i étant aussi deux fonctions rationnelles entières dont la première satisfait à l'équation (2):

$$\Omega \psi_i = 0.$$

Maintenant je dis que la série

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots$$

qu'on peut évidemment considérer comme une série ordonnée suivant les puissances des variables, est convergente pour toutes les valeurs des variables dont les moduls ne surpassent pas ρ. Nous avons en effet

$$F = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \psi_i + (x\, y \cdots u) \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i \right\}$$

d'où

$$F' = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \psi_i'$$

---

qu'il est nécessaire et suffisant que F soit annulée par l'opération H (dont l'expression est indépendente de l'espèce des séries. cfr. § II, art. 5).

en désignant par F', ψ_i' ce que deviennent F, ψ_i quand on y substitue pour toutes les variables le nombre ρ. F' ayant par supposition une valeur finie, on voit que la série

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots$$

est convergente pour $x_1 = x_2 = \cdots = \rho$. D'après un théorème bien connu elle sera donc convergente pour toutes les valeurs des variables dont les modules ne surpassent pas ρ, et l'on aura pour toutes ces valeurs

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots$$

Ψ étant une fonction monodrôme et continue. Le reste de la démonstration ne présente désormais de difficulté.

3. *L'expression d'une fonction analytique* $F(x, y, \ldots, u)$ *sous la forme* (1) *considérée au théorème précédent ne peut s'effectuer que d'une seule manière.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on déduirait évidemment de deux expressions supposées possibles une identité de la forme:

$$f(x, y, \ldots, u) = (xy \ldots u) \cdot \varphi(x, y, \ldots, u) \tag{3}$$

f et φ étant deux fonctions analytiques continues aux environs des valeurs nulles des variables, dont la première f satisferait à l'équation aux dérivées partielles

$$\Omega f = 0, \tag{4}$$

et les deux membres de (2) ne seraient pas nuls séparément.

Cela supposé, soient

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots$$

les développements de f et φ suivant les puissances des variables, f_i et φ_i désignant l'ensemble de tous les termes de même degré total i dans toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, \ldots$. De la condition (4)

$$\Omega f = \Omega f_0 + \Omega f_1 + \Omega f_2 + \cdots = 0$$

on déduit évidemment

$$\Omega f_i = 0. \tag{5}$$

D'autre côté l'identité (3) nous donne évidemment les identités

$$f_i = (xy \ldots u) \cdot \varphi_{i-1}.$$

Mais, les f_i et φ_{i-1} étant deux fonctions rationnelles entières dont la première satisfait à la condition (5), cette identité ne peut avoir lieu (§ III, art. 6) que dans le cas où:

$$f_i = 0, \quad \varphi_{i-1} = 0.$$

On aurait donc identiquement

$$f = 0, \quad \varphi = 0$$

contrairement à ce qui a été supposé.

4. Nous n'insisterons ici pas davantage sur l'étude complète du développement des fonctions analytiques de plusieurs séries. Il nous semble même superflu d'énoncer le théorème plus générale qu'on déduit du théorème précédent dans le cas où la fonction analytique F serait donnée aux environs de certaines valeurs $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ des variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ pour lesquelles elle est continue. Il suffit à cet objet d'appliquer le théorème démontré à la fonction F considérée comme fonction des nouvelles variables $x_1', x_2', \ldots, y_1', y_2', \ldots$ liées aux précédentes par des substitutions linéaires qui changent leurs valeurs nulles dans les valeurs $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$.

Naples, avril 1890.

Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In meiner Abhandlung*): „Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern" — habe ich u. a. besonders den Satz urgirt**), dass die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(1) \qquad c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho} = \frac{d_\nu}{M_\nu^\varrho} \quad (\text{wo } M_{\nu+1} \geqq M_\nu, \quad M_\infty = \infty)$$

für jedes noch so kleine positive ϱ *convergirt*, während der Ausdruck:

$$(2) \qquad d_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

das allgemeine Glied einer *divergenten* Reihe bildet; und ich habe darauf hingewiesen, dass dieser Satz mir als der eigentliche Schlüssel zum tieferen Verständnisse der gesammten Convergenztheorie für Reihen mit positiven Gliedern erscheint. Denn in der That lassen sich daraus nicht nur alle bekannten Convergenzkriterien herleiten und erheblich verallgemeinern, sondern er liefert auch die Möglichkeit, den wahren inneren Zusammenhang zwischen den sogenannten Kriterien erster und zweiter Art einzusehen und namentlich das in seiner merkwürdigen Allgemeinheit bisher völlig isolirt erscheinende *Kummer'sche Convergenzkriterium* als natürliches Glied einer consequenten allgemeinen Convergenztheorie zu erkennen.

Weitere Untersuchungen über unendliche Reihen haben mir nun gezeigt, dass die Bedeutung des obigen Satzes damit noch keineswegs erschöpft ist, dass sich dieselbe vielmehr auch auf die Theorie gewisser, im allgemeinen nur *bedingt convergirender* Reihen, nämlich der sogenannten Dirichlet'schen erstreckt. Dabei sollen — nach

*) Math. Ann. Bd. XXXV, p. 297 ff.

**) a. a. O. p. 329.

dem Vorgange des Herrn Dedekind*) — unter letzterer Bezeichnung Reihen von der Form:

$$\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$$

verstanden werden, wo die M_ν wiederum positive, mit ν niemals abnehmende Grössen mit dem Grenzwerthe ∞ bedeuten, während die a_ν ganz beliebige reelle oder complexe Grössen vorstellen. Die beiden Hauptaufgaben, zu deren Behandlung diese Reihen Anlass bieten, nämlich:

1) Hinreichende Bedingungen anzugeben, unter welchen dieselben für $\varrho > 0$ convergiren bezw. divergiren;
2) Die Grenzwerthe ihrer Summen für $\varrho = 0$ zu untersuchen —

lassen sich auf Grundlage des obigen Satzes und auch im übrigen völlig elementar in weiterem Umfange lösen, als dies bisher auf minder einfachem Wege, nämlich mit Hülfe der Integralrechnung geschehen ist.

§ 1.

Ein allgemeines Kriterium für die Convergenz und Divergenz der Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$.

Ersetzt man in dem Ausdrucke (1) M_ν durch M_ν^q, wo q *beliebig positiv* sein soll, und schreibt im Nenner statt des Exponenten $q\varrho$, welcher ja an die einzige Bedingung gebunden ist, wesentlich positiv zu sein, wieder ϱ, so folgt, dass auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{M_{\nu+1}^q - M_\nu^q}{M_{\nu+1}^q M_\nu^\varrho}$$

für $\varrho > 0$ stets *convergirt.*

Zerlegt man sodann ϱ irgendwie in zwei wesentlich positive Bestandtheile $\varrho_1 + \varrho_2$ und beachtet, dass für jedes endliche, wenn auch noch so grosse positive p:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lg^p M_n}{M_n^{\varrho_2}} = 0$$

ist, so ergiebt sich, dass auch der Ausdruck:

$$(3) \qquad \frac{M_{\nu+1}^q - M_\nu^q}{M_{\nu+1}^q M_\nu^\varrho} \cdot \lg^p M_\nu \quad (q > 0,\ \varrho > 0,\ p < \infty)$$

das allgemeine Glied einer *convergenten* Reihe bildet.

---

*) Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet, p. 379.

Ich führe nun die Bezeichnungen ein:

$$A_n^{(\varkappa)} = \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu M_\nu^\varkappa, \quad A^{(\varkappa)} = A_\infty^{(\varkappa)} = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu M_\nu^\varkappa,$$

wo $\varkappa$ eine beliebige positive oder negative Zahl einschliesslich der Null bedeutet; dabei soll in dem letzteren Falle statt $A_n^{(0)}$, $A^{(0)}$ etwas kürzer A_n, A geschrieben werden.

Dies vorausgeschickt, handelt es sich zunächst darum, die Convergenz bezw. Divergenz der Reihe

$$A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu M_\nu^{-\varrho}$$

für $\varrho > 0$ zu untersuchen.

In Folge der für jedes beliebige σ geltenden Identität:

$$a_\nu M_\nu^{-\varrho} = (a_\nu M_\nu^\sigma) \,.\, M_\nu^{-(\varrho+\sigma)}$$

ergiebt sich durch partielle Summation:

$$(4) \qquad A_n^{(-\varrho)} = \sum_0^{n-1}{}_\nu\, A_\nu^{(\sigma)} \left\{ M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)} \right\} + A_n^{(\sigma)} M_n^{-(\varrho+\sigma)},$$

oder anders geschrieben:

$$(5) \quad A_n^{(-\varrho)} = \sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varepsilon(\varrho+\sigma)} \lg^p M_\nu} \left\{ \frac{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma} - M_\nu^{\varrho+\sigma}}{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma} M_\nu^{(1-\varepsilon)\varrho}} \lg^p M_\nu \right\} + \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}}.$$

Alsdann zeigt die Vergleichung mit dem Ausdrucke (3), dass der eingeklammerte Factor unter dem Summationszeichen das allg. Glied einer *convergenten* Reihe bildet, wenn über die bisher völlig willkürlichen Zahlen σ und ε derartig verfügt wird, dass:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho + \sigma > 0 & \text{also:} \quad \sigma > -\varrho, \\ 1 - \varepsilon > 0 & \text{—} \quad \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Daher wird die fragliche Summe für $n = \infty$ convergiren, sobald der andere Factor, nämlich:

$$\frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varepsilon(\varrho+\sigma)} \lg^p M_\nu}$$

stets unter einer endlichen Grenze bleibt. Da unter dieser letzteren Voraussetzung das abgesonderte Glied des Ausdruckes (5):

$$\frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}} = \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varepsilon(\varrho+\sigma)} \lg^p M_n} \cdot \frac{\lg^p M_n}{M_n^{(1-\varepsilon)\varrho}}$$

für $n = \infty$ offenbar verschwindet, so folgt zugleich aus Gl. (4), dass

$$(7) \qquad A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \sum_0^\infty{}_\nu\, A_\nu^{(\sigma)} \left\{ M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)} \right\}$$

wird, wobei die rechts stehende Reihe *unbedingt* convergirt.

Um auch ein *Divergens*kriterium für die betreffende Reihe zu gewinnen, setze man Gl. (4) in die Form:

$$(8) \qquad A_n^{(-\varrho)} = \sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varrho+\sigma}} \cdot \frac{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma} - M_\nu^{\varrho+\sigma}}{M_{\nu+1}^{\varrho+\sigma}} + \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}}$$

und man erkennt unter Beachtung des Ausdruckes (2), dass diese Summe für $n = \infty$ divergent wird, wenn:

$$\frac{A_\nu^{(\sigma)}}{M_\nu^{\varrho+\sigma}}$$

stets von Null verschieden ist.

Durch Zusammenfassung dieser Resultate ergiebt sich der folgende Satz:

(I) *Die Reihe* $A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ *convergirt für ein bestimmtes positives* ϱ *in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung, also zum mindesten bedingt, und ihre Summe ist gleich derjenigen der unbedingt convergirenden Reihe:*

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, A_\nu^{(\sigma)} \left\{ M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)} \right\},$$

wenn für:

$$\sigma > -\varrho, \quad \varepsilon < 1, \quad p < \infty$$

der Ausdruck:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varepsilon\varrho+\sigma} \lg^p M_n}$$

nicht unendlich wird.

Die Reihe divergirt, wenn:

$$\lim \frac{A_n^{(\sigma)}}{M_n^{\varrho+\sigma}}$$

nicht Null wird.

Dieses wegen der grossen Willkürlichkeit der mit ϱ, σ, ε, p bezeichneten Grössen ausserordentlich allgemeine Kriterium nimmt verschiedene einfachere und darum in vielen Fällen brauchbarere Formen an, wenn man diese Grössen in geeigneter Weise specialisirt. Insbesondere erhält man offenbar ein von ϱ unabhängiges und daher für *jedes* noch so kleine positive ϱ geltendes *Convergens*kriterium,

falls man $\varepsilon = 0$ annimmt und demgemäss die Bedingung $\sigma > -\varrho$ durch $\sigma > 0$ ersetzt, also:

(Ia) *Die Reihe* $A^{(-\varrho)} = \sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ *convergirt für jedes positive* ϱ, *und man hat:*

$$A^{(-\varrho)} = \sum_0^\infty A_\nu^{(\sigma)} \left\{ M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)} \right\},$$

wenn für irgend ein positives σ:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n^{(\sigma)}|}{M_n^\sigma \lg^p M_n} < \infty$$

ist.

Und diese Convergenzbedingung geht durch die specielle Wahl $\sigma = 0$ über in:

(Ib)
$$\lim_{n=\infty} \frac{\left| \sum_0^n{}_\nu a_\nu \right|}{\lg^p M_n} < \infty,$$

wobei dann zugleich

$$\sum a_\nu M_\nu^\varrho = \sum A_\nu \left\{ M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho} \right\}$$

*wird.**)

Nimmt man in (I) $\sigma = 1$, $\sigma = 0$, so folgt:

(Ic) *Die Reihe* $A^{(-1)} = \sum a_\nu M_\nu^{-1}$ *ist convergent und man hat:*

$$\sum a_\nu M_\nu^{-1} = \sum A_\nu \left\{ M_\nu^{-1} - M_{\nu+1}^{-1} \right\},$$

wenn für $\varepsilon < 1$, $p < \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n^\varepsilon \lg^p M_n} < \infty.$$

ist; sie divergirt, falls:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n} > 0.$$

---

*) Setzt man in (Ia) $a_\nu = 1$, so folgt:

Wenn $\sum M_\nu^{-\varrho}$ *nicht für jedes noch so kleine positive* ϱ *convergirt, so kann*

$$\lim \frac{\sum_0^n{}_\nu M_\nu^\sigma}{M_n^\sigma \lg^p M_n}$$

für keinen Werth $\sigma > 0$ *und* $p < \infty$ *einen endlichen Grenzwerth besitzen.*

Ersetzt man ferner in (I) a_ν durch $a_\nu M_\nu^{-\sigma}$, so verwandelt sich offenbar $A_\nu^{(\sigma)}$ in A_ν, und es geht daher das betreffende *Con*vergenzkriterium*) in das folgende über:

(II) *Die Reihe* $A^{(-\varrho-\sigma)} = \sum a_\nu M_\nu^{-(\varrho+\sigma)}$ *convergirt für* $\varrho > 0$. $\sigma > -\varrho$, *und man hat:*

$$A^{(-\varrho-\sigma)} = \sum A_\nu \{M_\nu^{-(\varrho+\sigma)} - M_{\nu+1}^{-(\varrho+\sigma)}\},$$

wenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n^{\varepsilon\varrho+\sigma} \lg^p M_n} < \infty \quad \textit{für:} \quad \varepsilon < 1, \; p < \infty.$$

Und hieraus speciell für $\sigma = 1$, $\varepsilon = 0$:

(IIa) *Die Reihe* $A^{(-1-\varrho)} = \sum a_\nu M_\nu^{-(1+\varrho)}$ *convergirt für jedes positive* ϱ, *und man hat:*

$$A^{(-1-\varrho)} = \sum A_\nu \{M_\nu^{-(1+\varrho)} - M_{\nu+1}^{-(1+\varrho)}\},$$

wenn für $\varepsilon < 1$, $p < \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|A_n|}{M_n \lg^p M_n} < \infty$$

ist. —

Von den hier angeführten Sätzen hat Herr Dedekind das Convergenzkriterium (Ia) für $p = 0$ und (Ib) für $p = 1$ mit Hülfe von bestimmten Integralen abgeleitet**). Ferner geht (IIa) für $M_\nu = \nu$, $p = 0$ in einen von Herrn Hölder ***) bewiesenen specielleren Satz über.

§ 2.

Ueber den Grenzwerth des Ausdruckes $A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma}$ für $n = \infty$.

Die Willkürlichkeit des Exponenten σ in den Kriterien (I) und (Ia) des vorigen Paragraphen lässt vermuthen, dass der dort auftretende Grenzwerth $A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = M_n^{-\sigma} \sum_0^n a_\nu M_\nu^\sigma$ $(n = \infty)$ im Wesentlichen von σ unabhängig ist. In dieser Hinsicht gilt nun der folgende Satz†):

---

*) Für das Divergenzkriterium liefert diese Substitution offenbar nichts Neues.

**) a. a. O. Supplement IX, § 144.

***) Math. Ann. Bd. XX, p. 545.

†) cf. Dedekind, a. a. O.

Lehrsatz I. *Bleibt* $\lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma}$ *für irgend einen positiven Werth* $\sigma = s$ *unter einer endlichen Grenze, so gilt das Gleiche für jeden positiven Werth* σ; *und — dem Falle* $\sigma = 0$ *entsprechend — bleibt* $\lim \frac{A_n}{\lg M_n}$ *unter einer endlichen Grenze.*

Beweis. Es ist:

$$A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-s} \sum_0^n a_\nu M_\nu^s = M_n^{-\sigma} \sum_0^n a_\nu M_\nu^s M_n^{\sigma-s},$$

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = M_n^{-\sigma} \sum_0^n a_\nu M_\nu^\sigma = M_n^{-\sigma} \sum_0^n a_\nu M_\nu^s M_\nu^{\sigma-s}$$

und daher:

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-\sigma} \sum_0^n a_\nu M_\nu^s (M_\nu^{\sigma-s} - M_n^{\sigma-s}),$$

woraus durch partielle Summation:

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-\sigma} \sum_0^{n-1} A_\nu^{(s)} (M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s}). \tag{9}$$

Hierbei verschwinden rechts diejenigen Glieder, für welche $M_{\nu+1} = M_\nu$ ist. Die übrig bleibenden transformirt man mit Hülfe der Identität:

$$M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s} = \frac{M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s}}{M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma} (M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma)$$

$$= M_\nu^{-s} \cdot \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^\sigma - 1} (M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma),$$

sodass sich ergiebt:

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s}$$

$$= M_n^{-\sigma} \sum_0^{n-1} (A_\nu M_\nu^{-s}) \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^\sigma - 1} (M_\nu^\sigma - M_{\nu+1}^\sigma). \tag{10}$$

Da nun $A_\nu M_\nu^{-s}$ nach Voraussetzung stets unter einer endlichen Grenze bleibt, und das Gleiche für den Ausdruck

$$\frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^\sigma - 1}$$

evident ist*), so folgt aus Gl. (10), dass:

$$\left| A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s} \right| < C \cdot M_n^{-\sigma} \sum_0^{n-1} {}_\nu (M_{\nu+1}^\sigma - M_\nu^\sigma) < C,$$

(wo C eine positive, endliche Grösse bedeutet), mithin $\lim A_n^\sigma M_n^{(-\sigma)}$ mit $\lim A_n^{(s)} M_n^{-s}$ endlich bleibt.

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass unter der gemachten Voraussetzung insbesondere auch

$$\lim A_n^{(1)} M_n^{-1}$$

endlich bleibt, und man hat daher, um den zweiten Theil des obigen Satzes zu beweisen, nur noch zu zeigen, dass diese letztere, etwas speciellere Voraussetzung stets auch die Endlichkeit von $\lim \frac{A_n}{\lg M_n}$ nach sich zieht.

Setzt man:

$$A_\nu^{(1)} M_\nu^{-1} = G_\nu^{(1)} \quad \text{und} \quad \left| G_\nu^{(1)} \right| \leqq G,$$

so folgt aus

$$A_\nu^{(1)} = G_\nu^{(1)} M_\nu, \quad A_{\nu-1}^{(1)} = G_{\nu-1}^{(1)} M_{\nu-1}$$

durch Subtraction:

$$\begin{aligned} a_\nu M_\nu &= G_\nu^{(1)} M_\nu - G_{\nu-1}^{(1)} M_{\nu-1} \\ &= G_{\nu-1}^{(1)} (M_\nu - M_{\nu-1}) + (G_\nu^{(1)} - G_{\nu-1}^{(1)}) M_\nu \end{aligned}$$

und hieraus durch Division mit M_ν und Summation über $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$(11) \qquad \sum_0^n {}_\nu a_\nu = \sum_0^{n-1} {}_\nu G_\nu^{(1)} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + G_n^{(1)} - G_0^{(1)}.$$

Da nun bekanntlich**):

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} \leqq \lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu,$$

so wird:

---

*) Dies gilt insbesondere auch, wenn $\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$ durchweg oder stellenweise mit ν über alle Grenzen wächst, da der Exponent σ im Nenner stets grösser ist, als der entsprechende Exponent $\sigma - s$ im Zähler; desgl., wenn $\lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = 1$ wird, in welchem Falle der fragliche Ausdruck den Grenzwerth $\frac{\sigma - s}{\sigma}$ besitzt — cf. Lehrsatz II.

**) Math. Ann. Bd. XXXV, p. 317, Formel (d).

$$|A_n| = \left|\sum_0^n a_\nu\right| \leqq |a_0| + G(\lg M_n - \lg M_0) + 2G$$

und somit bleibt $\frac{A_n}{\lg M_n}$ endlich. —

Zusatz. Es verdient bemerkt zu werden, dass der eben bewiesene Satz nicht ohne Weiteres umkehrbar ist, d. h. man darf aus der Endlichkeit von $\lim \frac{A_n}{\lg M_n}$ *keineswegs* stets auch auf diejenige von $\lim A_n^{(s)} M_n^{-s}$ schliessen, wie sich sofort ergiebt, wenn man das soeben benützte Beweisverfahren umzukehren versucht.

Der zuletzt bewiesene Satz nimmt eine noch prägnantere Form an, wenn der fragliche Grenzwerth nicht blos schlechthin endlich, sondern auch bestimmt ist, und wenn man ausserdem die Grössen M_ν der Beschränkung unterwirft, dass $\lim \frac{M_{n+1}}{M_n}$ für $n = \infty$ einen bestimmten Werth c (natürlich $\geqq 1$) besitzen oder unendlich gross werden soll. Es ergiebt sich nämlich:

Lehrsatz II. *Ist*

$$\lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = c, \quad \textit{wo zunächst} \quad c > 1 \tag{12}$$

und für irgend ein bestimmtes $s > 0$:

$$\lim A_n^{(s)} M_n^{-s} = G^{(s)}, \tag{13}$$

so hat man für jedes $\sigma > 0$:

$$\lim A_n^{(\sigma)} M^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = \frac{1 - c^{-s}}{1 - c^{-\sigma}} G^{(s)}, \tag{14}$$

und es tritt im Falle $\sigma = 0$ *an die Stelle dieser Relation die folgende:*

$$\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = \frac{1 - c^{-s}}{\lg c} G^{(s)} = \frac{1 - c^{-1}}{\lg c} G^{(1)}. \tag{15}$$

Für den Grenzfall $c = 1$ *reduciren sich diese Beziehungen auf:*

$$\lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = \frac{s}{\sigma} G^{(s)}, \tag{14a}$$

$$\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = s G^{(s)} = G^{(1)} \tag{15a}$$

und für den anderen Grenzfall $c = \infty$:

$$\lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = G^{(\sigma)} = G^{(s)}, \tag{14b}$$

$$\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = 0. \tag{15b}$$

—

Beweis. Sondert man von der rechts stehenden Reihe in Gl. (9) die ersten m Glieder ab und bezeichnet deren Summe mit S_{m-1}, so wird:

$$(16)\quad A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} - A_n^{(s)} M_n^{-s} = M_n^{-\sigma} S_{m-1} + M_n^{-\sigma} \sum_m^{n-1} A_\nu^{(s)} (M_\nu^{\sigma-s} - M_{\nu+1}^{\sigma-s}).$$

Das zweite Glied der rechten Seite lässt sich dann analog wie in Gl. (10) in die Form bringen:

$$M_n^{-\sigma} \sum_m^{n-1} A_\nu^{(s)} M_\nu^{-s} \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} \cdot (M_\nu^{\sigma} - M_{\nu+1}^{\sigma}).$$

Da nun:

$$\lim \frac{\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} \begin{cases} = \dfrac{c^{\sigma-s} - 1}{c^{\sigma} - 1} = \dfrac{c^{-s} - c^{-\sigma}}{1 - c^{-\sigma}} & \text{für } c > 1, \\ = \dfrac{\sigma - s}{\sigma} \text{*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \text{für } c = 1, \\ = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \text{für } c = \infty \end{cases}$$

*) Dies folgt aus der bekannten Relation:

$$\lim \frac{(1+\delta)^{\varrho} - 1}{\delta} = \varrho \quad (\text{für } \delta = 0).$$

Da dieselbe für meine ganze Convergenztheorie geradezu fundamental ist, und mit Rücksicht auf die noch in § 3 aus der nämlichen Grenzwerthrelation zu ziehenden Schlüsse, möchte ich über deren Herleitung hier noch folgendes bemerken.

Wie ich im § 2 meiner Abhandlung über allgemeine Convergenztheorie ausdrücklich erwähnt habe (a. a, O. p. 315), erscheint es mir methodisch zweckmässig, die erforderlichen Hülfsformeln ohne die Anwendung von Beziehungen zwischen *speciellen* Reihenformen (Exponentialreihe etc.), lediglich von der Definition

$$\lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

ausgehend, zu entwickeln. Um nun den hier in Frage kommenden Grenzwerth auf derselben Basis, also *ohne* Anwendung der Binomialreihe zu bestimmen, gehe ich aus von den bekannten Beziehungen (a. a. O. p. 316, Gl. (a) und (b)):

$$(1)\quad x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x},$$

$$(2)\quad \frac{x}{1-x} < \lg(1+x) < x,$$

welche sämmtlich zu gleicher Zeit befriedigt werden, wenn $|x| < 1$.

Es sei nun ϱ eine *positive* endliche Zahl, etwa $\varrho \leqq r$; ferner soll δ gleichfalls positiv und zwar von vornherein so klein angenommen werden, dass $r\delta < 1$ — also um so mehr $r \lg(1+\delta) < 1$ — wird. Wegen:

$$(1+\delta)^{\varrho} = e^{\varrho \lg(1+\delta)}$$

und ausserdem:

$$\lim A_n^{(s)} M_n^{-s} = G^{(s)},$$

so kann man setzen:

$$A_\nu^{(s)} M_\nu^{-s} \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma-s} - 1}{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{\sigma} - 1} \begin{cases} = \vartheta_\nu \cdot \frac{c^{-s} - c^{-\sigma}}{1 - c^{-\sigma}} \cdot G^{(s)} & \text{für } c > 1, \\ = \vartheta_\nu \cdot \frac{\sigma - s}{\sigma} \cdot G^{(s)} & \ldots \; c = 1, \\ = \varepsilon_\nu \cdot G^{(s)} & \ldots \; c = \infty, \end{cases}$$

wo ϑ_ν der Einheit, ε_ν der Null durch Wahl einer passenden unteren Grenze für ν beliebig nahe gebracht werden kann. Bezeichnet man also mit $[\vartheta_\nu]_m^{n-1}$ bezw. $[\varepsilon_\nu]_m^{n-1}$ einen gewissen Mittelwerth aus den Grössen ϑ_ν bezw. ε_ν für $\nu = m, \ldots, (n-1)$, so geht Gl. (16) jetzt in die folgende über:

---

ist nun nach Ungl. (1)

$$(1+\delta)^\varrho - 1 \begin{cases} > \varrho \lg(1+\delta) \\ < \frac{\varrho \lg(1+\delta)}{1 - \varrho \lg(1+\delta)} \end{cases}$$

und somit nach Ungl. (2) *a fortiori:*

$$(1+\delta)^\varrho - 1 \begin{cases} > \frac{\varrho\delta}{1+\delta}, \\ < \frac{\varrho\delta}{1-\varrho\delta} < \frac{\varrho\delta}{1-r\delta}, \end{cases}$$

also:

$$\frac{\varrho}{1+\delta} < \frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} < \frac{\varrho}{1-r\delta}.$$

Daraus folgt nun in der That, dass der fragliche Ausdruck mit $\lim \delta = +0$ der Grenze ϱ zustrebt, und zwar, wie ich ausdrücklich hervorheben will, *gleichmässig* für alle $\varrho \leqq r$; d. h. setzt man etwa:

$$\frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} = (1+\varepsilon) \cdot \varrho,$$

so kann man eine gewisse obere Grenze für δ angeben, welche ausreicht, um $|\varepsilon|$ für alle möglichen Werthe $\varrho \leqq r$ unter eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit herabzudrücken.

Um den betreffenden Ausdruck auch für negative ϱ, desgl. für negative δ zu behandeln, hat man nur zu beachten, dass:

$$\frac{(1+\delta)^{-\varrho} - 1}{\delta} = -\frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} \cdot \frac{1}{(1+\delta)^\varrho}$$

und:

$$\frac{(1-\delta)^\varrho - 1}{\delta} = \frac{\left(1 + \frac{\delta}{1-\delta}\right)^{-\varrho} - 1}{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \frac{1}{1-\delta}$$

gesetzt werden kann.

$$A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} = S_{m-1} M_n^{-\sigma} + A_n^{(s)} M_n^{(-s)}$$
$$+ \begin{cases} [\vartheta_\nu]_m^{n-1}\left(1 - \frac{1-c^{-s}}{1-c^{-\sigma}}\right) \cdot G^{(s)} \frac{M_m^\sigma - M_n^\sigma}{M_n^\sigma} & \text{für } c > 1, \\ [\vartheta_\nu]_m^{n-1}\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) \cdot G^{(s)} \frac{M_m^\sigma - M_n^\sigma}{M_n^\sigma} \quad \cdots\cdots & c = 1, \\ [\varepsilon_\nu]_m^{n-1} \cdot G^{(s)} \frac{M_m^\sigma - M_n^\sigma}{M_n^\sigma} \quad \cdots\cdots\cdots & c = \infty \end{cases}$$

und da man die endliche Zahl m so fixiren kann, dass für $\nu \geqq m$ ϑ_ν und um so mehr $[\vartheta_\nu]_m^\infty$ beliebig wenig von der Einheit, ε_ν und $[\varepsilon_\nu]_m^\infty$ beliebig wenig von Null abweichen, so folgt schliesslich für $n = \infty$:

$$G^{(\sigma)} = \lim A_n^{(\sigma)} M_n^{-\sigma} \begin{cases} = \frac{1-c^{-s}}{1-c^{-\sigma}} \cdot G^{(s)} & \text{für } c > 1, \quad (14) \\ = \frac{s}{\sigma} \cdot G^{(s)} \quad \cdots\cdots & c = 1, \quad (14a) \\ = G^{(s)} \quad \cdots\cdots & c = \infty. \quad (14b) \end{cases}$$

Um ferner die Richtigkeit von Gl. (15) zu beweisen, hat man zunächst nach Analogie von Gl. (11):

$$(17) \quad \sum_{m+1}^{n}{}_\nu a_\nu = \sum_{m}^{n-1}{}_\nu G_\nu^{(1)} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + G_n^{(1)} - G_m^{(1)} \quad (\text{wo } G_\nu^{(1)} = A_\nu^{(1)} M_\nu^{-1}).$$

Nun folgt — im Falle $c > 1$ — aus:

$$\lim \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1}} = 1 - c^{-1},$$

$$\lim (\lg M_{n+1} - \lg M_n) = \lg c,$$

dass:

$$\lim \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1}} = \frac{1-c^{-1}}{\lg c} (\lg M_{n+1} - \lg M_n)$$

und dass also gesetzt werden kann:

$$G_\nu^{(1)} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} = \vartheta_\nu \cdot G^{(1)} \cdot \frac{1-c^{-1}}{\lg c} (\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu),$$

wo $G^{(1)} = \lim G_n^{(1)}$ und ϑ_ν für hinlänglich grosse Werthe von ν der Einheit beliebig nahe kommt. Darnach erhält man:

$$\sum_{m+1}^{n}{}_\nu a_\nu = [\vartheta_\nu]_m^{n-1} \frac{1-c^{-1}}{\lg c} \cdot G^{(1)} (\lg M_n - \lg M_m) + G_n^{(1)} - G_m^{(1)}$$

und wenn man jetzt auf beiden Seiten die endliche Summe $\sum_0^m{}_\nu a_\nu$ addirt, die ganze Gleichung durch $\lg M_n$ dividirt und $n = \infty$ werden lässt, schliesslich:

$$(15)\quad \frac{A_n}{\lg M_n} = \frac{1-c^{-1}}{\lg c}\, G^{(1)}, \quad \text{also auch } = \frac{1-c^{-s}}{\lg c}\, G^{(s)} \quad (c > 1).$$

Im Falle $c = 1$ — also $M_{n+1} \simeq M_n$ — hat man bekanntlich*):

$$\frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1}} \simeq \lg M_{n+1} - \lg M_n,$$

sodass man die Gleichung (17) mit Hülfe der Substitution:

$$G_\nu^{(1)} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} = \vartheta_\nu \cdot G^{(1)} (\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu)$$

transformiren kann, wo ϑ_ν bei passender Wahl von $\nu \geqq m$ der Einheit beliebig nahe kommt. Alsdann wird:

$$\sum_{m+1}^{n}{}_\nu a_\nu = [\vartheta_\nu]_m^{n-1} \cdot G^{(1)} (\lg M_n - \lg M_m) + G_n^{(1)} - G_m^{(1)}$$

und schliesslich:

$$(15\,a)\quad \lim \frac{A_n}{\lg M_n} = G^{(1)}, \quad \text{also auch: } = s \cdot G^{(s)} \quad (c = 1).$$

In dem anderen Grenzfalle $c = \infty$ kann man nach Annahme einer beliebig *grossen* positiven Grösse C die Zahl m so fixiren, dass für $\nu \geqq m$:

$$\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} > c$$

also:

$$\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu > \lg C$$

wird. Da überdies:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} \leqq 1, \quad \text{also um so mehr: } < \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg C},$$

so folgt aus Gl. (17), dass:

$$\sum_{m+1}^{n}{}_\nu a_\nu < \frac{G'}{\lg C} (\lg M_n - \lg M_m) + G_n^{(1)} - G_m^{(1)},$$

(wenn G' die obere Grenze der $G_\nu^{(1)}$ für $\nu \geqq m$ bedeutet), und da man C von vornherein beliebig gross nehmen kann, schliesslich:

$$(15\,b)\qquad \lim \frac{A_n}{\lg M_n} = 0 \quad (c = \infty).$$

*) Math. Annalen, Bd. XXV, p. 318, Formel (9).

Zusatz. Die Vergleichung von (14a) und (14b) mit (14), ebenso von (15a) und (15b) mit (15) zeigt, dass sich für die beiden Grenzfälle $c = 1$ und $c = \infty$ genau dieselben Endresultate ergeben, als wenn man in den (zunächst unter der Voraussetzung $1 < c < \infty$ abgeleiteten) Gleichungen (14) und (15) c gegen die Einheit convergiren bezw. in's Unendliche wachsen lässt. In der That ist ja:

$$\lim \frac{1-c^{-s}}{1-c^{-\sigma}} \begin{cases} = \frac{s}{\sigma} & \text{für } c = 1, \\ = 1 & \text{für } c = \infty, \end{cases} \qquad \lim \frac{1-c^{-s}}{\lg c} \begin{cases} = s & \text{für } c = 1, \\ = 0 & \text{für } c = \infty. \end{cases}$$

§ 3.

Ueber den Grenzwerth von $\varrho \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ für $\varrho = +0$.

Wenn die Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ für jedes positive ϱ convergent ist, so convergirt sie offenbar um so schwächer, je kleiner ϱ ist. Für $\varrho = 0$ wird sie im Allgemeinen (d. h. wenn nicht zufällig $\sum a_\nu$ an sich convergirt) divergent. Lässt man nun ϱ von der Seite der positiven Zahlen her der Null zustreben, so vollzieht sich dieser Uebergang von der Convergenz zur Divergenz für die Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ in der Weise, dass unter gewissen Voraussetzungen $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ schliesslich proportional mit $\frac{1}{\varrho}$ oder noch schwächer als $\frac{1}{\varrho}$ wächst, sodass also $\varrho \sum a_\nu M_\nu^{\varrho}$ für $\varrho = +0$ einer bestimmten endlichen Grenze bezw. der Null zustrebt. Zur Klarstellung der verschiedenen, hierbei sich ergebenden Modalitäten dienen die folgenden Sätze.

Lehrsatz I. *Setzt man:*

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} = d_\nu \text{ *)},$$

sodass also $\sum d_\nu$ *divergirt,* $\sum d_\nu M_\nu^{-\varrho}$ *convergirt, so ist:*

$$(18) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} \begin{cases} = 1 & \text{wenn: (1) } M_{n+1} \cong M_n, \\ = \frac{1-c^{-1}}{\lg c} & \text{(2) } M_{n+1} \cong c.M_n \ (c>1), \\ = 0 & \text{(3) } M_{n+1} \succ M_n. \end{cases}$$

*) Auf diese Form lässt sich bekanntlich das allgemeine Glied *jeder* beliebigen divergenten Reihe bringen, sofern deren Glieder nur der Bedingung genügen ≤ 1 zu sein (cf. Math. Ann. Bd. XXV, p. 322).

Beweis. Es ist identisch:

$$\varrho\, d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \varrho \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho} \cdot \frac{M_{\nu+1}^\varrho}{M_{\nu+1}} \cdot \frac{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho}{M_{\nu+1}^\varrho M_\nu^\varrho}$$

$$= \varrho \cdot \frac{1 - q_\nu^{-1}}{1 - q_\nu^{-\varrho}} (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho})$$

wo

$$q_\nu = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} .$$

Ist nun ad (1) $q_n \trianglerighteq 1$, so convergirt der Factor:

$$\frac{1 - q_\nu^{-1}}{1 - q_\nu^{-\varrho}}$$

für unendlich wachsende ν gegen den Werth $\frac{1}{\varrho}$ und zwar *gleichmässig für alle* ϱ*), die unter einer beliebigen endlichen Grenze liegen. Man kann somit eine endliche positive Zahl m derart fixiren, dass — wenn gesetzt wird:

$$\frac{1 - q_\nu^{-1}}{1 - q_\nu^{-\varrho}} = \frac{\vartheta_\nu}{\varrho} ,$$

ϑ_ν für alle $\nu \geqq m$ und *jedes* ϱ (etwa < 1) um weniger, als eine beliebig kleine vorzuschreibende Grösse von der Einheit abweicht. Alsdann wird aber:

$$\varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu \alpha_\nu M_\nu^{-\varrho} = [\vartheta_\nu]_m^\infty \cdot \sum_m^\infty{}_\nu (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho}) = [\vartheta_\nu]_m^\infty \cdot M_m^{-\varrho}$$

und daher:

$$(18^1) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = 1 \quad (M_{n+1} \trianglerighteq M_n).$$

Im Falle (2) benütze man die Ungleichungen**):

---

*) S. d. Fussnote zum vorigen Paragraphen.

**) Es ist nämlich (cf. Math. Ann. Bd. XXV, p. 316):

$$e^{-x} \begin{cases} < \frac{1}{1+x} & (0 < x \leqq \infty), \\ > 1 - x & (0 < x \leqq \infty) \end{cases}$$

also

$$1 - e^{-x} \begin{cases} > \frac{x}{1+x}, \\ < x \quad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-e^{-x}} \begin{cases} < \frac{1}{x} + 1, & (0 < x \leqq \infty) \\ > \frac{1}{x}, & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

woraus:

$$\frac{\varrho}{1-q_\nu^{-\varrho}} = \frac{\varrho}{1-e^{-\varrho \lg q_\nu}} \begin{cases} < \frac{1}{\lg q_\nu} + \varrho, \\ > \frac{1}{\lg q_\nu}, \end{cases}$$

(da man wegen der Endlichkeit von $\lim q_n$ ϱ von vornherein so klein annehmen kann, dass die Grenzbedingung für die zweite Ungleichung, nämlich $\varrho \lg q_\nu \leqq 1$, erfüllt ist). Man kann nun, wenn die positive Grösse ε beliebig klein vorgeschrieben wird, eine positive Zahl m so fixiren, dass für $\nu \geqq m$:

$$c - \varepsilon < q_\nu < c + \varepsilon$$

also auch:

$$\frac{\varrho}{1-q_\nu^{\varrho}} \begin{cases} < \frac{1}{\lg (c-\varepsilon)} + \varrho, \\ > \frac{1}{\lg (c+\varepsilon)} \end{cases}$$

und daher:

$$\varrho \cdot \sum_m^\infty d_\nu M_\nu^{-\varrho} \begin{cases} < \frac{1-(c+\varepsilon)^{-1}}{\lg (c-\varepsilon)} \cdot M_m^{-\varrho}, \\ > \left(\frac{1-(c+\varepsilon)^{-1}}{\lg (c+\varepsilon)} + \varrho \right) M_m^{-\varrho}. \end{cases}$$

Hieraus folgt aber — da ε von vornherein beliebig klein gemacht werden kann — schliesslich:

$$(18^2) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \frac{1-c}{\lg c} \quad (M_{n+1} \backsimeq c M_n).$$

Im Falle (3), wo $\lim q_n = \infty$, kann man, wenn C positiv und beliebig *gross* angenommen wird, m so fixiren, dass für $\nu \geqq m$

$$q_\nu > C$$

wird. Da hier jedenfalls noch die *erste* der oben benützten Ungleichungen gilt, so wird für $\nu \geqq m$:

$$\frac{1}{1-q_\nu^{-\varrho}} < \frac{1}{\lg q_\nu} + \varrho < \frac{1}{\lg C} + \varrho$$

und da ausserdem:

$$1 - q_\nu^{-1} \leqq 1$$

so folgt zunächst:

$$\varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} < \frac{1}{\lg C} \cdot M_m^{-\varrho}.$$

Und da C an gar keine obere Grenze gebunden ist, schliesslich:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = 0 \qquad (M_{n+1} > M_n). \tag{18^3}$$

Lehrsatz II. *Ist* $\lim g_n = g$, *so hat man:*

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} \tag{19}$$

und zwar auch dann, wenn $g_\nu = g_{\nu,\varrho}$ *irgendwie von* ϱ *abhängt, sofern nur* $g_{\nu,\varrho}$ *mit wachsendem* ν *für alle positiven Werthe* ϱ, *die unter einer gewissen endlichen Grenze* r *liegen, gleichmässig gegen den Werth* g *convergirt.*

Beweis. In Folge der über die Beschaffenheit von g_ν bezw. $g_{\nu,\varrho}$ gemachten Voraussetzung lässt sich eine Zahl m so bestimmen, dass für $\nu \geqq m$:

$$g_\nu = \vartheta_\nu \, . \, g$$

gesetzt werden kann, wo ϑ_ν beliebig wenig von der Einheit abweicht und zwar *gleichmässig* für alle positiven $\varrho < r$. Daraus ergiebt sich zunächst:

$$\sum_m^\infty{}_\nu g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = [\vartheta_\nu]_m^\infty \cdot g \cdot \sum_m^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho}$$

und somit:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} \tag{19}$$

$$= g \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho}$$

d. h. mit Benützung von Lehrsatz I:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu g_\nu d_\nu M_\nu^{-\varrho} \begin{cases} = g, \\ = g \frac{1 - c^{-1}}{\lg c}, \\ = 0, \end{cases} \tag{19a}$$

wenn:

$$M_{n+1} \trianglerighteq M_n,$$
$$M_{n+1} \trianglerighteq c M_n \quad (c > 1),$$
$$M_{n+1} \succ M_n.$$

Zusatz. Dieser Satz gilt offenbar auch, falls $\lim g_n = 0$, und behält auch einen Sinn, falls $\lim g_n = \infty$ und $M_{n+1} \trianglerighteq M_n$ oder $\trianglerighteq c M_n$. Ferner leuchtet ohne weiteres ein, wie derselbe zu modificiren ist, falls $\lim g_n$ nicht bestimmt ist, sondern irgendwelche Unbestimmtheitsgrenzen besitzt.

Folgerungen aus Lehrsatz I und II. 1) Es ist:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\varrho}} = \left(\frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}\right)^\varrho \cdot \frac{d_\nu}{M_\nu^\varrho}$$

folglich nach dem oben gesagten:

$$(20)\quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\varrho}} \begin{cases} = 1 & \text{wenn: } M_{n+1} \trianglerighteq M_n, \\ = \dfrac{1 - c^{-1}}{\lg c}, & M_{n+1} \trianglerighteq c \,.\, M_n, \\ = 0 & M_{n+1} \succ M_n. \end{cases}$$

Ferner:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}} = \left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right) \cdot \frac{d_\nu}{M_\nu^\varrho}$$

und somit:

$$(21)\quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}} \begin{cases} = 1 & \text{wenn: } M_{n+1} \trianglerighteq M_n, \\ = \dfrac{c-1}{\lg c} & M_{n=1} \trianglerighteq c \,.\, M_n. \end{cases}$$

Setzt man z. B. $M_\nu = a\nu + b$, also $M_{\nu+1} - M_\nu = a$, so ergiebt sich die von Dirichlet bewiesene*) Relation:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(a\nu + b)^\varrho} = \frac{1}{a}$$

und für $M_\nu = 2^\nu$, also $c = 2$:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu 2^{-\nu\varrho} = \frac{1}{\lg 2}.$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. 53, p. 130. Der Beweis wird dort durch Vergleichung der betreffenden Reihe mit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1+\varrho}}$$

geführt.

2) Ersetzt man in Gl. (21) M_ν durch $\lg_\varkappa M_\nu (\varkappa = 1, 2, \ldots)$, so erhält man zunächst:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu \frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1} - \lg_\varkappa M_\nu}{(\lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} \begin{cases} = 1, & \text{wenn: } M_{n+1} \gtrsim M_n, \\ = \dfrac{c-1}{\lg c}, & M_{n+1} \gtrsim c \cdot M_n. \end{cases}$$

Nun ist aber, falls $M_{n+1} \gtrsim M_n$, bekanntlich:*)

$$\frac{\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n}{\lg_\varkappa M_n} \gtrsim \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n \cdot \lg_1 M_n \cdots \lg_\varkappa M_n}.$$

Im Falle $M_{n+1} \gtrsim c\, M_n$ wird $\lg_1 M_{n+1} \gtrsim \lg_1 M_n$ und daher zunächst:

$$\frac{\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n}{\lg_\varkappa M_n} \gtrsim \frac{\lg_1 M_{n+1} - \lg_1 M_n}{\lg_1 M_n \cdot \lg_2 M_n \cdots \lg_\varkappa M_n}$$

also wegen:

$$\varkappa \lg M_{n+1} - \varkappa \lg M_n \gtrsim \lg c, \quad \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n} \gtrsim c - 1$$

schliesslich:

$$\frac{\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n}{\lg_\varkappa M_n} \gtrsim \frac{\lg c}{c-1} \cdot \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n \lg_1 M_n \cdots \lg_\varkappa M_n}.$$

Mithin ergiebt sich in *beiden* Fällen:

$$(22) \qquad \lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg_1 M_\nu \cdots (\lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} = 1 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Dagegen muss nach Satz II:

$$(23) \qquad \lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{(M_\nu \lg_1 M_\nu \cdots \lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} = 0$$

werden, weil:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{(M_\nu \lg_1 M_\nu \cdots \lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} = \frac{1}{(\lg_1 M_\nu \cdots \lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}}$$

und der erste Factor lediglich durch Wahl von ν, unabhängig von ϱ beliebig klein gemacht werden kann.

Darnach ist also z. B.

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_2^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu (\lg \nu)^{1+\varrho}} = 1,$$

*) Math. Ann. Bd. XXV, p. 318, Formel (9).

dagegen:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu \lg \nu)^{1+\varrho}} = 0.$$

Lehrsatz III. *Ist* $\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = G$ —(also nach § 1, (I b) der Reihe $\sum a_\nu M_\nu^{-\varrho}$ convergent), *so wird auch:*

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = G, \quad \textit{falls} \quad M_{n+1} \sim M_n.^*)$$

Beweis. Durch partielle Summation ergiebt sich:

$$\varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} A_\nu (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho})$$

oder anders geschrieben:

$$= \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} \frac{A_\nu}{\lg M_\nu} \left\{ \frac{\lg M_\nu}{M_\nu^\varrho} - \frac{\lg M_{\nu+1}}{M_{\nu+1}^\varrho} \right\}$$

$$+ \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} \frac{A_\nu}{\lg M_\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho}.$$

Die erste Summe rechts lässt sich offenbar in die Form setzen:

$$\varrho \cdot \left[\frac{A_\nu}{\lg M_\nu} \right]_m^\infty \frac{\lg M_m}{M_m^\varrho}$$

ist also endlich und verschwindet folglich mit ϱ, sodass man zunächst erhält:

$$(24) \quad \lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \left[\frac{A_\nu}{\lg M_\nu} \right]_m^\infty \lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho}$$

wo $\left[\frac{A_\nu}{\lg M_\nu} \right]_m^\infty$ durch Wahl von m dem Werthe G beliebig nahe gebracht werden kann. Ist nun zunächst wiederum $M_{n+1} \gtrsim M_n$, so wird:

$$\lg M_{n+1} - \lg M_n \gtrsim \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n}$$

---

*) cf. Dedekind a. a. O. Daselbst ist nur der Fall $M_{n+1} \gtrsim M_n$ behandelt.

und daraus folgt nach Satz II ohne weiteres, dass alsdann:

$$\lim \varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^{\varrho}} = 1 \tag{25}$$

ist.

In dem allgemeineren Falle $M_{n+1} \sim M_n$ (wobei also $\lim \frac{M_{n+1}}{M_n}$ nicht einmal *bestimmt* $= c$, sondern nur *endlich*, also etwa $\leqq c$ zu sein braucht) hat man:

$$\varrho \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^{\varrho}} = \frac{\varrho \cdot \lg \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}}{M_{\nu+1}^{\varrho} - M_\nu^{\varrho}} \cdot \frac{M_{\nu+1}^{\varrho} - M_\nu^{\varrho}}{M_{\nu+1}^{\varrho} M_\nu^{\varrho}} \cdot M_\nu^{\varrho}$$
$$= \frac{\varrho \lg q_\nu}{q_\nu^{\varrho} - 1} (M_\nu^{-\varrho} - M_{\nu+1}^{-\varrho}).$$

Mit Benützung der Ungleichungen:

$$e^x \begin{cases} > 1 + x, \\ < \frac{1}{1 - x} \end{cases}$$

also:

$$\frac{x}{e^x - 1} \begin{cases} < 1, & (0 < x \leqq \infty) \\ > 1 - x, & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

ergiebt sich daher:

$$\frac{\varrho \lg q_\nu}{q_\nu^{\varrho} - 1} \begin{cases} < 1, \\ > 1 - \varrho \lg q_\nu > 1 - \varrho c \end{cases}$$

und daher:

$$\varrho \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{M_{\nu+1}^{\varrho}} \begin{cases} < M_m^{-\varrho}, \\ > (1 - \varrho c) \cdot M_m^{-\varrho} \end{cases} \tag{26}$$

woraus, in Verbindung mit Gl. (24), schliesslich:

$$\lim_{\varrho = +0} \varrho \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu M_\nu^{-\varrho} = G \left(\text{d. h.} = \lim \frac{A_n}{\lg M_n} \right). \tag{27}$$

Ist $M_{n+1} \cong M_n$ und:

$$\lim \frac{A_n^{(1)}}{M_n} = G$$

so folgt aus Lehrsatz II des § 2, Gl. (15b), dass alsdann

$$\lim \frac{A_n}{\lg M_n} = \lim \frac{A_n^{(1)}}{M_n},$$

ist — und es wird somit auch:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu M_\nu^{-\varrho} = \lim \frac{A_n^{(1)}}{M_n}.$$

Ersetzt man jetzt a_ν durch $a_\nu M_\nu^{-1}$, sodass also

$$A_n^{(1)} = \sum_0^n{}_\nu a_\nu M_\nu$$

in A_n übergeht, so resultirt der folgende Satz:*)

Lehrsatz IIIa. *Besitzt*

$$\frac{A_n}{M_n} = \frac{\sum_0^n a_\nu}{M_n}$$

für $n = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth G, so ist auch

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu M_\nu^{-(1+\varrho)} = G$$

falls

$$M_{n+1} \gtrsim M_n.$$

NB. Man kann diesen Satz auch leicht direct beweisen, ohne von den Ergebnissen des § 2 Gebrauch zu machen. Man erhält nämlich durch partielle Summation:

$$\sum_m^\infty{}_\nu a_\nu M_\nu^{-(1+\varrho)} = \sum_m^\infty{}_\nu A_\nu \left(M_\nu^{-(1+\varrho)} - M_{\nu+1}^{-(1+\varrho)}\right)$$

$$= \left[\frac{A_\nu}{M_\nu}\right]_m^\infty \sum_m^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1}^{1+\varrho} - M_\nu^{1+\varrho}}{M_{\nu+1}^{1+\varrho} M_\nu^\varrho}$$

und erkennt sodann, dass:

$$\lim_{\varrho=+0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1}^{1+\varrho} - M_\nu^{1+\varrho}}{M_{\nu+1}^{1+\varrho} M_\nu^\varrho} = 1,$$

*) Für $M_\nu = \nu$ ergiebt sich wieder ein speciellerer Satz des Herrn Hölder — a. a. O. p. 545.

da:

$$\frac{M_{\nu+1}^{1+\varrho} - M_\nu^{1+\varrho}}{M_{\nu+1}^{1+\varrho} M_\nu^\varrho} = \frac{1 - \left(\frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}\right)^{1+\varrho}}{1 - \frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho}$$

gesetzt werden kann, wobei der erste Factor für wachsende ν *gleichmässig* gegen den Werth $1 + \varrho$ convergirt.

München, im Februar 1890.

Ueber Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n-teln ganzer Zahlen gebildet sind und die Relationen zugehöriger Thetafunctionen n^{ter} Ordnung.

Von

A. von Braunmühl in München.

Einleitung.

Die Herren Noether*) und Frobenius**) haben, jeder von einem andern Gesichtspunkte ausgehend, eine Theorie derjenigen p-reihigen Thetacharakteristiken geschaffen, deren Elemente aus den Hälften ganzer Zahlen gebildet sind; diese Charakteristikentheorien haben ihre Wichtigkeit namentlich für die Bildung der Thetarelationen und für das Zweitheilungsproblem der Abel'schen Functionen. Es lag daher nahe, die genannten Untersuchungen auf solche Charakteristiken auszudehnen, deren Elemente aus n-teln ganzer Zahlen bestehen, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist, und in dieser Richtung haben zuerst die Herren Prym und Krazer***), allerdings nicht von der Theorie der Charakteristiken ausgehend, vornehmlich zwei Formeln aufgestellt, die aus Thetafunctionen erster Ordnung mit n-tel Charakteristiken gebildet sind, und von denen namentlich die eine†) so allgemeinen Charakter besitzt, dass sie als Fundament für weitere Untersuchungen gelten kann.

Da es mir aber wünschenswerth scheint, die Thetaformeln im Anschluss an die Gruppirungsverhältnisse der Charakteristiken zu gewinnen, so stellte ich mir im I. Abschnitte dieser Arbeit die Aufgabe, die Untersuchungen des Hrn. Frobenius über Gruppen von Halbercharakteristiken auf n-tel Charakteristiken auszudehnen. Wenn ich dabei die Gruppirungsverhältnisse etwas eingehender besprochen habe, als dies für die Entwicklungen des II. Abschnitts nothwendig ist, so

*) Mathematische Annalen Bd. 16, 1880.

**) Journal für Mathematik Bd. 89, 1880. Bd. 96, 1884.

***) Acta mathematica Bd. 3, 1883.

†) l. c. pag. 271, Formel (Θ_2).

geschah das, weil ich der Ansicht bin, dass diese Betrachtungen für die Gewinnung specieller Thetarelationen in dem Sinne, wie ich sie in einer früheren Abhandlung*) für $n = 3$ entwickelte, von Nutzen sein werden.

Meine weiteren Untersuchungen im II. Abschnitte schliessen sich an eine specielle Gruppe an, die syzygetische Untergruppe nämlich, die wieder als besonderen Fall die Goepel'sche Gruppe enthält. Diese führt zur Betrachtung gewisser Thetafunctionen n-ter Ordnung, für die sich eine Fundamentalrelation aufstellen liess, welche der eben erwähnten Formel der H.H. Krazer und Prym für Thetafunctionen erster Ordnung völlig analog ist, und alle bis jetzt bekannten Relationen gleicher Gattung als specielle Fälle in sich schliesst.

I. Abschnitt.

Charakteristiken.

§ 1.

Definitionen und vorbereitende Sätze.

Der Zahlencomplex

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_p \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \ldots, & \alpha_p' \end{pmatrix},$$

bestehend aus $2p$ Zahlen, heisst eine p-reihige Charakteristik oder vom Geschlechte p. Legt man den Zahlen α nur die Werthe eines vollständigen Restsystems mod. n bei, so sind in dieser Form im Ganzen n^{2p} verschiedene Charakteristiken enthalten.

Der Ausdruck

$$|\alpha| = \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' + \cdots + \alpha_p\alpha_p'$$

heisse der *Charakter* einer Charakteristik; derselbe kann mod. n die Zahlenwerthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ annehmen, und somit giebt es Charakteristiken vom Charakter $0, 1, \ldots, n-1$. Ist

$$(\beta) = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_p \\ \beta_1', & \beta_2', & \ldots, & \beta_p' \end{pmatrix}$$

eine zweite Charakteristik, so heisst dieselbe der Charakteristik (α) *gleich*, wenn alle Zahlen in (β) den an entsprechenden Stellen stehenden Zahlen in (α) gleich sind, also $\alpha_\nu = \beta_\nu$, $\alpha_\nu' = \beta_\nu'$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, sie heisst *congruent* mit (α), wenn $\alpha_\nu \equiv \beta_\nu$, $\alpha_\nu' \equiv \beta_\nu'$ mod. n ist.

*) Mathematische Annalen Bd. 32, 1888.

Die Summe mehrerer Charakteristiken (α), (β), ..., (ν) ist

$$(\alpha) + (\beta) + \cdots + (\nu)$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \nu_1, & \alpha_2 + \beta_2 + \cdots + \nu_2, & \cdots, & \alpha_p + \beta_p + \cdots + \nu_p \\ \alpha_1' + \beta_1' + \cdots + \nu_1', & \alpha_2' + \beta_2' + \cdots + \nu_2', & \cdots, & \alpha_p' + \beta_p' + \cdots + \nu_p' \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha + \beta + \cdots + \nu)$$

und wird im Folgenden kurz mit $(\alpha\beta \ldots \nu)$ bezeichnet.

Hieraus folgt:

$$m(\alpha) = (m\alpha) = (\alpha^m), \quad m < n \text{ und ganzzahlig},$$

und für $m = n$

$$n(\alpha) = (n\alpha) = (\alpha^n) \equiv (1) \mod n,$$

wenn man mit (1) die Charakteristik bezeichnet, deren sämmtliche Elemente Null sind. Weiter folgt:

$$(n - \lambda)(\alpha) = \big((n - \lambda)\alpha\big) = (\alpha^{n-\lambda}) \equiv -\lambda(\alpha) \equiv (\alpha^{-\lambda}) \mod n,$$

und hieraus:

$$(\alpha) - (\beta) \equiv (\alpha\beta^{-1}) \equiv (\alpha\beta^{n-1}) \mod n.$$

Ferner möge zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \cdots + \alpha_p\beta_p' = \sum \alpha\beta' = \left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right|,$$
$$\alpha_1'\beta_1 + \alpha_2'\beta_2 + \cdots + \alpha_p'\beta_p = \sum \alpha'\beta = \left|\begin{matrix}\beta\\ \alpha\end{matrix}\right|,$$
$$\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1 + \alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2 + \cdots + \alpha_p\beta_p' - \alpha_p'\beta_p$$
$$= \sum (\alpha\beta' - \alpha'\beta) = \left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}\beta\\ \alpha\end{matrix}\right| = \alpha|\beta.$$

Herr Frobenius hat zur Bestimmung der Anzahl von gewöhnlichen Charakteristiken, welche gewissen Bedingungen genügen, eine Methode entwickelt, die sich auf Charakteristiken, deren Zahlen nach dem Modul n reducirt sind, sofort ausdehnen lässt, und in folgendem Satze über lineare Congruenzen ihre Quelle hat:

(I) *Sind*

$$u_\alpha = a_{\alpha,1}x_1 + a_{\alpha,2}x_2 + \cdots + a_{\alpha,q}x_q, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, \sigma$$

σ mod. n unabhängige lineare Formen der q Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_q$ und $b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ beliebige Zahlen, so haben die σ linearen Congruenzen

$$u_\alpha \equiv b_\alpha \mod n$$

$n^{q-\sigma}$ Lösungen.

Beweis. Ist φ die Anzahl der gesuchten Lösungen, und bezeichnet man mit τ, wie im Folgenden immer, die n-te Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{n}}$, so besteht die Gleichung:

$$n^\sigma \varphi = \sum \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\sigma} \{1 + \tau^{u_\alpha - b_\alpha} + \tau^{2(u_\alpha - b_\alpha)} + \cdots + \tau^{(n-1)(u_\alpha - b_\alpha)}\},$$

worin sich die Summe Σ auf die in den u_α enthaltenen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_q$ bezieht, denen man alle Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ beizulegen hat. Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellt leicht. Hat man nämlich ein Werthsystem der $x_1, x_2, \ldots, x_q$, welches nicht den sämmtlichen Congruenzen $u_\alpha \equiv b_\alpha \bmod. n$ genügt, so enthält das Product Π jedenfalls einen oder auch mehrere Factoren von der Form

$$1 + \tau + \tau^2 + \tau^3 + \cdots + \tau^{n-1}.$$

Da diese Summe aber gleich Null ist, so verschwindet das betreffende Glied aus Σ, mithin verschwinden nur die Summanden von Σ nicht, welche für jene Werthsysteme von $x_1, x_2, \ldots, x_q$ entstehen, die den sämmtlichen Congruenzen $u_\alpha \equiv b_\alpha \bmod. n$ genügen. Die σ Factoren eines solchen Summengliedes sind aber dann alle einzeln $= n$, und folglich ist jedes der übrigbleibenden φ Summenglieder $= n^\sigma$.

Führt man jetzt das durch Π angedeutete Product aus, so bekommt man ausser 1 lauter Glieder von der Form

$$\tau^{\mu_1(u_1-b_1)+\mu_2(u_2-b_2)+\cdots+\mu_\lambda(u_\lambda-b_\lambda)},$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n-1$ in beliebiger Reihenfolge sind. Es ist aber einmal $\Sigma 1 = n^q$, da die Summe n^q Glieder hat, und dann

$$\sum \tau^{\mu_1(u_1-b_1)+\cdots+\mu_\lambda(u_\lambda-b_\lambda)} = \tau^{-(\mu_1 b_1+\cdots+\mu_\lambda b_\lambda)} \cdot \sum \tau^{\mu_1 u_1+\cdots+\mu_\lambda u_\lambda} = S.$$

Führt man in dem Exponenten unter dem Summenzeichen statt $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ ihre Werthe in $x_1, x_2, \ldots, x_q$ ein und ordnet nach den x, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{21} + \cdots + \mu_\lambda a_{\lambda 1} &= a_1, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad &\\ \mu_1 a_{1\alpha} + \mu_2 a_{2\alpha} + \cdots + \mu_\lambda a_{\lambda\alpha} &= a_\alpha, \end{aligned}$$

wodurch

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_\lambda u_\lambda = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_q x_q$$

wird. Schreibt man endlich noch

$$-(\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_\lambda b_\lambda) = Q,$$

so kommt:

$$S = \tau^Q \sum \tau^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_q x_q},$$

die Grössen a_α können hier nicht sämmtlich congruent mit Null nach dem Modul n sein, denn sonst bestünde die lineare Relation

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_\lambda u_\lambda \equiv 0 \bmod. n$$

zwischen den nach Voraussetzung unabhängigen Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_q$. Es ist aber:

$$S = \tau^{Q}\left(\sum \tau^{a_1 x_1}\right)\left(\sum \tau^{a_2 x_2}\right) \cdots \left(\sum \tau^{a_q x_q}\right),$$

da $x_1, x_2, \ldots, x_q$ alle Werthe $0, 1, \ldots, n-1$ annehmen, und wenn nun etwa $a_\alpha \not\equiv 0 \bmod. n$ ist, so muss

$$\sum \tau^{a_\alpha x_\alpha} = 1 + \tau^{a_\alpha} + \tau^{2a_\alpha} + \cdots + \tau^{(n-1)a_\alpha} = 0$$

sein, somit verschwindet S, und man hat die Gleichung

$$n^q \varphi = n^q.$$

§ 2.

Sätze über Charakteristiken.

Sind $(\alpha), (\beta), \ldots, (\nu)$ irgendwelche Charakteristiken, so heisst die Charakteristik $(\alpha^{\sigma_\alpha} \beta^{\sigma_\beta} \ldots \nu^{\sigma_\nu})$, wo $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \ldots, \sigma_\nu$ die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ bedeuten, eine *Combination**) derselben; und diejenigen unter diesen Combinationen, für welche die Beziehung besteht:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \cdots + \sigma_\nu \equiv 1 \bmod. n$$

mögen als *wesentliche Combinationen* bezeichnet werden.

Ein System von Charakteristiken heisse ferner unabhängig, wenn keine der aus seinen Charakteristiken gebildeten Combinationen mit Null nach dem Modul n congruent ist, und es heisse *wesentlich unabhängig*, wenn keine Combination, für welche $\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \cdots + \sigma_\nu \equiv 0$ ist, mit Null nach dem Modul n congruent ist.

Hiermit erhält man folgende wichtige Sätze:

(II) *Die Combinationen von λ unter sich unabhängigen Charakteristiken sind n^λ verschiedene Charakteristiken.*

(III) *Die wesentlichen Combinationen von λ wesentlich unabhängigen Charakteristiken liefern $n^{\lambda-1}$ Charakteristiken.*

(IV) *Es giebt unter den n^{2p} Charakteristiken höchstens $2p$ unabhängige und $2p+1$ wesentlich unabhängige.*

Die Richtigkeit dieser Sätze ergiebt sich, wie folgt:

Jede Combination der λ unabhängigen Charakteristiken

$$(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$$

nimmt die Gestalt an:

$$(\varpi) = (\nu_1^{\sigma_1} \nu_2^{\sigma_2}, \ldots, \nu_\lambda^{\sigma_\lambda}), \quad \sigma_\alpha = 0, 1, \ldots, n-1.$$

---

*) Wenn im Folgenden von Combinationen zu s Charakteristiken gesprochen wird, so verstehen wir damit abkürzend Combinationen, für welche

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \cdots + \sigma_\nu \equiv s \bmod. n$$

ist.

Die n^λ Variationen mit Wiederholung der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ für $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\lambda$ gesetzt, geben also die n^λ Charakteristiken des Satzes (II). Diese trennen sich aber nach Satz (I) stets in n Parthien von je $n^{\lambda-1}$ Charakteristiken; für alle Charakteristiken einer solchen Parthie ist $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_\lambda \equiv \varepsilon \mod n$, und man erhält die n Parthien, wenn man $\varepsilon = 0, 1, \ldots n-1$ setzt. Damit ist der Satz (III) erwiesen, während Satz (IV) eine unmittelbare Folge aus (II) und (III) ist.

Als weitere Folgerungen dieser Sätze ergiebt sich noch nebenbei:

(V) *Zwischen $2p+q$ Charakteristiken müssen mindestens q lineare Relationen bestehen,*

und

(VI) *Zwischen mehreren wesentlich unabhängigen Charakteristiken kann höchstens eine Relation stattfinden.*

Bestünden nämlich zwischen den Charakteristiken $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\mu)$ zwei Relationen:

$$(\nu_1^{\sigma_1} \nu_2^{\sigma_2} \ldots \nu_\mu^{\sigma_\mu}) \equiv 0, \quad (\nu_1^{\tau_1} \nu_2^{\tau_2} \ldots \nu_\mu^{\tau_\mu}) \equiv 0,$$

so ist ersichtlich, dass man aus diesen 2 Relationen sofort eine dritte bilden kann:

$$(\nu_1^{s\sigma_1+t\tau_1} \nu_2^{s\sigma_2+t\tau_2} \ldots \nu_\mu^{s\sigma_\mu+t\tau_\mu}) \equiv 0,$$

so dass

$$s(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_\mu) + t(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\mu) \equiv 0 \mod n$$

ist, was aber der Annahme, dass $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\mu)$ wesentlich unabhängig sind, widerspräche.

(VII) *Ist (ν) irgend eine Charakteristik, und durchläuft (ζ) alle n^{2p} Charakteristiken, so ist*

$$\sum_\zeta \tau^{s|\nu\zeta|} = n^p; \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dieser wichtige Satz ist ein specieller Fall des folgenden allgemeineren:

(VIII) *Bedeuten $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$ irgend welche unabhängige Charakteristiken, durchläuft (ζ) alle n^{2p} Charakteristiken, ist ε irgend eine Zahl der Reihe $1, 2, \ldots, n-1$, und bedeuten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda$; $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_\lambda'$ irgend welche Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, n-1$, so ist*

$$\sum_\zeta \tau^{s|\zeta| + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \left\{ \varepsilon_\alpha \left|\begin{smallmatrix}\zeta\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \varepsilon_\alpha' \left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \zeta\end{smallmatrix}\right| \right\}} = \tau^{-\frac{\Omega_0}{s}} \cdot n^p,$$

wo

$$\Omega_0 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\alpha' |\nu_\alpha| + \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta' \left|\begin{smallmatrix}\nu_\beta\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon_\alpha' \varepsilon_\beta \left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{smallmatrix}\right|; \quad \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\Big\} = 1, 2, \ldots, \lambda$$

ist.

Beweis. Setzt man zur Abkürzung einen Augenblick

$$(\nu_1) = (\alpha), \quad (\nu_2) = (\beta) \ldots (\nu_\lambda) = (\mu),$$

so giebt die Summe entwickelt, da (ζ) alle Charakteristiken durchläuft:

$$\Big(\sum_{\zeta_1 \zeta_1'} \tau^{\varepsilon \zeta_1 \zeta_1' + \omega_1 \zeta_1 + \varpi_1 \zeta_1'}\Big)\Big(\sum_{\zeta_2 \zeta_2'} \tau^{\varepsilon \zeta_2 \zeta_2' + \omega_2 \zeta_2 + \varpi_2 \zeta_2'}\Big) \cdots \Big(\sum_{\zeta_p \zeta_p'} \tau^{\varepsilon \zeta_p \zeta_p' + \omega_p \zeta_p + \varpi_p \zeta_p'}\Big),$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \omega_\sigma &= \varepsilon_1 \alpha_\sigma' + \varepsilon_2 \beta_\sigma' + \cdots + \varepsilon_\lambda \mu_\sigma' \\ \varpi_\sigma &= \varepsilon_1' \alpha_\sigma + \varepsilon_2' \beta_\sigma + \cdots + \varepsilon_\lambda' \mu_\sigma \end{aligned}\right\} \sigma = 1, 2, \ldots p$$

ist. Lässt man jetzt ζ' in einem dieser Factoren, etwa im ersten, alle Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ durchlaufen, so wird derselbe:

$$\sum_{\zeta_1} \tau^{\omega_1 \zeta_1} \left(1 + \tau^{\varepsilon \zeta_1 + \varpi_1} + \tau^{2(\varepsilon \zeta_1 + \varpi_1)} + \cdots + \tau^{(n-1)(\varepsilon \zeta_1 + \varpi_1)}\right).$$

Nun giebt es immer für ζ_1 einen Werth unter den mit $0, 1, \ldots, n-1$ congruenten Zahlen, der $\varepsilon \zeta_1 + \varpi_1 \equiv 0$ macht: $\zeta_1 = -\frac{\varpi_1}{\varepsilon} \equiv$ einer ganzen Zahl, und für diesen wird dann der in der Klammer stehende Ausdruck gleich n, für alle anderen Werthe von ζ_1 aber verschwindet er, da der Klammerausdruck für sie die Form $(1 + \tau + \cdots + \tau^{(n-1)}) \equiv 0$ annimmt. Somit ist der Werth des ersten Factors $n\tau^{-\frac{\omega_1 \varpi_1}{\varepsilon}}$. Das Gleiche tritt bei jedem der p Factoren ein, und der Gesammtwerth des Productes ist also:

$$\tau^{-\frac{\omega_1 \varpi_1 + \omega_2 \varpi_2 + \cdots + \omega_p \varpi_p}{\varepsilon}} \cdot n^p.$$

Die Summe $\omega_1 \varpi_1 + \cdots + \omega_p \varpi_p$ giebt aber entwickelt den Ausdruck Ω_0.

Für $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha' = 0$ geht der Satz in Satz (VII) über, da $(\nu\zeta)$ mit (ζ) alle Charakteristiken durchläuft.

Ausserdem sind noch folgende specielle Fälle wichtig zu bemerken. Ist

$$\varepsilon_\alpha = \pm \varepsilon_\alpha', \quad \varepsilon_\beta = \pm \varepsilon_\beta',$$

so wird

$$\Omega_0 = \pm \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \varepsilon_\alpha^2 |\nu_\alpha| + \sum_{\alpha, \beta} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \left(\begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} \right) \right\}.$$

Hieraus folgt, was wir später benützen werden:

(IX) *Bestehen zwischen den Charakteristiken* $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$ *die Bedingungen*

$$|\nu_\alpha| \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} \equiv 0,$$

wo $\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\Big| = 1, 2, \ldots, \lambda$ *ist, so wird*

$$\sum_{\zeta} \tau^{\varepsilon|\zeta| + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \varepsilon_\alpha \left(\left|\begin{matrix}\zeta\\ \nu_\alpha\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}\nu_\alpha\\ \zeta\end{matrix}\right| \right)} = n^p.$$

Hieran schliesst sich noch ein anderer für später wichtiger Satz:

(X) *Sind* $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$ *irgend welche unabhängige Charakteristiken, durchläuft* (ζ) *alle* n^{2p} *Charakteristiken, und bedeuten* ε_α *und* ε_α' *irgend welche Zahlen der Reihe* $0, 1, \ldots, n-1$ (ohne gleichzeitig $= 0$ zu sein), *so ist:*

$$\sum_{\zeta} \tau^{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \varepsilon_\alpha \left|\begin{matrix}\zeta\\ \nu_\alpha\end{matrix}\right| + \varepsilon_\alpha' \left|\begin{matrix}\nu_\alpha\\ \zeta\end{matrix}\right|} = 0.$$

Setzt man nämlich wieder $(\nu_1) = (\alpha)$, $(\nu_2) = (\beta) \ldots (\nu_\lambda) = \mu$, so wird diese Summe:

$$\left(\sum_{\zeta_1} \tau^{\zeta_1 \omega_1}\right)\left(\sum_{\zeta_1'} \tau^{\zeta_1' \varpi_1}\right)\left(\sum_{\zeta_2} \tau^{\zeta_2 \omega_2}\right)\left(\sum_{\zeta_2'} \tau^{\zeta_2' \varpi_2}\right) \cdots$$
$$\cdots \left(\sum_{\zeta_p} \tau^{\zeta_p \omega_p}\right)\left(\sum_{\zeta_p'} \tau^{\zeta_p' \varpi_p}\right),$$

wo die ϖ und ω dieselbe Bedeutung wie in Satz (VIII) haben. Irgend ein solcher Factor, z. B. der erste, giebt aber entwickelt

$$1 + \tau^{\omega} + \tau^{2\omega} + \cdots + \tau^{(n-1)\omega}$$

und ist $= 0$, wenn ω von Null verschieden, sonst aber $= n$. Nun zeigt aber die Bedeutung von ω_σ und ϖ_σ, dass keinenfalls alle Glieder ω_σ und $\varpi_\sigma \equiv 0$ sein können, da sonst eine Relation zwischen den nach Voraussetzung unabhängigen Charakteristiken $(\alpha), (\beta), \ldots, (\mu)$ bestünde, somit verschwindet das obige Product.

Ist speciell $\lambda = 1$, $(\nu_1) = (\nu)$ und $\varepsilon_\alpha = 1$, $\varepsilon_\alpha' = -1$, so kommt der wichtige Satz:

(IX) *Ist* (ν) *irgend eine Charakteristik, und durchläuft* (ζ) *alle* n^{2p} *Charakteristiken, so ist*

$$\sum_{\zeta} \tau^{\nu|\zeta} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\zeta}^{\bullet} \tau^{1|\zeta} = n^{2p}.$$

Der letzte Theil des Satzes leuchtet unmittelbar ein, wenn man beachtet, dass $1|\zeta = 0$ für jeden der n^{2p} Werthe von (ζ) ist, da alle Elemente von (1) Null sind.

§ 3.

Anzahl der Charakteristiken von gleichem Charakter.

Satz (VII) kann verwendet werden, um die Anzahl der überhaupt vorhandenen p-reihigen Charakteristiken von gleichem Charakter zu bestimmen.

Ist $\varphi(\alpha)$ die Anzahl derselben vom Charakter

$$|\xi| = \alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

so hat man:

$$(1) \qquad \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n-1) = n^{2p};$$

ferner ist, ähnlich wie im Beweise des Satzes (I):

$$n\left(\varphi(0) + \tau^{\delta}\varphi(1) + \tau^{2\delta}\varphi(2) + \cdots + \tau^{(n-1)\delta}\varphi(n-1)\right) =$$

$$= \sum_{\zeta}(1+\tau^{|\zeta|}+\cdots+\tau^{(n-1)|\zeta|}) + \tau^{\delta}\sum_{\zeta}(1+\tau^{|\zeta|-1}+\cdots+\tau^{(n-1)(|\zeta|-1)})$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots + \tau^{\alpha\delta}\sum_{\zeta}(1+\tau^{|\zeta|-\alpha}+\cdots+\tau^{(n-1)(|\zeta|-\alpha)})$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots + \tau^{(n-1)\delta}\sum_{\zeta}(1+\tau^{|\zeta|-(n-1)}+\cdots+\tau^{(n-1)(|\zeta|-(n-1))});$$

δ bedeutet hier irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, (n-1)$. Summirt man, indem man alle ersten, alle zweiten u. s. w., alle n^{ten} Glieder in diesen Summen zusammenfasst, so kommt:

$$\sum_{\zeta}(1+\tau^{\delta}+\tau^{2\delta}+\cdots+\tau^{(n-1)\delta}) + \sum_{\zeta}\tau^{\cdot\zeta|}\quad(1+\tau^{\delta-1}+\tau^{2(\delta-1)}+\cdots+\tau^{(n-1)(\delta-1)})$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots + \sum_{\zeta}\tau^{\alpha|\zeta|}\quad(1+\tau^{\delta-\alpha}+\tau^{2(\delta-\alpha)}+\cdots+\tau^{(n-1)(\delta-\alpha)})$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots + \sum_{\zeta}\tau^{(n-1)|\zeta|}(1+\tau^{\delta-(n-1)}+\tau^{2(\delta-(n-1))}+\cdots+\tau^{(n-1)(\delta-(n-1))}).$$

Lässt man jetzt δ alle Werthe $1, 2, \ldots, n-1$ durchlaufen, so verschwinden die in jedem Gliede stehenden Klammerfactoren bis auf einen. Denn ist etwa $\delta = \alpha$, so wird der Summand

$$\sum_{\zeta}\tau^{\alpha\cdot\zeta|}\,(1+\tau^{\delta-\alpha}+\tau^{2(\delta-\alpha)}+\cdots+\tau^{(n-1)(\delta-\alpha)})$$

$$= n\sum_{\zeta}\tau^{\alpha|\zeta|} = n\cdot n^{p}.$$

Also hat man

$$(2) \qquad \varphi(0) + \tau^{\delta}\varphi(1) + \tau^{2\delta}\varphi(2) + \cdots + \tau^{(n-1)\delta}\varphi(n-1) = n^{p}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) repräsentiren, da δ die Werthe $1, 2, \ldots, n-1$ annimmt, n Gleichungen zur Bestimmung der n Zahlen $\varphi(\alpha)$. Die Auflösung dieses Gleichungssystems liefert die Werthe:

$$\varphi(0) = n^{p-1}(n^p + n - 1)$$

und

$$\varphi(\alpha) = n^{p-1}(n^p - 1), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Also ergiebt sich der Satz:

(XII) *Unter den n^{2p} Charakteristiken befinden sich*

$$n^{p-1}(n^p + n - 1)$$

vom Charakter Null und

$$n^{p-1}(n^p - 1)$$

von jedem der andern Charaktere: $1, 2, \ldots, n-1$.

Für $n=2$ erhält man z. B. $2^{p-1}(2^p+1)$ gerade und $2^{p-1}(2^p-1)$ ungerade Charakteristiken (vergl. Frobenius J. f. M. 89. p. 191). Für $n=3$ ergeben sich $3^{p-1}(3^p+2)$ Charakteristiken vom Charakter Null, $3^{p-1}(3^p+2)$ vom Charakter $+1$ und ebensoviele vom Charakter 2 oder -1 (vgl. meine Arbeit Abhandl. d. k. bayr. Academie d. W. II. Cl. XVI. Bd. II. Abth.*).

§ 4.

Gruppen und Systeme.

Die n^{2p} Charakteristiken können als eine Gruppe von n^{2p} Operationen aufgefasst werden, indem die Summe je zweier p-reihiger Charakteristiken wieder eine solche Charakteristik liefert. Die Charakteristik (1) vertritt dann die Identität, und das System der n^{2p} Charakteristiken bleibt durch Anwendung der Operationen dieser Gruppe ungeändert.

Nach Satz (IV) können die Operationen dieser Gruppe aus $2p$ unabhängigen unter ihnen zusammengesetzt werden. Man gelangt so zu folgender Darstellung der Gesammtgruppe G. Sind

$$(\nu_1)\ (\nu_2) \ldots (\nu_p); \quad (\varrho_1)\ (\varrho_2) \ldots (\varrho_p)$$

$2p$ unabhängige Charakteristiken, so wird G durch die sämmtlichen Combinationen derselben dargestellt, und man nennt die $2p$ unabhängigen Charakteristiken eine Basis der Gruppe. Diese Gruppe lässt sich in folgendes Schema bringen:

---

*) Die hier citirten Stellen der fraglichen Arbeit werden in keiner Weise von dem fehlerhaften Resultate berührt, das Hr. Krazer die Güte hatte im Jahrbuche für die Fortschritte der Mathematik 1886 zu besprechen.

$$
(1)\quad
\begin{array}{llllllll}
(1) & (\nu_1) & \dots (\nu_p) ; & (\nu_1^2) & \dots & (\nu_p^2) ; \dots & (\nu_1^{n-1}) & \dots (\nu_p^{n-1}) ; \quad (\nu_1\nu_2) \dots \\
(\varrho_1) & (\varrho_1\nu_1) & \dots(\varrho_1\nu_p); & (\varrho_1\nu_1^2)\dots & (\varrho_1\nu_p^2); \dots & (\varrho_1\nu_1^{n-1})\dots & (\varrho_1\nu_p^{n-1}); & (\varrho_1\nu_1\nu_2)\dots \\
\dots & \dots & & & & & & \\
(\varrho_p) & (\varrho_p\nu_1) & \dots & . & . & . & . & . \\
(\varrho_1^2) & (\varrho_1^2\nu_1) & \dots & . & . & . & . & . \\
\dots & \dots & & & & & & \\
(\varrho_p^2) & (\varrho_1^2\nu_1) & \dots & . & . & . & . & . \\
\dots & \dots & & & & & & \\
(\varrho_1^{n-1}) & (\varrho_1^{n-1}\nu_1) & \dots & . & . & . & . & . \\
(\varrho_1\varrho_2) & (\varrho_1\varrho_2\nu_1) & \dots & . & . & . & . & . \\
\dots & \dots & & & & & & \\
 & (\varrho_1^{n-1}\varrho_2^{n-1}\dots\varrho_p^{n-1})\dots & & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1}) \\
(\varrho_1\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1}) \\
\dots \\
(\varrho_p\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1}) \\
(\varrho_1^2\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1}) \\
\dots \\
(\varrho_p^2\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1}) \\
\dots \\
(\varrho_1^{n-1}\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1}) \\
(\varrho_1\varrho_2\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1}) \\
\dots \\
(\varrho_1^{n-1}\varrho_2^{n-1}\dots\varrho_p^{n-1}\nu_1^{n-1}\nu_2^{n-1}\dots\nu_p^{n-1})
\end{array}
$$

In jeder Horizontalreihe dieses Schemas sind n^p Charakteristiken enthalten. Die der ersten Zeile bilden eine Untergruppe vom Grade n^p, die aus den p unabhängigen Charakteristiken $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_p)$ ebenso gebildet ist, wie die Gesammtgruppe aus den $2p$ unabhängigen; die übrigen Horizontalreihen aber entstehen aus ihr, indem man zu allen ihren Charakteristiken je eine der aus der Basis $(\varrho_1), (\varrho_2), \ldots, (\varrho_p)$ gebildeten Untergruppe, die in der ersten Verticalreihe steht, addirt. Jede solche Horizontallinie heisse ein *Charakteristikensystem* vom Grade n^p*), und das ganze quadratische Schema ein *Complex* von Charakteristikensystemen $n^{p\text{ten}}$ Grades. Somit enthält jeder Complex an seiner Spitze eine *Gruppe* und ausserdem $n^p - 1$ eigentliche Systeme.

Für die späteren Anwendungen ist eine kürzere Bezeichnungsweise vorzuziehen, die man erhält, indem man den Charakteristiken der ersten Zeile und der ersten Colonne des Schema's durchlaufende Indices beilegt. Die Gruppe erhält dann folgende Darstellung:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{cccc} (1) & (\nu_1) & (\nu_2) & \ldots & (\nu_{n^p}) \\ (\varrho_1) & (\varrho_1\nu_1) & (\varrho_1\nu_2) & \ldots & (\varrho_1\nu_{n^p}) \\ (\varrho_2) & (\varrho_2\nu_1) & (\varrho_2\nu_2) & \ldots & (\varrho_2\nu_{n^p}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varrho_{n^p}) & (\varrho_{n^p}\nu_1) & (\varrho_{n^p}\nu_2) & \ldots & (\varrho_{n^p}\nu_{n^p}) \end{array}$$

Bei dieser Bildungsweise der Systeme ist die Charakteristik (1) ausgezeichnet. Will man aber keine Charakteristik auszeichnen, so ist nach Satz (IV) noch eine andere Bildungsweise der Charakteristikensysteme möglich, indem man die sämmtlichen Charakteristiken auch aus $2p + 1$ *wesentlich unabhängigen* dadurch erhalten kann, dass man nur ihre wesentlichen Combinationen herstellt.

Dann erscheint jede Horizontalreihe unabhängig definirt als die Gesammtheit der wesentlichen Combinationen von $p + 1$ wesentlich unabhängigen Charakteristiken und wird aus der entsprechenden Horizontalreihe des Schema (I) erhalten, indem man eine neue Charakteristik (σ) hinzunimmt und jede Charakteristik $(\varkappa)$ desselben durch jene Grösse $(\varkappa)$, $(\varkappa\sigma)$, $(\varkappa\sigma^2) \ldots (\varkappa\sigma^{n-1})$ ersetzt, die eine wesentliche Combination ist**). Ein solches System für $p = 1$ und $n = 3$ ist z. B. $(\nu_1), (\nu_2), (\nu_3), (\nu_1^2\nu_2^2), (\nu_1^2\nu_3^2), (\nu_2^2\nu_3^2), (\nu_1^2\nu_2\nu_3), (\nu_1\nu_2^2\nu_3), (\nu_1\nu_2\nu_3^2)$.

*) Herr Prym nennt in seinen „Untersuchungen über die Riemann'sche ϑ-Formel" pag. 56 (für $n = 2$) eine Gruppe vom Grade 2^m, die wie die obige aus m Basischarakteristiken gebildet ist, ein vollständiges System.

**) Ein solches System nennt Hr. Frobenius ein vollständiges System. Dasselbe geht in eine Gruppe über, wenn es die Charakteristik (1) enthält; vgl. auch die Anmerkung des Hrn. Noether zu meiner Note in den Sitzungsberichten der phys. med. Societät zu Erlangen 1886.

§ 5.

Untergruppen.

Die Untergruppen der Additionsgruppe vom Grade n^{2p} sind sämmtlich vom Grade n^λ, $\lambda < 2p$, und die Anzahl der gleichberechtigten Untergruppen vom Grade n^λ ist

$$A_n = \frac{(n^{2p}-1)(n^{2p-1}-1)\cdots(n^{2p-\lambda+1}-1)}{(n^\lambda-1)(n^{\lambda-1}-1)\ldots(n-1)}.$$

Eine Untergruppe vom Grade n^λ besteht nämlich nach Satz (II) aus den Combinationen von λ unabhängigen Charakteristiken, die für sie eine Basis bilden. Sind diese $(v_1), (v_2), \ldots, (v_\lambda)$, so kann man (v_1) auf n^{2p-1} Arten wählen, da die Identität (1) nicht als Basischarakteristik gelten kann, dann bleiben zur Wahl von (v_2) noch $n^{2p} - n$ Charakteristiken übrig, da $(v_1), (v_1^2), \ldots, (v_1^{n-1})$ als von einander abhängig auszuschliessen sind. Zur Wahl von (v_3) sind dann noch $n^{2p} - n^2$ unabhängige Charakteristiken über, da die n^2 aus (v_1) und (v_2) gebildeten als von einander abhängig wieder ausgeschlossen werden müssen. Endlich bleiben nach der Wahl von $(v_{\lambda-1})$ noch $n^{2p} - n^{\lambda-1}$ unabhängige Charakteristiken übrig, aus denen man (v_λ) auswählen kann, und folglich lassen sich die unabhängigen Charakteristiken $(v_1), (v_2), \ldots, (v_\lambda)$ auf

$$(n^{2p}-1)\ (n^{2p}-n)\ (n^{2p}-n^2)\ \ldots\ (n^{2p}-n^{\lambda-1})$$

Arten wählen.

Die hierdurch erhaltenen Gruppen sind jedoch nicht alle verschieden, denn aus den in einer bestimmten Gruppe enthaltenen n_λ Charakteristiken kann man (v_1) selbst auf $n^\lambda - 1$ Arten, (v_2) auf $n^\lambda - n$, u. s. w. (v_λ) auf $n^\lambda - n^{\lambda-1}$ Arten auswählen, somit ist die Zahl der verschiedenen Untergruppen

$$\frac{(n^{2p}-1)(n^{2p}-n)(n^{2p}-n^2)\ldots(n^{2p}-n^{\lambda-1})}{(n^p-1)(n^p-n)(n^p-n^2)\ldots(n^p-n^{\lambda-1})},$$

welche Formel sich leicht auf A_n reducirt. Zu jeder Untergruppe von n^λ Charakteristiken gehören $n^{2p-\lambda}$ Systeme von je n^λ Charakteristiken; diese bilden mit der Gruppe einen Complex von Systemen, der ähnlich wie der Complex pag. 71 angeordnet werden kann, indem man an seine Spitze die Gruppe vom Grade n^λ stellt. Da ferner die Anzahl der Complexe gleich der Anzahl der gleichberechtigten Untergruppen ist, so beträgt die Gesammtzahl aller Charakteristikensysteme von n^λ Gliedern, die Gruppe mit eingeschlossen,

$$B_n = n^{2p-\lambda} \cdot \frac{(n^{2p}-1)(n^{2p-1}-1)\ldots(n^{2p-\lambda+1}-1)}{(n^\lambda-1)(n^{\lambda-1}-1)\ldots(n-1)}.$$

Zwischen den Charakteristiken einer Gruppe vom Grade n^λ bestehen noch einige wichtige Sätze, die eine Eintheilung dieser Gruppen ermöglichen, und daher hier folgen mögen.

§ 6.

Beziehungen zwischen den Charakteristiken einer Untergruppe.

(XIII) *Genügen λ unabhängige Charakteristiken der Bedingung*

$$\nu_\alpha|\nu_\beta \equiv 0, \text{ mod. } n, \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = 1, 2, \ldots, \lambda,$$

so erfüllen je zwei Charakteristiken der aus jenen gebildeten Gruppe vom Grade n^λ dieselbe Bedingung.

Denn irgend zwei Charakteristiken der Gruppe haben die Form

$$(\nu_1^{\sigma_1}\nu_2^{\sigma_2}\ldots\nu_\lambda^{\sigma_\lambda}) \quad \text{und} \quad (\nu_1^{\tau_1}\nu_2^{\tau_2}\ldots\nu_\lambda^{\tau_\lambda}),$$

wo die σ_α und τ_α die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ darstellen. Nun ist aber

$$\nu_1^{\sigma_1}\nu_2^{\sigma_2}\ldots\nu_\lambda^{\sigma_\lambda}|\nu_1^{\tau_1}\nu_2^{\tau_2}\ldots\nu_\lambda^{\tau_\lambda} = \nu_1^{\sigma_1}|\nu_2^{\tau_1} + \nu_1^{\sigma_1}|\nu_2^{\tau_2} + \cdots + \nu_\lambda^{\sigma_\lambda}|\nu_\lambda^{\tau_\lambda}$$
$$= \sigma_1\tau_1(\nu_1|\nu_1) + \sigma_1\tau_2(\nu_1|\nu_2) + \cdots + \sigma_\lambda\tau_\lambda(\nu_\lambda|\nu_\lambda) \equiv 0 \text{ mod. } n.$$

Zwei Charakteristiken, die der Bedingung $\nu_\alpha|\nu_\beta \equiv 0$ genügen, heissen nach Frobenius *syzygetisch*, und die Gruppe, deren Charakteristiken diesen Beziehungen Genüge leisten, heisst eine *syzygetische Untergruppe* der Gesammtgruppe G. Analog heisst jede Untergruppe vom Grade n^μ einer beliebigen Gruppe vom Grade n^λ, $(\mu < \lambda)$ eine syzygetische Untergruppe der letzteren, wenn ihre μ Basischarakteristiken den obigen Bedingungen genügen.

(XIV) *Es giebt höchstens $\lambda = p$ unabhängige Charakteristiken, die der Congruenz*

$$\nu_\alpha|\nu_\beta \equiv 0 \text{ mod. } n$$

genügen, oder mit andern Worten, der Grad einer syzygetischen Untergruppe kann höchstens n^p sein. In diesem Falle heisst die Gruppe Goepel'sche Gruppe.

Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich sofort, wenn man beachtet, dass die λ linearen Congruenzen

$$\nu_1|\nu \equiv 0, \quad \nu_2|\nu \equiv 0, \ldots, \nu_\lambda|\nu \equiv 0, \text{ mod. } n$$

nach Satz (I) $n^{2p-\lambda}$ Lösungen haben; nach dem unmittelbar vorhergehenden Satze sind aber die n^λ Combinationen der $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$ solche Lösungen, also existiren ausser diesen noch

$$n^{2p-\lambda} - n^\lambda = n^\lambda(n^{2(p-\lambda)} - 1)$$

von $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$ unabhängige Lösungen, somit muss $\lambda \leqq p$ sein, damit diese Zahl positiv ist, und für $\lambda = p$ sind die Charakteristiken der Goepel'schen Gruppe die einzigen Lösungen der Congruenzen.

§ 7.

Syzygetische Untergruppen.

Wie bereits im vorigen Paragraphen auseinandergesetzt, nennen wir eine Gruppe vom Grade n^λ syzygetisch, wenn zwischen den λ Basischarakteristiken $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$ die Beziehungen

$$\nu_\alpha | \nu_\beta \equiv 0 \bmod . n \quad \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\Big\} = 1, 2, \ldots, \lambda$$

bestehen. Die Anzahl der syzygetischen Untergruppen der Gesammtgruppe G aller n^{2p} Charakteristiken ergiebt sich dann ähnlich wie die Formel A_n § 5. Die Basischarakteristik (ν_1) einer solchen Gruppe lässt sich, da (1) auszuschliessen ist, auf $n^{2p} - 1$ Arten wählen, (ν_2) muss dann so bestimmt werden, dass die Congruenz $\nu_1 | \nu_2 \equiv 0$ mod. n befriedigt ist, welche n^{2p-1} Lösungen hat; unter diesen befinden sich jedoch die sämmtlichen aus (ν_1) zu bildenden Charakteristiken: (1), $(\nu_1), (\nu_1^2), \ldots, (\nu_1^{n-1})$, die ausgeschlossen werden müssen, da die Basischarakteristiken von einander unabhängig sein sollen; also kann (ν_2) auf $n^{2p-1} - n$ Weisen gewählt werden. (ν_3) ist dann so zu bestimmen, dass $\nu_3 | \nu_1 \equiv 0$, $\nu_3 | \nu_2 \equiv 0$, und da unter den n^{2p-2} Lösungen dieser Congruenzen nach Satz (XIII) die n^2 Combinationen von (ν_1) und (ν_2) mit enthalten sind, so ist die Wahl von (ν_3) auf $n^{2p-2} - n^2$ Arten möglich; schliesslich ist die Bestimmung von (ν_λ) auf $n^{2p-\lambda+1} - n^{\lambda-1}$ Arten ausführbar, so dass man

$$(n^{2p} - 1)\,(n^{2p-1} - n)\,(n^{2p-2} - n^2) \ldots (n^{2p-\lambda+1} - n^{\lambda-1})$$

Gruppen erhielte. Diese sind aber nicht alle verschieden, sondern aus den Charakteristiken einer solchen Gruppe vom Grade n^λ kann man (ν_1) auf $n^\lambda - 1$ Arten, (ν_2) auf $n^\lambda - n$, endlich (ν_λ) auf $n^\lambda - n^{\lambda-1}$ Weisen auswählen, mithin beträgt die Zahl der verschiedenen Gruppen:

$$C_n = \frac{(n^{2p} - 1)\,(n^{2p-2} - 1)\,(n^{2p-4} - 1) \ldots (n^{2p-2(\lambda-1)} - 1)}{(n^\lambda - 1)\,(n^{\lambda-1} - 1)\,(n^{\lambda-2} - 1) \ldots (n - 1)}.$$

Setzt man $\lambda = p$, so geht nach § 6 Satz (XIV) die Gruppe in eine Goepel'sche Gruppe über, und die Anzahl dieser Gruppen beträgt somit

$$D_n = (n^p + 1)\,(n^{p-1} + 1)\,(n^{p-2} + 1) \ldots (n^2 + 1)\,(n + 1).$$

§ 8.

Charakter der in einer Untergruppe enthaltenen Charakteristiken.

Es entsteht nun die Frage, von welchem Charakter sind die in einer Untergruppe enthaltenen Charakteristiken, wenn die Basischarakteristiken $(\nu_1), (\nu_2), \ldots, (\nu_\lambda)$ gewisse gegebene Charaktere $|\nu_1|, |\nu_2|, \ldots, |\nu_\lambda|$ haben?

Ist $\varphi(\varepsilon)$ die Anzahl der in dieser Gruppe enthaltenen Charakteristiken vom Charakter ε, so haben wir zur Beantwortung dieser Frage nach dem Früheren die Gleichungen:

$$\varphi(0)+\varphi(1) \quad +\cdots+\varphi(n-1)=n^\lambda,$$
$$\varphi(0)+\tau^\delta\varphi(1)+\cdots+\tau^{(n-1)\delta}\varphi(n-1)=\sum\tau^{\delta|\varpi|};\quad \delta=1,2,\ldots,n-1.$$

Hier bezieht sich die Summe auf alle Charakteristiken der Gruppe, welche sämmtlich in der Form

$$(\nu_1^{\sigma_1}\nu_2^{\sigma_2}\ldots\nu_\lambda^{\sigma_\lambda}),\qquad \sigma_\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

enthalten sind.

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems erhält man

$$\varphi(\varepsilon)=n^{\lambda-1}+\frac{1}{n}\left\{\tau^{n-\varepsilon}\sum\tau^{|\varpi|}+\tau^{n-2\varepsilon}\sum\tau^{2|\varpi|}+\cdots+\tau^{n-(n-1)\varepsilon}\sum\tau^{(n-1)|\varpi|}\right\}.$$

$\Sigma\tau^{\delta|\varpi|}$ muss für jeden einzelnen Fall eigens ausgewerthet werden. Wir wollen das Resultat für den Fall, dass $n=3$, und die Gruppe eine syzygetische Untergruppe ist, näher untersuchen.

Befinden sich unter den λ Basischarakteristiken $\varkappa$, für welche $\begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{vmatrix}\equiv\pm1 \bmod 3$ ist, und $\lambda-\varkappa$, für welche $\begin{vmatrix}\nu_\gamma\\ \nu_\delta\end{vmatrix}\equiv0$ ist, dann überzeugt man sich leicht, indem man die Zusammensetzung der einzelnen Charakteristiken aus den Basischarakteristiken (vgl. Schema (I) pag. 71) in's Auge fasst, und $\Sigma\tau^{\delta|\varpi|}$ in der Gestalt schreibt:

$$\sum\tau^{\delta|\varpi|}=\sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\lambda}\tau^{\delta\left\{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\sigma_\alpha^2|\nu_\alpha|+2\sigma_\alpha\sigma_\beta\sum_{\alpha,\beta}\left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{smallmatrix}\right|\right\}},$$

dass

$$\sum\tau^{\delta|\varpi|}=2\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa}\left\{\tau^{\delta|\nu_\alpha|}(1-\tau^{\delta|\nu_1|})(1-\tau^{\delta|\nu_2|})\ldots(1-\tau^{\delta|\nu_{\alpha-1}|})\right\}$$
$$+\prod_{\alpha=\varkappa+1}^{\alpha=\lambda}(1+2\tau^{\delta|\nu_\alpha|}),\quad \delta=\pm1$$

wird. Dabei ist zu beachten, dass $(\nu_0)=(\nu_{1+\lambda})=(\nu_{2+\lambda})=\cdots=(1)$ zu setzen ist.

Ist nun in dieser Formel

(I) $\varkappa=0$, d. h. stehen alle Basischarakteristiken in der Beziehung $\begin{vmatrix}\nu_\gamma\\ \nu_\delta\end{vmatrix}\equiv0$, so fällt die Summe weg, und es wird

$$\sum\tau^{\delta|\varpi|}=\prod_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda}(1+2\tau^{\delta|\nu_\alpha|}).$$

Ist aber

(II) $\varkappa = \lambda$, d. h. stehen alle Basischarakteristiken in der Beziehung $\left|\begin{matrix}\nu_\alpha \\ \nu_\beta\end{matrix}\right| \equiv \pm 1$, so wird das zweite Glied $= 1$, und es folgt

$$\sum \tau^{\vartheta|\varpi|} = 1 + 2\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \left\{\tau^{\vartheta|\nu_\alpha|}(1-\tau^{\vartheta|\nu_1|}) \ldots (1-\tau^{\vartheta|\nu_{\alpha-1}|})\right\}.$$

Den in diesen 2 Formeln enthaltenen Sätzen entnehmen wir folgende zwei:

(1) Sind unter den λ Basischarakteristiken μ vom Charakter

$$\text{Null}: |\nu_1| \equiv |\nu_2| \equiv \cdots \equiv |\nu_\mu| \equiv 0 \mod 3,$$

ι vom Charakter ± 1:

$$|\nu_{\mu+1}| \equiv |\nu_{\mu+2}| \equiv \cdots \equiv |\nu_{\mu+\iota}| \equiv \pm 1 \mod 3,$$

und die übrigen $\lambda - \mu - \iota$ vom Charakter ∓ 1:

$$|\nu_{\mu+\iota+1}| \equiv \cdots \equiv |\nu_\lambda| \equiv \mp 1,$$

so enthält die aus ihnen gebildete Gruppe vom Grade n^λ, von der ersten Gattung:

$$\varphi(0) = 3^{\lambda-1} + 3^{\mu-1}\left(1 + (-1)^{\lambda-\mu}\right)(1 + 2\tau^{\pm 1})^\iota (1 + 2\tau^{\mp 1})^{\lambda-\mu-\iota},$$

von der zweiten Gattung:

$$\varphi(1) = 3^{\lambda-1} - 3^{\mu-1}\left(1 + \left(1 - (-1)^{\lambda-\mu}\right)\tau\right)(1+2\tau^{\pm 1})^\iota (1+2\tau^{\mp 1})^{\lambda-\mu-\iota}$$

und von der dritten Gattung:

$$\varphi(-1) = 3^{\lambda-1} - 3^{\mu-1}\left(1 + \left(1 - (\quad 1)^{\lambda-\mu}\right)\tau\right)(1+2\tau^{\mp 1})^\iota (1+2\tau^{\pm 1})^{\lambda-\mu-\iota}$$

Charakteristiken.

(2) Stehen alle Basischarakteristiken in der Beziehung (II), und ist unter ihnen wenigstens eine vom Charakter Null, etwa (ν_1), so ist

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 3^{\lambda-1} + 2,\\ \varphi(1) &= 3^{\lambda-1} - 1,\\ \varphi(-1) &= 3^{\lambda-1} - 1.\end{aligned}$$

Für $\lambda = p = 2$ liefern die Formeln unmittelbar die Eintheilung der 40 Goepel'schen Gruppen in 4 Classen, wie ich sie diese Annalen Bd. 32, p. 542 zum Zwecke der Ableitung specieller Thetarelationen gegeben habe.

Aehnliche Eintheilungen ergeben sich dann aus obigen Betrachtungen für jedes höhere p.

§ 9.

Die zu einer Untergruppe gehörigen Systeme.

Aus jeder Gruppe N vom Grade n^λ gewinnt man ein System vom selben Grade, indem man zu allen Charakteristiken der Gruppe eine nicht in ihr enthaltene Charakteristik (ϱ) addirt.

Wählt man aus den n^{2p} Charakteristiken μ von einander und von den Charakteristiken der Gruppe N unabhängige: $(\varrho_1), (\varrho_2), \ldots, (\varrho_\mu)$ als eine neue Basis aus, bildet aus ihnen eine Gruppe vom Grade n^μ und addirt jede Charakteristik dieser Gruppe zu der gegebenen Gruppe N, so erhält man einen Complex von n^μ Systemen (die Gruppe mit eingerechnet), deren jedes aus n^λ Charakteristiken besteht. Die Charakteristiken eines solchen Systems

$$(\varrho),\ (\varrho\nu_1),\ (\varrho\nu_2)\ \ldots\ (\varrho\nu_{n^\lambda})$$

(vrgl. Schema (II) § 4) geben zu n combinirt stets eine Charakteristik der Gruppe N und mögen daher *äquivalent**) mod. N heissen, dann sind Charakteristiken zweier verschiedener Systeme des Complexes *nicht äquivalent* zu nennen. Ferner zeigt die Bestimmung der Zahl μ, dass dieselbe an die Grenzen gebunden ist $\mu \leq 2p - \lambda$. Die Anordnung der Systeme eines solchen Complexes ist dieselbe wie die des speciellen Complexes, der in dem Schema § 4 mitgetheilt wurde und für welchen $\lambda = \mu = p$ ist. Da es A_n Untergruppen vom Grade n^λ giebt (§ 5), so giebt es ebensoviele Complexe. Speciell ergiebt sich für die Anzahl der zu den syzygetischen Untergruppen gehörigen Complexe die Zahl C_n (§ 7).

Um den Charakter der in den einzelnen Systemen enthaltenen Charakteristiken zu untersuchen, hat man ebenso zu verfahren, wie in § 8 der Charakter der in einer Gruppe enthaltenen Charakteristiken bestimmt wurde. Man hat nur in dem Ausdrucke

$$\Sigma\tau^{\vartheta|\varpi|}, \quad (\varpi) = (\varrho\nu_1^{\sigma_1}\nu_2^{\sigma_2}\ \ldots\ \nu_\lambda^{\sigma_\lambda}),$$

die Summation auf alle Charakteristiken des betreffenden Systems zu erstrecken, und erhält:

$$\sum \tau^{\vartheta|\varpi|} = \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_\lambda} \tau^{\vartheta\left|\varrho\nu_1^{\sigma_1}\nu_2^{\sigma_2}\cdots\nu_\lambda^{\sigma_\lambda}\right|}$$

$$= \tau^{\vartheta|\varrho|} \cdot \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_\lambda} \tau^{\vartheta\left\{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda}\sigma_\alpha^2|\nu_\alpha| + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda}\sigma_\alpha\left(\left|\frac{\varrho}{\nu_\alpha}\right| + \left|\frac{\nu_\alpha}{\varrho}\right|\right) + \sum_{\alpha,\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \left(\left|\frac{\nu_\alpha}{\nu_\beta}\right| + \left|\frac{\nu_\beta}{\nu_\alpha}\right|\right)\right\}},$$

$$\sigma_\alpha = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} = 1, 2, \ldots, \lambda.$$

Dieser Ausdruck lässt sich dann für jeden bestimmten Modul n unmittelbar auswerthen.

*) Vergl. Frobenius, J. f. M. Bd. 96, pag. 82.

§ 10.

Gruppen und Systeme mit besonderen Eigenschaften.

Ist N eine syzygetische Untergruppe vom Grade n^λ, $n > 2$, deren Basis durch die Charakteristiken (ν_1), (ν_2), . . ., (ν_λ) gebildet wird, so giebt es unter allen n^{2p} Charakteristiken $n^{2p-\lambda}$, die einzeln mit jeder Charakteristik von N syzygetisch sind, denn dazu ist nach dem Früheren nur nöthig, dass irgend eine solche Charakteristik (ξ) den λ Congruenzen genügt $\xi\,|\,\nu_\alpha \equiv 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda$.

Sämmtliche $n^{2p-\lambda}$ Lösungen bilden dann eine Gruppe Γ, von welcher N eine Untergruppe ist. Man kann sich diese Gruppe Γ etwa folgendermassen angeordnet denken:

$$
\left\{\begin{array}{llll}
(1) & (\nu_1) & (\nu_2) & \ldots, (\nu_\lambda) \\
(\varrho_1) & (\varrho_1\nu_1) & (\varrho_1\nu_2) & \ldots, (\varrho_1\nu_\lambda) \\
(\varrho_2) & (\varrho_2\nu_1) & (\varrho_2\nu_2) & \ldots, (\varrho_2\nu_\lambda) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\varrho_s) & (\varrho_s\nu_1) & (\varrho_s\nu_2) & \ldots, (\varrho_s\nu_\lambda)
\end{array}\right\} n^p \qquad \begin{array}{l} l = n^\lambda - 1, \\ s = n^\sigma - 1, \\ p = \sigma + \lambda. \end{array}
$$

$$
(\mathrm{I}) \left\{\begin{array}{llll}
(\varrho_1') & (\varrho_1'\nu_1) & (\varrho_1'\nu_2) & \ldots, (\varrho_1'\nu_\lambda) \\
(\varrho_1'\varrho_1) & (\varrho_1'\varrho_1\nu_1) & (\varrho_1'\varrho_1\nu_2) & \ldots, (\varrho_1'\varrho_1\nu_\lambda) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\varrho_1'\varrho_s) & (\varrho_1'\varrho_s\nu_1) & (\varrho_1'\varrho_s\nu_2) & \ldots, (\varrho_1'\varrho_s\nu_\lambda) \\
(\varrho_2') & (\varrho_2'\nu_1) & (\varrho_2'\nu_2) & \ldots, (\varrho_2'\nu_\lambda) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\varrho_s') & (\varrho_s'\nu_1) & (\varrho_s'\nu_2) & \ldots, (\varrho_s'\nu_\lambda) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\varrho_s'\varrho_s) & (\varrho_s'\varrho_s\nu_1) & (\varrho_s'\varrho_s\nu_2) & \ldots, (\varrho_s'\varrho_s\nu_\lambda)
\end{array}\right\} n^p(n^\sigma - 1)
$$

Bezeichnet man die Gruppe (in der 1. Verticalreihe oberhalb des Striches): (1), (ϱ_1), (ϱ_2), . . ., (ϱ_s) mit P, so ist zu bemerken, dass P aus den $n^{2p-\lambda}$ Charakteristiken stets so ausgewählt werden kann, dass ihre Elemente selbst unter sich syzygetisch sind. Eine solche Auswahl ist nach Satz (XI) immer möglich. Die aus den (ϱ) und der Gruppe N gebildete Untergruppe (oberhalb des Striches) ist dann eine Goepel'sche Gruppe (vom Grade n^p). Die übrigen $n^p(n^\sigma - 1)$ Charakteristiken (unter dem Striche) können dann nicht alle mit sämmtlichen Charakteristiken von P syzygetisch sein, denn wäre dies der Fall, so wären sofort die Charakteristiken, die in der ersten Verticalreihe unter dem Striche stehen, und somit und in Folge der Congruenzen

$\varrho_\alpha \mid \nu_\beta \equiv 0$, $\varrho'_\alpha \mid \nu_\beta \equiv 0$ auch alle $n^p(n^\sigma - 1)$ unter dem horizontalen Striche stehenden Charakteristiken von Γ mit den $\lambda + \sigma = p$ Basischarakteristiken von N und P syzygetisch, während es doch zu p unabhängigen Charakteristiken nur wieder n^p syzygetische Charakteristiken giebt.

Schreibt man jetzt die in der ersten Verticalreihe der Gruppe Γ stehende Gruppe von $n^{2\pi}$ Charakteristiken, die R heissen möge, indem man die Gruppe P an die Spitze stellt, in der Form

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} (1), & (\varrho_1), & (\varrho_2), & \dots, (\varrho_s), \\ (\varrho_1'), & (\varrho_1'\varrho_1), & (\varrho_1'\varrho_2), & \dots, (\varrho_1'\varrho_s), \\ (\varrho_2'), & (\varrho_2'\varrho_1), & (\varrho_2'\varrho_2), & \dots, (\varrho_2'\varrho_s), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varrho_s'), & (\varrho_s'\varrho_1), & (\varrho_s'\varrho_2), & \dots, (\varrho_s'\varrho_s), \end{cases}$$

so erkennt man sofort die Richtigkeit des Satzes:

(XV) *Wenn* (ξ) *alle Charakteristiken der Gruppe* R *durchläuft, so ist* $\sum_\xi \tau^{\varrho_\mu \mid \xi} = 0$.

Denn es ist:

$$\sum_\xi \tau^{\varrho_\mu \mid \xi} = \left(1 + \tau^{\varrho_\mu \mid \varrho_1} + \dots + \tau^{\varrho_\mu \mid \varrho_s}\right)\left(1 + \tau^{\varrho_\mu \mid \varrho_1'} + \dots + \tau^{\varrho_\mu \mid \varrho_s'}\right)$$
$$= n^\sigma \left(1 + \tau^{\varrho_\mu \mid \varrho_1'} + \dots + \tau^{(n-1)(\varrho_\mu \mid \varrho_1')}\right) \dots$$
$$\dots \left(1 + \tau^{\varrho_\mu \mid \varrho_\sigma'} + \dots + \tau^{(n-1)(\varrho_\mu \mid \varrho_\sigma')}\right),$$

wenn man für einen Augenblick die Charakteristiken $(\varrho_1') \cdots (\varrho_s')$ in der bekannten Weise aus den σ Basischarakteristiken $(\varrho_1'), (\varrho_2') \cdots (\varrho_\sigma')$ sich gebildet denkt. Von den Klammerfactoren sind aber nach dem Vorstehenden einige $= 0$, nämlich jene, für welche $\varrho_\mu \mid \varrho_\alpha' \not\equiv 0$ ist. Die in dem Schema (I) in jeder Horizontalreihe stehenden Charakteristiken sind unter sich äquivalent mod. N. Betrachtet man nur die nichtäquivalenten Lösungen als verschieden, so enthält jede Verticalreihe des Schemas ein System von $n^{2\sigma}$ solchen nicht äquivalenten Lösungen, unter denen sich in der ersten Verticalreihe die Gruppe R befindet. Somit gehen aus der Gruppe Γ n^λ solche Charakteristikensysteme hervor. Für jedes solche System folgt dann, wie für die Gruppe, der Satz:

(XVI) $\sum_\xi \tau^{\varrho_\mu \varpi \mid \xi} = 0$, *wenn* (ϖ) *irgend eine Charakteristik der Gruppe* N *bedeutet, und* (ξ) *alle Charakteristiken von* R *durchläuft, während im gleichen Falle* $\sum \tau^{\varpi \mid \xi} = n^{2\sigma}$ *ist.*

Diese Sätze entsprechen dem Satze (XI) und gehen in denselben über, wenn die Gruppe N sich auf die Identität reducirt.

Für specielle Untersuchungen ist noch die Frage von Interesse, wie beschaffen die Gruppe N sein muss, damit die untereinander äquivalenten Charakteristiken alle denselben Charakter haben, und von welchem Charakter in diesem Falle die Charakteristiken der Gruppe R sind?

Ist (ξ) irgend eine Charakteristik der Gruppe Γ, und

$$(\varpi) = \begin{pmatrix} \nu_1^{\sigma_1} & \nu_2^{\sigma_2} & \cdots & \nu_\lambda^{\sigma_\lambda} \end{pmatrix}$$

irgend eine der Gruppe N, so hat (ξ) in diesem Falle die Congruenzen zu befriedigen

$$|\xi\varpi| \equiv |\xi| \text{ mod. } n.$$

Dies giebt entwickelt:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \left\{ \sigma_\alpha^2 |\nu_\alpha| + \sigma_\alpha \left(\begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{vmatrix} \right) \right\} + \sum_{\alpha,\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta \left(\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \right) = 0.$$

Setzt man hier alle $\sigma = 0$ bis auf ein bestimmtes, etwa σ_β, so kommt

$$\sigma_\beta^2 |\nu_\beta| + \sigma_\beta \left(\begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \xi \end{vmatrix} \right) \equiv 0 \text{ mod. } n, \ \sigma_\beta = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Also hat man die Congruenzen:

$$|\nu_\beta| + \begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \xi \end{vmatrix} \equiv 2^2 |\nu_\beta| + 2 \left(\begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \xi \end{vmatrix} \right) \equiv \cdots \equiv (n-1)^2 |\nu_\beta|$$
$$+ (n-1) \left(\begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \xi \end{vmatrix} \right) \equiv 0.$$

Diese können aber für $n > 2$ nur neben einander bestehen, wenn

$$|\nu_\beta| \equiv 0 \text{ und } \begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \xi \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ mod. } n, \ \beta = 1, 2, \cdots, n-1.$$

ist. Setzt man ferner alle $\sigma = 0$ ausser zwei bestimmten, etwa σ_α, σ_β, so kommt:

$$\sigma_\alpha^2 |\nu_\alpha| + \sigma_\beta^2 |\nu_\beta| + \sigma_\alpha \left(\begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{vmatrix} \right) + \sigma_\beta \left(\begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \xi \end{vmatrix} \right)$$
$$+ \sigma_\alpha \sigma_\beta \left(\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \right) \equiv 0,$$

eine Congruenz, die sich unter Beachtung der vorhergehenden sofort auf:

$$\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ mod. } n$$

reducirt. Nun ist aber nach Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \xi \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ mod. } n,$$

also folgt zusammenfassend:

$$|\nu_\alpha| \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ und } \begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ mod. } n,$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots, \lambda,$$

während $|\xi|$ nacheinander die Werthe $0, 1 \ldots n-1$ annimmt. Demnach beträgt die Anzahl der Bedingungen, denen die Charakteristiken (ξ) der Gruppe Γ genügen müssen, 2λ, somit ist nur dann eine Gruppe Γ vom Grade $n^{2p-\lambda}$ möglich, wenn λ dieser Bedingungsgleichungen durch die Wahl der Basischarakteristiken (ν_α) identisch befriedigt sind. Dies tritt aber, wie ein Blick auf die letzten Congruenzen zeigt, nur dann ein, wenn die (ν_α) aus den $2(n^p-1)$ Charakteristiken entnommen werden, die die Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_p \\ 0, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \cdots, & \alpha_p' \end{pmatrix}$$

haben.

Für $n > 2$ gehört also nur zu den aus solchen Basischarakteristiken gebildeten syzygetischen Untergruppen eine Gruppe Γ, in welcher die äquivalenten Charakteristiken gleichen Charakter haben.

Ein interessantes Resultat liefert noch die Untersuchung der Anzahl der Charakteristiken vom Charakter $\varepsilon = 0, 1, \ldots, n-1$, die in der Gruppe R oder in einem dieser Systeme enthalten sind.

Zur Entwickelung dieser Anzahl bedienen wir uns einer ähnlichen Methode wie sie in § 3 angewendet wurde.

Da nämlich die Charakteristiken (ξ) den $\lambda + 1$ Bedingungen

oder
$$\begin{vmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0, \quad |\xi| \equiv \varepsilon, \qquad \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{vmatrix} \equiv 0, \quad |\xi| \equiv \varepsilon, \qquad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \cdots, \lambda, \\ \varepsilon = 0, 1, \cdots, n-1. \end{cases}$$

genügen müssen, und je n^λ Charakteristiken von gleichem Charakter ein System bilden, so besteht die Gleichung

$$n^{2\lambda+1}\left(\varphi(0) + \tau^\delta \varphi(1) + \cdots + \tau^{(n-1)\delta}\varphi(n-1)\right) = S_0 + \tau^\delta S_1 + \cdots + \tau^{(n-1)\delta} S_{n-1},$$

wo

$$S_\varepsilon = \sum_\xi \Big[(1 + \tau^{|\xi|-\varepsilon} + \tau^{2(|\xi|-\varepsilon)} + \ldots + \tau^{(n-1)(|\xi|-\varepsilon)}) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \left(1 + \tau^{\left|\begin{smallmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{smallmatrix}\right|} + \ldots + \tau^{(n-1)\left(\left|\begin{smallmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{smallmatrix}\right|\right)}\right) \Big]$$

ist, $\varphi(\varepsilon)$ die Anzahl der nicht äquivalenten Charakteristiken vom Charakter ε bedeutet, und δ die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ durchläuft. Die Summe ist über alle n^{2p} Charakteristiken (ξ) auszudehnen. Dann liefert die Entwicklung des Productes rechter Hand

1) das Glied $\sum_{\xi}(1) = n^{2p}$,

2) Glieder von der Form: $\sum_{\xi} \tau^{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} s_\alpha \left(\left| \begin{smallmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{smallmatrix} \right| \right)}$, die nach Satz (X) verschwinden, und

3) Glieder von der Form: $\sum_{\xi} \tau^{s'(|\xi|-\delta) \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} s_\alpha \left(\left| \begin{smallmatrix} \xi \\ \nu_\alpha \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \nu_\alpha \\ \xi \end{smallmatrix} \right| \right)}$, die gemäss Satz (IX) den Werth

$$n^p(\tau^{-s} + \tau^{-2s} + \cdots + \tau^{-(n-1)s})$$

annehmen. Beachtet man noch die Anzahl der auftretenden Glieder von jeder Gattung, so hat man:

$$S_s = n^{2p} + n^{\lambda+p}(\tau^{-s} + \tau^{-2s} + \cdots + \tau^{-(n-1)s}).$$

Da nun der Klammerausdruck für $\varepsilon = 0$ mit $n-1$ congruent ist, sonst aber den Werth -1 annimmt, so ergiebt sich hieraus:

$$\varphi(0) + \tau^\delta \varphi(1) + \cdots + \tau^{(n-1)\delta}\varphi(n-1) = n^{2\sigma-1}(1 + \tau^\delta + \cdots + \tau^{(n-1)\delta}) + n^{\sigma-1}\left(n - 1 - (\tau^\delta + \cdots + \tau^{(n-1)\delta})\right),$$

und wenn man für δ alle Werthe $0, 1, \ldots, n-1$ einführt, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) + \varphi(1) &\quad + \cdots + \varphi(n-1) &&= n^{2\sigma}, \\
\varphi(0) + \tau\varphi(1) &\quad + \cdots + \tau^{n-1}\varphi(n-1) &&= n^{\sigma}, \\
\vdots &\quad \vdots \qquad\qquad \vdots &&\quad \vdots \\
\varphi(0) + \tau^{n-1}\varphi(1) &\quad + \cdots + \tau^{(n-1)^2}\varphi(n-1) &&= n^{\sigma},
\end{aligned}$$

und hieraus:

$$\varphi(0) = n^{\sigma-1}(n^\sigma + n - 1), \quad \varphi(\varepsilon) = n^{\sigma-1}(n^\sigma - 1), \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Also hat man unter den gemachten Voraussetzungen den Satz:

(XVII) *Die Gruppe R und die ihr äquivalenten Systeme vom Grade $n^{2\sigma}$ besitzen stets soviele Charakteristiken von demselben Charakter als es überhaupt σ-reihige Charakteristiken dieses Charakters giebt.**)

---

*) Der analoge Satz für den Modul 2 wurde von H. Frobenius, J. f. M. Bd. 96, pag. 89 entwickelt.

Ferner folgt dann unmittelbar, dem Satze (XII) analog, dass stets $\sum_{\xi} r^{(\xi)} = n^{\sigma}$ ist, wenn (ξ) alle nicht äquivalenten Charakteristiken eines solchen Systemes durchläuft.

(XVIII) *Die Charakteristiken der Gruppe R oder der ihr äquivalenten Systeme erfüllen also, wenn die Basischarakteristiken* $(\nu_1), (\nu_2) \ldots (\nu_\lambda)$ *von der Form sind*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_p \\ 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \ldots, & \alpha_p \end{pmatrix}$$

genau dieselben Fundamentalbedingungen, wie alle überhaupt vorhandenen σ-reihigen Charakteristiken und sie verhalten sich somit auch untereinander ebenso wie diese.

Ist $\lambda = 0$, so reducirt sich N auf die Identität, es wird $\sigma = p$, die Gruppe R geht in die Gesammtgruppe aller überhaupt vorhandenen p-reihigen Charakteristiken über, und die Sätze (XVI) und (XVII) fallen mit den Sätzen (VII) und (XI) zusammen, während die Gruppe P eine Goepel'sche wird.

II. Abschnitt.

Thetafunctionen.

§ 1.

Thetafunctionen erster Ordnung.

Die vorhergehende Charakteristikentheorie findet, wie schon in der Einleitung bemerkt, ihre hauptsächlichste Anwendung bei der Bildung der Thetaformeln. Wir werden uns im Folgenden jedoch nur auf die Bildung der Hauptformel beschränken und schicken einige zum Verständniss nothwendige Definitionen und Beziehungen voraus.

Die ϑ-Function erster Ordnung, die unseren Betrachtungen zu grunde liegt, ist definirt durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \vartheta(1)(u) = \vartheta(1)(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{i\pi \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2i\pi \sum_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu u_\mu},$$

$a_{\mu\mu'}$ heissen die ϑ-Moduln und genügen der Bedingung:

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu},$$

während der imaginäre Theil von $\sum\sum a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ eine wesentlich negative quadratische Form sein muss, damit die ϑ-Reihe convergirt.

Wir ordnen nun den n^{2p} p-reihigen Charakteristiken, (1) mitgerechnet, die n^{2p} möglichen Systeme von *Periodenenteln* zu, indem wir setzen:

$$\alpha = \frac{\alpha'_\mu}{n} + \frac{1}{n}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \alpha_{\mu'}\, a_{\mu\mu'}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, p$$

(dem (1) entsprechen dann die Werthe $\alpha'_\mu = 0$, $\alpha_{\mu'} = 0$), dann wird

$$\vartheta(1)(u+\alpha) = e^{-\left\{\frac{i\pi}{n^2}\sum_\mu\sum_{\mu'} \alpha_{\mu\mu'}\alpha_\mu\alpha_{\mu'} + \frac{2i\pi}{n}\sum_\mu \alpha_\mu\left(u_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{n}\right)\right\}} \vartheta(\alpha)(u),$$

oder wenn

$$(2) \qquad \Omega_\alpha = \frac{i\pi}{n^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\alpha_\mu\alpha_{\mu'} + \frac{2i\pi}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\alpha_\mu\left(u_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{n}\right)$$

gesetzt wird:

$$(3) \qquad \vartheta(\alpha)(u) = e^{\Omega_\alpha}\vartheta(1)(u+\alpha),$$

während $\vartheta(\alpha)$ durch die Gleichung

$$(4) \qquad \vartheta(\alpha)(u)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\cdots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{i\pi\left\{\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu+\frac{\alpha_\mu}{n}\right)\left(m_{\mu'}+\frac{\alpha_{\mu'}}{n}\right)+2\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu+\frac{\alpha_\mu}{n}\right)\left(u_\mu+\frac{\alpha'_\mu}{n}\right)\right\}}$$

definirt ist. Dieselbe geht für $\alpha'_\mu = 0$, $\alpha_{\mu'} = 0$ d. h. $(\alpha) = (1)$ in Gleichung (1) über. Diese ϑ-Function genügt den Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \vartheta(\alpha)(u_1, \ldots, u_\nu + 1, \ldots, u_p) = e^{\frac{2\alpha_\nu}{n}\pi i}\vartheta(\alpha)(u_1, \ldots, u_\nu \ldots u_p), \\ \vartheta(\alpha)(u_1 + a_{1\nu}, \ldots, u_p + a_{p\nu}) = e^{-\left(2u_\nu + a_{\nu\nu} + 2\frac{\alpha'_\nu}{n}\right)\pi i}\vartheta(\alpha)(u_1 \ldots u_p). \end{cases}$$

Der Additionsgruppe der Thetacharakteristiken entspricht dann die Additionsgruppe der n^{2p} Periodenentel, welche die ϑ-Functionen in einander überführt.

Lässt man jetzt in Gleichung (4) die Argumente u, um irgend ein Periodenentel, etwa

$$\beta = \frac{\beta'_\mu}{n} + \frac{1}{n}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\beta_{\mu'}\, a_{\mu\mu'} \quad \mu = 1, 2, \ldots, p,$$

wachsen, so kommt, wenn λ irgend eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ bedeutet:

(6) $$\vartheta(\alpha)(u+\lambda\beta) = \vartheta(\alpha\beta^{\lambda})(u)\cdot e^{-\frac{i\pi\lambda^2}{n^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'}-\frac{2i\pi\lambda}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\beta_\mu\left(u_\mu+\frac{\alpha'_\mu}{n}+\frac{\lambda\beta_\mu}{n}\right)},$$

ferner folgt aus Gleichung (4)

(7) $$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\pm n,\ldots,\alpha_p\\ \alpha'_1,\ldots,\alpha'_\nu,\ \ldots,\alpha'_p\end{pmatrix}(u) = \vartheta(\alpha)(u),$$

(8) $$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu,\ \ldots,\alpha_p\\ \alpha'_1,\ldots,\alpha'_\nu\pm n,\ldots,\alpha'_p\end{pmatrix}(u) = e^{\pm\frac{2\alpha_\nu}{n}\pi i}\vartheta(\alpha)(u),$$

(9) $$\vartheta(\alpha)(-u) = \vartheta(-\alpha)(u) = \vartheta(\alpha^{n-1})(u).$$

Mit Hilfe der Gleichungen (7) und (8) erhält man dann für $\lambda = n$ aus (6), d. h. für die Aenderung der Argumente um eine ganze Periode:

(10) $$\vartheta(\alpha+n\beta)(u) = \vartheta(\alpha)(u)\cdot e^{-i\pi\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'}-2i\pi\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\beta_\mu u_\mu+\frac{2i\pi}{n}(\alpha|\beta)}.$$

§ 2.

Thetafunctionen n^{ter} Ordnung.

Wir beweisen nun den für das Folgende fundamentalen Satz*)

Versteht man unter $\Theta(u)$ *irgend eine* ϑ*-Function* n^{ter} *Ordnung, die sich bei Vermehrung der Argumente um ganze Perioden ebenso ändert wie* $\vartheta^n(\alpha)(u)$ *nach Gleichung* (10) *und ausserdem die Periodenentel*

$$\beta = \frac{\beta'_\mu}{n}+\frac{1}{n}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\beta_{\mu'}a_{\mu\mu'}; \qquad \gamma = \frac{\gamma'_\mu}{n}+\frac{1}{n}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\gamma_{\mu'}a_{\mu\mu'}$$

zu Perioden hat, so sind die denselben entsprechenden Charakteristiken (β) *und* (γ) *syzygetisch, d. h. es ist* $\beta\,|\,\gamma \equiv 0$ *mod. n.*

Zum Beweise beachte man, dass nach Gleichung (10):

(11) $$\Theta(u+n\beta) = \Theta(u)e^{-n\pi i\sum_{\mu}\sum_{\mu'}a_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'}-2ni\pi\sum_{\mu}\beta_\mu u_\mu}.$$

ist. Um $\Theta(u+\beta)$ zu bestimmen, bilden wir uns $\Theta(u+n\beta)$ noch auf eine zweite Art, indem wir setzen:

$$\Theta(u+\beta) = e^{x+\sum_{\mu}a_\mu u_\mu}\Theta(u),$$

wo x und a_μ zu bestimmende Constante sind; hieraus ergiebt sich,

*) Vgl. Frobenius, J. f. M. Bd. 96, pag. 91 u. s. f., woran sich die Entwicklungen in § 2 und 3 eng anschliessen.

indem wir n mal nacheinander das Argument um β wachsen lassen, schliesslich:

$$\Theta(u+n\beta) = e^{nx+n\sum a_\mu u_\mu + \frac{n-1}{2}\sum a_\mu \frac{\beta'_\mu}{n} + \frac{n-1}{2}\sum_\mu\sum_{\mu'} a_\mu a_{\mu\mu'}\beta_{\mu'}} \Theta(u).$$

Der Vergleich dieses Resultates mit Gleichung (11) ergiebt

$$nx + n\sum_\mu a_\mu u_\mu + \frac{n-1}{2}\sum_\mu a_\mu \beta'_\mu + \frac{n-1}{2}\sum_\mu\sum_{\mu'} a_\mu a_{\mu\mu'}\beta_{\mu'}$$
$$= -ui\pi\sum_\mu\sum_{\mu'} a_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'} - 2ni\pi\sum\beta_\mu u_\mu.$$

Setzt man hier $a_\mu = -2i\pi\beta_\mu$, so kommt:

$$x = \frac{n-1}{n} i\pi \sum_\mu \beta_\mu \beta'_\mu - \frac{i\pi}{n}\sum_\mu\sum_{\mu'} a_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'},$$

und somit wird:

$$\Theta(u+\beta) = c^{\frac{n-1}{2}|\beta|} \cdot e^{-\frac{i\pi}{n}\sum_\mu\sum_{\mu'} a_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'} - 2i\pi\sum_\mu \beta_\mu u_\mu} \Theta(u), \tag{12}$$

und hieraus, indem man statt $\beta : \beta + \gamma$ setzt:

$$\Theta(u+\beta+\gamma)$$
$$= \tau^{\frac{n-1}{2}|\beta\gamma|} \cdot e^{-\frac{i\pi}{n}\sum_\mu\sum_{\mu'} a_{\mu\mu'}(\beta_\mu+\gamma_\mu)(\beta_{\mu'}+\gamma_{\mu'}) - 2i\pi\sum_\mu(\beta_\mu+\gamma_\mu)u_\mu} \Theta(u). \tag{13}$$

Den Ausdruck für $\Theta(u+\beta+\gamma)$ bilden wir noch einmal, indem wir in (12) u um γ wachsen lassen, dies giebt

$$\Theta(u+\beta+\gamma)$$
$$= \tau^{\frac{n-1}{2}(|\beta|+|\gamma|)-\left|\begin{smallmatrix}\beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right|} \cdot e^{-\frac{i\pi}{n}\sum_\mu\sum_{\mu'} a_{\mu\mu'}(\beta_\mu+\gamma_\mu)(\beta_{\mu'}+\gamma_{\mu'}) - 2i\pi\sum_\mu(\beta_\mu+\gamma_\mu)u_\mu} \Theta(u). \tag{14}$$

Der Vergleich von (13) und (14) giebt jetzt

$$\frac{n-1}{2}|\beta\gamma| \equiv \frac{n-1}{n}(|\beta| + |\gamma|) - \left|\begin{smallmatrix}\beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right|,$$

und durch Entwicklung der Symbole: $\left|\begin{smallmatrix}\beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right| \equiv \left|\begin{smallmatrix}\gamma\\ \beta\end{smallmatrix}\right|$ oder $\beta\,|\,\gamma \equiv 0 \bmod. n$.

Wenn also eine Thetafunction n^{ter} Ordnung gewisse n-tel Perioden zu Perioden hat, so bilden die diesen Perioden entsprechenden Charakteristiken eine syzygetische Gruppe. Auf diese Gruppe basiren wir die Aufstellung einer allgemeinen Θ-Formel.

§ 3.

Aufstellung einer Fundamentalformel.

Bezeichnen wir mit $\Theta(\varrho)(u, v)$ die Thetafunction

$$(15)\quad \Theta(\varrho)(u,v) = \sum_{\beta=0}^{\beta=n^{\lambda}-1} \tau^{\frac{n-1}{2}|\nu_\beta| - \left|\begin{smallmatrix}\nu_\beta\\ \varrho\end{smallmatrix}\right|} \vartheta(\varrho\nu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)\cdots(u-v_n),$$

wo $(\nu_0) = (1)$, $(\nu_1)\cdots(\nu_{n^\lambda-1})$ eine syzygetische Untergruppe N vom Grade n^λ bedeutet, wie sie im § 10 betrachtet wurde, wo ferner statt $\vartheta(\varrho\nu_\beta)(u-v_1)\,\vartheta(\varrho\nu_\beta)(u-v_2)\cdots\vartheta(\varrho\nu_\beta)(u-v_n)$ der Buchstabe ϑ nur einmal geschrieben und statt der p Argumente

$$u_1 - v_1^{(1)},\ u_2 - v_1^{(2)},\ \cdots,\ u_p - v_1^{(p)} \text{ nur } u - v_1$$

gesetzt wurde. Es mögen dann noch die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} + v_2^{(1)} + \cdots + v_n^{(1)} &= 0,\\ v_1^{(2)} + v_2^{(2)} + \cdots + v_n^{(2)} &= 0,\\ \vdots\quad\ \vdots\quad\ &\quad\ \vdots\\ v_1^{(p)} + v_2^{(p)} + \cdots + v_n^{(p)} &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen wir unter diesen Voraussetzungen zunächst den Werth von $\Theta(\varrho)(u+\nu_\varkappa, v)$, wo $(\nu_\varkappa)$ irgend eine Charakteristik der Gruppe N ist, so finden wir mit Beachtung der Gleichung (6) (für $\lambda=1$):

$$\Theta(\varrho)(u+\nu_\varkappa, v)$$
$$= \psi_\varkappa \sum_\beta \left[e^{-\frac{2i\pi}{n}\left\{\left|\begin{smallmatrix}\nu'_\beta & \nu_\varkappa\\ \varrho\end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix}\nu_\varkappa\\ \nu_\beta\end{smallmatrix}\right| - \frac{n-1}{2}|\nu_\beta|\right\}} \vartheta(\varrho\nu_\beta\nu_\varkappa)(u-v_1)\cdots(u-v_n)\right],$$

wo

$$(15\,a)\qquad \psi_\varkappa = e^{-2i\pi\sum_\mu \nu_{\varkappa_\mu} u_\mu + \frac{i\pi}{n}\sum_\mu\sum_{\mu'} a_{\mu\mu'}\nu_{\varkappa_\mu}\nu_{\varkappa_{\mu'}}} \tau^{-|\nu_\varkappa|},$$

bedeutet, ein Factor, der nur von u und $(\nu_\varkappa)$ abhängt. Setzt man hier statt (ν_β): $(\nu_\beta\nu_\varkappa^{n-1}) = (\nu_\beta) - (\nu_\varkappa)$, was nur einer Verschiebung der Summation entspricht, so erhält man leicht:

$$(16)\qquad \Theta(\varrho)(u+\nu_\varkappa, v) = \psi_\varkappa \tau^{-\frac{n-1}{2}|\nu_\varkappa|}\Theta(\varrho)(u, v)$$

(vgl. Gleichung (12)). Bezeichnet jetzt allgemein $\Theta(\varrho)(u)$, eine Thetafunction, die sich bei Vermehrung von u um ganze Perioden um denselben Factor ändert, wie $\vartheta^n(\varrho)(u)$ und bei Vermehrung der Argumente

um n-tel Perioden, die den Charakteristiken der Gruppe N entsprechen, dieselben Factoren erhält, wie $\Theta(\varrho)(u, v)$, so genügt sie der Gleichung

$$\Theta(\varrho)(u+v_\varkappa) = \psi_\varkappa \tau^{-\frac{n-1}{2}|\nu_\varkappa|}\Theta(\varrho)(u). \tag{17}$$

Nach Satz (XIV) Abschnitt I kann man zu den λ unabhängigen Basischarakteristiken der Gruppe N stets $p - \lambda = \sigma$ weitere: (ϱ_1), $(\varrho_2)\ldots(\varrho_\sigma)$ Charakteristiken bestimmen, die unter sich und mit den Charakteristiken (ν_α) syzygetisch sind; diese bilden dann mit (ν_1), $(\nu_2)\ldots(\nu_\lambda)$ zusammen die Basis einer Göpel'schen Gruppe, und wenn man zur Abkürzung mit

$$(1),\ (\nu_1),\ (\nu_2)\ldots(\nu_{n^\lambda-1}),$$

die n^λ Charakteristiken der Gruppe N und mit

$$(1),\ (\varrho_1),\ (\varrho_2)\ldots(\varrho_{n^\sigma-1})$$

die n^σ Charakteristiken der Gruppe P (§ 10) bezeichnet, so ist die Göpel'sche Gruppe dargestellt durch

$$(\nu_\beta\varrho_\alpha);\ \begin{cases}\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ n^\sigma - 1,\\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ n^\lambda - 1\end{cases}$$

(vergl. das Schema (I) pag. 79) und ein Göpel'sches System durch $(\varrho\,\nu_\beta\varrho_\alpha)$. Die Thetafunctionen eines Göpel'schen Systems sind aber linear unabhängig, also lässt sich $\Theta(\varrho)(u)$ durch die n^p linear unabhängigen Functionen

$$\vartheta(\varrho\,\nu_\beta\varrho_\alpha)(u-v_1)(u-v_2)\cdots(u-v_n)$$

mit Coefficienten, die von u unabhängig sind, ausdrücken. Also hat man:

$$\Theta(\varrho)(u) = \sum_\alpha\sum_\beta c_{\alpha\beta}\,\vartheta(\varrho\,\varrho_\alpha\,\nu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)\ldots(u-v_n). \tag{18}$$

Vermehrt man hier u um $\nu_\varkappa$, so kommt mit Beachtung der Gleichung (17) nach einiger Rechnung:

$$\Theta(\varrho)(u) = \sum_\alpha\sum_\beta\left\{c_{\alpha\beta}\tau^{\frac{n-1}{2}|\nu_\varkappa| - \left|\begin{smallmatrix}\nu_\varkappa\\ \varrho\varrho_\alpha\nu_\beta\end{smallmatrix}\right|}\vartheta(\varrho\,\varrho_\alpha\,\nu_\beta\,\nu_\varkappa)(u-v_1)\cdots(u-v_n)\right\}.$$

Lässt man jetzt $\varkappa$ alle Werthe von 0 bis $n^\lambda - 1$ durchlaufen und addirt die sämmtlichen n^λ Gleichungen, so kommt:

$$n^\lambda\Theta(\varrho)(u) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n^\lambda-1}\sum_{\alpha,\beta}\left\{c_{\alpha,\beta}\tau^{\frac{n-1}{2}|\nu_\varkappa| - \left|\begin{smallmatrix}\nu_\varkappa\\ \varrho\varrho_\alpha\nu_\beta\end{smallmatrix}\right|}\vartheta(\varrho\,\varrho_\alpha\,\nu_\beta\,\nu_\varkappa)(u-v_1)\cdots(u-v_n)\right\}.$$

Setzt man hier statt $\nu_\varkappa$: $\nu_\varkappa - \nu_\beta$ und beachtet, dass $\nu_\beta \mid \nu_\varkappa \equiv 0$ ist, so kommt:

$$n^2\,\Theta(\varrho)(u)$$

$$=\sum_{\varkappa}\sum_{\alpha,\beta}\left\{\tau^{-\frac{n-1}{2}|\nu_\beta|+\left|\begin{smallmatrix}\nu_\beta\\ \varrho\varrho_\alpha\end{smallmatrix}\right|}\cdot\tau^{\frac{n-1}{2}|\nu_\varkappa|-\left|\begin{smallmatrix}\nu_\varkappa\\ \varrho\varrho_\alpha\end{smallmatrix}\right|}c_{\alpha,\beta}\vartheta(\varrho\varrho_\alpha\nu_\varkappa)\,(u-v_1)\cdots(u-v_n)\right\}.$$

Da nun β nicht mehr in den Charakteristiken der ϑ-Functionen vorkommt, so kann man

$$\sum_{\beta}\tau^{\left|\begin{smallmatrix}\nu_\beta\\ \varrho\varrho_\alpha\end{smallmatrix}\right|-\frac{n-1}{2}|\nu_\beta|}c_{\alpha,\beta}=n^2\,C_\alpha$$

setzen und bekommt so:

$$\Theta(\varrho)(u)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n^\sigma-1}C_\alpha\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n^\lambda-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\nu_\varkappa|-\left|\begin{smallmatrix}\nu_\varkappa\\ \varrho\varrho_\alpha\end{smallmatrix}\right|}\vartheta(\varrho\varrho_\alpha\nu_\varkappa)\,(u-v_1)\cdots(u-v_n),$$

oder mit Berücksichtigung der Definitionsgleichung (15)

$$\Theta(\varrho)(u)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n^\sigma-1}C_\alpha(\varrho\varrho_\alpha)\,(u,v). \tag{19}$$

Hiedurch ist die beliebige Θ-Function n^{ter} Ordnung $\Theta(\varrho)(u)$ von den oben erwähnten Eigenschaften durch n^σ von einander linear unabhängige Thetafunctionen $\Theta(\varrho\varrho_\alpha)\,(u,v)$ derselben Gattung ausgedrückt, und es lässt sich auf die nämliche Weise jede Thetafunction dieser Art durch n^σ linear unabhängige unter ihnen darstellen, so dass zwischen je $n^\sigma+1$ derselben eine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht.

§ 4.

Constantenbestimmung.

Es sei dem Vorhergehenden zufolge

$$C\,.\,\Theta(\varrho)(u,v)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n^\sigma-1}C_\alpha\Theta(\varrho\varrho_\alpha)\,(u,b), \tag{20}$$

wo C und C_α von u unabhängige Constante sind, und die b denselben Bedingungen genügen wie die v, pag. 88. Hier durchläuft (ϱ_α) die Gruppe P, § 10, I. Abschnitt, oder $(\varrho\varrho_\alpha)$ ein zu dieser Gruppe gehöriges System.

Setzt man dann statt u, $a+\varrho_\beta$*), wo a eine willkürliche Con-

*) Die hier zur Bestimmung der Constanten angewandte Methode ist jener nachgebildet, deren sich Frobenius J. f. M. Bd. 89, pag. 199, zur Ableitung der

stante und (ϱ_β) eine Charakteristik der Gruppe P ist, so erhält man, wenn man beachtet, dass die Charakteristiken (ϱ_β) mit den Charakteristiken (ν_λ) syzygetisch sind,

$$C\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta)\,(a,v)=\sum_\alpha C_\alpha \tau^{-\left|\begin{smallmatrix}\varrho_\beta\\ \varrho_\alpha\end{smallmatrix}\right|}\Theta(\varrho\,\varrho_\alpha\,\varrho_\beta)\,(a,b).$$

Multiplicirt man jetzt diese Gleichung mit dem Factor $\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\zeta}$, wo (ζ) eine zunächst noch willkürliche Charakteristik ist, lässt β alle Werthe von 0 bis $n^\sigma-1$ durchlaufen, und addirt die so entstandenen u^σ Gleichungen, so kommt:

$$C\sum_{\beta=0}^{\beta=n^\sigma-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\zeta}\Theta(\varrho\,\varrho_\beta)\,(a,v)$$
$$=\sum_{\beta=0}^{\beta=n^\sigma-1}\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n^\sigma-1}C_\alpha\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\zeta-\left|\begin{smallmatrix}\varrho_\beta\\ \varrho_\alpha\end{smallmatrix}\right|}\Theta(\varrho\,\varrho_\alpha\,\varrho_\beta)\,(a,b).$$

Um rechts die Indices α und β zu trennen, sei $(\varrho_\beta)=(\varrho_\alpha^{-1}\varrho_\gamma)$ gesetzt, dann kommt rechts:

$$\sum_\gamma\sum_\alpha C_\alpha\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma\varrho_\alpha^{-1}|+\varrho_\gamma|\zeta-\varrho_\alpha|\zeta-\left|\begin{smallmatrix}\varrho_\gamma\\ \varrho_\alpha\end{smallmatrix}\right|+|\varrho_\alpha|}\Theta(\varrho\,\varrho_\gamma)(a,b)$$
$$=\left(\sum_\alpha C_\alpha\tau^{\frac{n+1}{2}|\varrho_\alpha|-\varrho_\alpha|\zeta}\right)\left(\sum_\gamma\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\zeta}\Theta(\varrho\,\varrho_\gamma)\,(a,b)\right).$$

Setzt man hier statt $\alpha:\beta$ und löst nach der Coefficientensumme auf, so kommt:

$$(21)\qquad \sum_\beta C_\beta\tau^{\frac{n+1}{2}|\varrho_\beta|-\varrho_\beta|\zeta}=C\cdot\frac{\sum_\beta\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\zeta}\Theta(\varrho\,\varrho_\beta)(a,v)}{\sum_\gamma\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\zeta}\Theta(\varrho\,\varrho_\gamma)(a,b)}.$$

Will man nun den Coefficienten C_ε bestimmen, so multiplicirt man die Gleichung mit dem Factor $\tau^{\varrho_\varepsilon|\zeta}$, dann bekommt C_ε den Factor $\tau^{\frac{n+1}{2}|\varrho_\varepsilon|}$, somit hat man:

Riemann'schen Thetaformel für $n=2$ und Thetafunctionen erster Ordnung bedient, und dürfte vor der sonst gebrauchten Methode den Vorzug grösserer Uebersichtlichkeit haben.

$$(21a)\qquad C_\varepsilon \tau^{\frac{n+1}{2}|\varrho_\varepsilon|} + \sum_\beta C_\beta \tau^{\frac{n+1}{2}|\varrho_\beta| + \varrho_\beta^{-1}\varrho_\varepsilon|\zeta}$$

$$= C\tau^{\varrho_\varepsilon|\zeta}\frac{\sum_\beta \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\zeta}\Theta(\varrho\varrho_\beta)(a,v)}{\sum_\gamma \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\zeta}\Theta(\varrho\varrho_\gamma)(a,b)},$$

wo β auf der linken Seite alle Werthe von 0 bis $n^\sigma - 1$ mit Ausnahme von $\beta = \varepsilon$ durchläuft. Ergänzt man jetzt die Gruppe P, indem man noch weitere σ Basischarakteristiken (ϱ_1'), $(\varrho_2')\ldots(\varrho_\sigma')$ wählt, die mit $(\varrho_1), (\varrho_2)\ldots(\varrho_\sigma)$ nicht sämmtlich syzygetisch sind, was nach § 10 immer möglich ist, so erhält man eine Gruppe R vom Grade $n^{2\sigma}$. Lässt man dann (ζ) alle Charakteristiken dieser Gruppe R durchlaufen, und addirt alle so erhaltenen Gleichungen, so bekommt C_ε den Factor $n^{2\sigma}$, während

$$\sum_\zeta\sum_\beta C_\beta \tau^{\frac{n+1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta^{-1}\varrho_\varepsilon|\zeta} = \sum_\beta\left(C_\beta \tau^{\frac{n+1}{2}|\varrho_\beta|}\sum_\zeta \tau^{\varrho_\beta^{-1}\varrho_\varepsilon|\zeta}\right) = 0$$

wird (Satz (XI), Abschnitt I). Ausserdem werden auf der rechten Seite, der Gleichung (21a), in Folge der Gleichung $\tau^{\varrho_\alpha|\varrho_\beta} = 1$, immer jene n^σ Glieder einander gleich, die durch Einführung der in der gleichen Horizontalreihe des Schemas II, pag. 80 stehenden Charakteristiken erscheinen. Daraus folgt, dass man die Summation jetzt nur mehr auf die Gruppe (1), (ϱ_1'), …, (ϱ_s'), $s = n^\sigma - 1$ auszudehnen braucht.

Somit hat man:

$$\frac{n^\sigma C_\varepsilon}{\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\varepsilon|}} = C\cdot\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n^\sigma-1}\tau^{\varrho_\varepsilon|\varrho_\varkappa'}\frac{\sum_\beta \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\varrho_\varkappa'}\Theta(\varrho\varrho_\beta)(a,v)}{\sum_\gamma \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\varrho_\varkappa'}\Theta(\varrho\varrho_\gamma)(a,b)}.$$

Führt man die so bestimmten Coefficienten in die Gleichung (20) ein, so kommt:

$$(22)\qquad n^\sigma\Theta(\varrho)(u,v)$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n^\sigma-1}\left\{\frac{\sum_{\beta=0}^{\beta=n^\sigma-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\varrho_\varkappa'}\Theta(\varrho\varrho_\beta)(u,v)}{\sum_{\gamma=0}^{\gamma=n^\sigma-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\varrho_\varkappa'}\Theta(\varrho\varrho_\gamma)(a,b)}\cdot\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n^\sigma-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\alpha|+\varrho_\alpha|\varrho_\varkappa'}\Theta(\varrho\varrho_\alpha)(u,b)\right\}.$$

Da ferner a eine ganz willkürliche Constante ist, so sind nach Gleichung (21) die Verhältnisse der Coefficienten C_β von a unabhängig, somit folgt:

$$(23)\quad \begin{cases} {}'\sum_\beta \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\zeta}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta(a,v)\cdot\sum_\gamma \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\zeta}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\gamma)\,(u,b) \\ =\sum_\beta \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\zeta}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta(u,v)\cdot\sum_\gamma \tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\zeta}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\gamma)(a,b). \end{cases}$$

Lässt man hier (ζ) wieder alle Charakteristiken der oben definirten Gruppe R durchlaufen und addirt die entstandenen $n^{2\sigma}$ Gleichungen, so verschwinden alle Glieder ausser jenen, für welche $(\varrho_\beta\varrho_\gamma)\equiv(1)$, oder $(\varrho_\gamma)\equiv(\varrho_\beta^{-1})$ ist, und die Gleichung nimmt daher folgende Gestalt an:

$$(23\,a)^*)\qquad \sum_{\beta=0}^{\beta=n^\sigma-1}{}' \tau^{-|\varrho_\beta|}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta)\,(a,v)\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta^{-1})\,(u,b)$$
$$=\sum_{\beta=0}^{\beta=n^\sigma-1}{}' \tau^{-|\varrho_\beta|}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta^{-1})\,(a,b)\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta)\,(u,v).$$

Es sei hier noch gleich der specielle Fall $\sigma=0$ bemerkt. Für diesen ist

$$(24)\qquad \Theta(\varrho)(a,v)\,\Theta(\varrho)\,(u,b)=\Theta(\varrho)\,(a,b)\,\Theta(\varrho)\,(u,v),$$

eine Gleichung, die der von H. Frobenius, J. f. M. Bd. 96, pag. 96, für $n=2$ auf anderem Wege gefundenen entspricht.

Die Gleichung (23 a) lässt sich noch auf eine andere Form bringen, in welcher rechter Hand alle $n^{2\sigma}$ Charakteristiken der Gruppe R vorkommen. Addirt man nämlich zunächst ϱ_γ' zu u und den Grössen b_λ, so kommt nach einiger Rechnung, bei welcher zu beachten ist, dass die Charakteristiken (ϱ') sämmtlich mit denen der Gruppe N syzygetisch sind,

$$\sum_\beta \tau^{-|\varrho_\beta|\,-\varrho_\beta|\varrho_\gamma'}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta^{-1})\,(u,b)\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta)\,(a,v)$$
$$=\sum_\beta \tau^{-|\varrho_\beta\varrho_\gamma'|}\,\Theta\,(\varrho\,\varrho_\beta^{-1}\varrho_\gamma'^{-1}\,(a,b)\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta\,\varrho_\gamma')\,(u,v).$$

Lässt man jetzt γ alle Werthe von 0 bis $n^\sigma-1$ durchlaufen und addirt die so entstehenden Gleichungen, so fallen links alle Glieder

*) Diese Gleichung sowie Gleichung (22) leitet H. Frobenius für $n=2$ in der mehrfach erwähnten Adhandlung nicht ab, wohl aber Gleichung (25), die er jedoch auf anderm Wege gewinnt.

weg, ausser dem für $(\varrho_\beta) = (1)$ erscheinenden, welches den Factor n^σ gewinnt, und man findet:

$$n^\sigma \Theta(\varrho)(a, v)\,\Theta(\varrho)(u, b) = \sum_\gamma \sum_\beta \tau^{-|\varrho_\beta \varrho'_\gamma|}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta^{-1}\,\varrho_\gamma'^{-1})(a, b)\,\Theta(\varrho\,\varrho_\beta\,\varrho'_\gamma)(u, v).$$

Da nun β und γ hier alle Werthe von 0 bis $n^\sigma - 1$ durchlaufen, so stellen die Charakteristiken $(\varrho_\beta\,\varrho'_\gamma)$ und $(\varrho_\beta^{-1}\,\varrho_\gamma'^{-1})$ die sämmtlichen $n^{2\sigma}$ Charakteristiken der Gruppe R vor, und man kann daher

$$(\varrho_\beta\,\varrho'_\gamma) = (\varrho_\mu)$$

setzend, schreiben:

$$(25)\quad n^\sigma \Theta(\varrho)(a,v)\,\Theta(\varrho)(u,b) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n^{2\sigma}-1} \tau^{-|\varrho_\mu|}\,\Theta(\varrho\,\varrho_\mu)(u, v)\,\Theta(\varrho\,\varrho_\mu^{-1})(a, b).$$

Die Formeln (22), (23a) und (25) sind ihrem Inhalte nach identisch, denn man überzeugt sich leicht, dass man irgend zwei derselben stets aus der dritten ableiten kann.

Speciell lässt sich die Formel (25) durch Einführung der Argumente, die die H. H. Krazer und Prym (Acta mathematica 3) verwandten, in eine Gestalt bringen, die als speciellen Fall die dort pag. 271 aufgestellte Formel (Θ_2) enthält. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}
a - v_1 &= -u_1', & u - v_1 &= v_1',\\
a - v_2 &= -u_2', & u - v_2 &= v_2',\\
&\vdots & &\vdots\\
a - v_n &= -u_n', & u - v_n &= v_n',\\
u - b_1 &= u'_{n+1}, & a - b_1 &= -v'_{n+1},\\
u - b_2 &= u'_{n+2}, & a - b_2 &= -v'_{n+2},\\
&\vdots & &\vdots\\
u - b_n &= u'_{2n}, & a - b_n &= -v'_{2n},
\end{aligned}$$

dann erhält man mit Beachtung der für die v und b bestehenden Bedingungen

$$\begin{aligned}
n u_1' &= (1-n)v_1' + v_2' + \cdots + v'_{2n},\\
n u_2' &= v_1' + (1-n)v_2' + \cdots + v'_{2n},\\
&\vdots\\
n u'_{2n} &= v_1' + v_2' + \cdots + (1-n)v'_{2n},
\end{aligned}$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
n v_1' &= (1-n)u_1' + u_2' + \cdots + u_{2n}',\\
n v_2' &= u_1' + (1-n)u_2' + \cdots + u_{2n}',\\
&\vdots\\
n v_{2n}' &= u_1' + u_2' \qquad\qquad + \cdots + (1-n)u_{2n}',
\end{aligned}
$$

mit den Bedingungen:

$$\sum u_\alpha = \sum v_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Diese Gleichungen bestehen natürlich für alle p Argumente der Θ-Function. Führt man die neuen Argumente in Gleichung (25) ein, indem man die Striche wieder unterdrückt, so nimmt sie die Gestalt an

(25a)
$$n^\sigma \Theta(\varrho^{-1})(u_1)\,\Theta(\varrho^{-1})(u_2)\ldots\Theta(\varrho^{-1})(u_{2n})$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=n^{2\sigma}-1} \tau^{-|\varrho_\mu|}\Theta(\varrho\varrho_\mu)(v_1)\,\Theta(\varrho\varrho_\mu)(v_2)\ldots\Theta(\varrho\varrho_\mu)(v_n)\cdot\Theta(\varrho^{-1}\varrho_\mu)(v_{n+1})\ldots\Theta(\varrho^{-1}\varrho_\mu)(v_{2n}).$$

Setzt man hier $\sigma = p$, d. h. lässt man die Gruppe N sich auf die Identität reduciren, wodurch die Gruppe P eine Göpel'sche Gruppe und die Gesammtgruppe R die Gruppe der sämmtlichen n^{2p} Charakteristiken wird, so gehen die Θ-Functionen n^{ter} Ordnung in ϑ-Functionen erster Ordnung über, und man hat für $(\varrho) = (1)$ die erwähnte Formel der H. H. Krazer und Prym:

(25b)
$$n^p\vartheta(1)(u_1)\ldots\vartheta(1)(u_{2n}) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n^{2p}-1} \tau^{-|\varrho_\mu|}\vartheta(\varrho_\mu)(v_1)\ldots\vartheta(\varrho_\mu)(v_{2n}).$$

Desgleichen gehen für den Fall $\sigma = p$ unsere Formeln (22) und (23) in Formeln für ϑ-Functionen erster Ordnung über, von denen die von mir in den Abhandlungen der Münchener Akademie 1887 pag. 28 u. 29 für $n = 3$ gegebenen specielle Fälle sind. Desgleichen enthalten sie für $n = 2$ die von H. Frobenius J. f. M. Bd. 89, pag. 89 gegebenen. Diese specielleren Formeln lauten:

(26)
$$n^p\vartheta(\varrho)(u-v_1)\ldots(u-v_n)$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n^p-1}\left\{\frac{\sum_{\beta=0}^{\beta=n^p-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\beta|+\varrho_\beta|\varrho_\varkappa'|}\vartheta(\varrho\varrho_\beta)(a-v_1)\ldots(a-v_n)}{\sum_{\gamma=0}^{\gamma=n^p-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\gamma|+\varrho_\gamma|\varrho_\varkappa'|}\vartheta(\varrho\varrho_\gamma)(a-b_1)\ldots(a-b_n)}\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n^p-1}\tau^{\frac{n-1}{2}|\varrho_\alpha|+\varrho_\alpha|\varrho_\varkappa'|}\vartheta(\varrho\varrho_\alpha)(u-b_1)\ldots(u-b_n)\right\};$$

$$(27)\quad \begin{cases} \sum_{\beta=0}^{\beta=n^p-1} \tau^{-|\varrho_\beta|}\vartheta(\varrho\varrho_\beta)(a-v_1)\ldots(a-v_n).\vartheta(\varrho\varrho_\beta^{-1})(u-b_1)\ldots(u-b_n) \\ =\sum_{\beta=0}^{\beta=n^p-1} \tau^{-|\varrho_\beta|}\vartheta(\varrho\varrho_\beta^{-1})(a-b_1)\ldots(a-b_n).\vartheta(\varrho\varrho_\beta)(u-v_1)\ldots(u-v_n). \end{cases}$$

Natürlich könnte man diese Formeln auch direct erhalten, indem man die eben benutzte Methode auf die ϑ-Functionen erster Ordnung anwendet. In diesem Falle ist dann wieder ein Uebergang von der Formel (25b) auf die allgemeine Gleichung (25a) möglich.

§ 5.

Verallgemeinerung der Thetarelationen.

Die entwickelten Formeln lassen sich noch etwas verallgemeinern. Lässt man z. B. in (25) noch u um $\varrho_\varkappa$, und a um $-\varrho_\varkappa$ wachsen, wo $(\varrho_\varkappa)$ irgend eine Charakteristik der Gruppe R ist, und setzt $(\varrho)=(1)$, so kommt:

$$n^\sigma\Theta(\varrho_\varkappa)(a,v)\Theta(\varrho_\varkappa)(u,b)=\sum_{\mu=0}^{\mu=n^{2\sigma}-1}\tau^{-|\varrho_\mu|}\Theta(\varrho_\varkappa\varrho_\mu)(u,v)\Theta(\varrho_\varkappa\varrho_\mu^{-1})(a,b)\,\tau^{-2\left|\begin{smallmatrix}\varrho_\varkappa\\ \varrho_\mu\end{smallmatrix}\right|}.$$

Setzt man hier statt ϱ_μ: $\varrho_\mu - \varrho_\varkappa$, so kommt

$$(25c)\quad n^\sigma\tau^{-|\varrho_\varkappa|}\Theta(\varrho_\varkappa^{-1})\,(a,v)\,\Theta(\varrho_\varkappa)\,(u,b)$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=n^{2\sigma}-1}\tau^{-|\varrho_\mu|+\varrho_\mu|\varrho_\varkappa}\Theta(\varrho_\mu)\,(u,v)\,\Theta(\varrho_\mu^{-1})\,(a,b),$$

eine Formel, die für $\sigma=p$ und unter Einführung der oben angegebenen Argumente in die Prym-Krazer'sche Formel (Θ_2') übergeht (l. c. pag. 273).

Die letztere Formel kann noch in eine für die Entwickelung der Thetarelationen brauchbarere Gestalt gebracht werden, die dann jener entspricht, deren sich Herr Krazer Mathematische Annalen 1883 im Falle $\sigma=p=1$, $n=3$ zu diesem Zwecke bediente, und die H. Prym für $n=2$ und beliebiges p bereits in seiner Arbeit über die Riemann'sche Thetaformel pag. 87 angab, und ausserdem H. Frobenius J. f. M. Bd. 96, p. 95 (3) ableitete.

Ist nämlich H vorerst irgend eine Gruppe vom Grade $n^{\pi+\lambda}$, deren Charakteristiken mit

$$(1),\ (\eta_1),\ (\eta_2)\ldots(\eta_r),\quad r=n^{\pi+\lambda}-1$$

bezeichnet seien, und bedeutet Σ diejenige Gruppe vom Grade $n^{2p-\pi-\lambda}$, deren Charakteristiken:

$$(1),\ (\varsigma_1),\ (\varsigma_2),\ \ldots,\ (\varsigma_s),\quad s = n^{2p-\pi-\lambda} - 1$$

die sämmtlichen Lösungen der Congruenzen

$$\varsigma_{\varepsilon'} \mid \eta_\varepsilon \equiv 0 \begin{cases} \varepsilon = 1, 2, \ldots, n^{\pi+\lambda} - 1, \\ \varepsilon' = 1, 2 \ldots, n^{2p-\lambda-\pi} - 1 \end{cases}$$

darstellen, so bilden die den beiden Gruppen H und Σ gemeinsamen Charakteristiken die syzygetische Untergruppe von H und Σ zugleich. Diese Untergruppe möge nun im Folgenden mit der wiederholt benützten syzygetischen Untergruppe N vom Grade n^λ zusammenfallen, dann ist $\eta_\varepsilon \mid \nu_{\varepsilon''} \equiv 0$, $\varsigma_{\varepsilon'} \mid \nu_{\varepsilon''} \equiv 0$ ($\varepsilon'' = 1, 2, \ldots, n^\lambda - 1$), und mithin sind H und Σ Untergruppen der Gruppe Γ (§ 10). H enthält n^π und Σ $n^{2p-2\lambda-\pi} = n^{2\sigma-\pi}$ mod. N verschiedene Charakteristiken, die, wie man aus dem Schema der Gruppe Γ unmittelbar erkennt, stets aus der ersten Verticalreihe desselben, d. h. aus der Gruppe R entnommen werden können. Die ersteren bilden eine Gruppe H', die letzteren eine Gruppe Σ'. Setzt man nach dieser Bestimmung an Stelle von $(\varrho_\varkappa)$ in (25c) $(\varrho_\varkappa \eta_\varepsilon)$, wo (η_ε) eine der mod. N verschiedenen Charakteristiken der Gruppe H oder, was dasselbe, eine Charakteristik von H' ist, multiplicirt die Gleichung mit $\tau^{-\zeta|\eta_\varepsilon}$, wo (ζ) vor der Hand irgend eine Charakteristik bezeichnet, und summirt nach ε, so kommt:

$$n^\sigma \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=n^\pi-1} \tau^{-|\varrho_\varkappa \eta_\varepsilon| - \zeta|\eta_\varepsilon} \Theta(\varrho_\varkappa^{-1}\eta_\varepsilon^{-1})\,(a, v)\,\Theta(\varrho_\varkappa \eta_\varepsilon)\,(u, b)$$

$$= \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=n^\pi-1} \sum_{\mu=0}^{\mu=n^{2\sigma}-1} \tau^{-|\varrho_\mu| + \varrho_\mu|\varrho_\varkappa} \cdot \tau^{\varrho_\mu \zeta^{-1}|\eta_\varepsilon} \Theta(\varrho_\mu)\,(u, v)\,\Theta(\varrho_\mu^{-1})\,(a, b).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber

$$\sum_\mu \left\{ \tau^{-|\varrho_\mu| + \varrho_\mu|\varrho_\varkappa} \Theta(\varrho_\mu)\,(u, v)\,\Theta(\varrho_\mu^{-1})\,(a, b) \sum_\varepsilon \tau^{\varrho_\mu \zeta^{-1}|\eta_\varepsilon} \right\}.$$

Analog Satz (X) (I. Abschnitt) hat man:

$$\sum_\varepsilon \tau^{\varrho_\mu \zeta^{-1}|\eta_\varepsilon} = \prod_\varepsilon \left(1 + \tau^{\varrho_\mu \zeta^{-1}|\eta_\varepsilon} + \tau^{2(\varrho_\mu \zeta^{-1}|\eta_\varepsilon)} + \cdots + \tau^{(n-1)(\varrho_\mu \zeta|\eta_\varepsilon)}\right),$$

wo (η_ε) alle Basischarakteristiken der Gruppe H' durchläuft, und dieses Product ist entweder $= 0$, wenn $\varrho_\mu \zeta^{-1} \mid \eta_\varepsilon \not\equiv 0$ oder $= n^\pi$, wenn $\varrho_\mu \zeta^{-1} \mid \eta_\varepsilon \equiv 0$ ist. Das letztere ist aber der Fall, wenn $(\varrho_\mu \zeta^{-1}) = (\varsigma_{\varepsilon'})$ wird, wo $(\varsigma_{\varepsilon'})$ Charakteristiken der Gruppe Σ' bedeuten. Somit bleiben bei der Summation nur die $n^{2\sigma-\pi}$ Glieder stehen, für welche $(\varrho_\mu) = (\zeta$[redacted]

wird, (woraus für (ζ) folgt: $\zeta \mid \nu_{\sigma''} \equiv 0$, da $\varrho_\mu \mid \nu_{\sigma''} \equiv 0$ und $\varsigma_{\sigma'} \mid \nu_{\sigma''} \equiv 0$ ist), und man hat daher die gesuchte Formel:

$$(28_1)\begin{cases} n^{\sigma-\pi} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=n^\pi-1} \tau^{-|\varrho_\varkappa \eta_\varepsilon|-\zeta|\eta_\varepsilon} \Theta(\varrho_\varkappa \eta_\varepsilon)\,(u, b)\,\Theta(\varrho_\varkappa^{-1}\eta_\varepsilon^{-1})\,(a, v) \\ = \tau^{\zeta|\varrho_\varkappa} \sum_{\varepsilon'=0}^{\varepsilon'=n^{2\sigma-\pi}-1} \tau^{-|\zeta\varsigma_{\sigma'}|-\varrho_\varkappa|\varsigma_{\sigma'}} \Theta(\zeta\varsigma_{\sigma'})\,(u, v)\,\Theta(\zeta^{-1}\varsigma_{\sigma'}^{-1})\,(a, b). \end{cases}$$

Da hier (ζ) irgend welche Charakteristik ist, die nur den Congruenzen $\zeta \mid \nu_{\sigma''} \equiv 0$ zu genügen hat, so kann man für (ζ) alle Charakteristiken der Gruppe Γ einführen, wodurch man alle möglichen Gleichungen von der Form (28) erhält. Man bekommt aber hierdurch nur n^σ verschiedene Gleichungen, und das nämliche gilt auch für die verschiedenen Werthe, die $(\varrho_\varkappa)$ annehmen kann. Dies ergiebt sich durch folgende Ueberlegung: Zunächst werden alle jene Gleichungen identisch, die durch Einführung von mod. N äquivalenten Charakteristiken, wie $(\varrho_\alpha \nu_\beta)$, $(\varrho_\alpha \nu_\gamma)$ (vgl. das Schema der Gruppe Γ) entstehen, da

$$\nu_\beta \mid \eta_\varepsilon \equiv \nu_\gamma \mid \eta_\varepsilon \equiv 0, \quad \text{und} \quad \nu_\beta \mid \varrho \equiv \nu_\gamma \mid \varrho \equiv 0$$

ist, und endlich $(\nu_\beta \varsigma_{\sigma'})$ wie $(\nu_\gamma \varsigma_{\sigma'})$ wieder Charakteristiken der Gruppe Σ sind. Durch diese Bemerkung sind die für (ζ) einzuführenden Charakteristiken auf $n^{2\sigma}$ mod. N verschiedene Charakteristiken beschränkt, und man kann für sie die Charakteristiken der Gruppe R nehmen. Für die Wahl von $(\varrho_\varkappa)$ gilt ferner ohnehin schon, der Annahme gemäss, das Gleiche. Man entnehme nun aus der Gruppe H π mod. N verschiedene Basischarakteristiken:

$$(\eta_1),\ (\eta_2),\ \ldots,\ (\eta_\pi),$$

wähle aus R weitere $2\sigma - \pi$ von ersteren und von einander unabhängige:

$$(\eta_1'),\ (\eta_2'),\ \ldots,\ (\eta'_{2\sigma-\pi})$$

aus, was auf mehrere Arten geschehen kann, und bilde aus letzteren die Gruppe vom Grade $n^{2\sigma-\pi}$, die kurz mit

$$(1),\ (\eta_1'),\ (\eta_2'),\ \ldots,\ (\eta'_{n^{2\sigma-\pi}-1})$$

bezeichnet werden möge. Desgleichen seien

$$(\varsigma_1),\ (\varsigma_2),\ \ldots,\ (\varsigma_{2\sigma-\pi})$$

$2\sigma - \pi$ mod. N verschiedene Basischarakteristiken aus Σ und

$$(\varsigma_1'),\ (\varsigma_2'),\ \ldots,\ (\varsigma_\pi')$$

weitere π von ersteren und von einander unabhängige Charakteristiken aus R und

$$(1),\ (\varsigma_1'),\ (\varsigma_2'),\ \ldots,\ (\varsigma'_{n^\pi-1})$$

die aus ihnen gebildete Gruppe.

Beachtet man jetzt, dass die Formel (28) durch Einführung von $(\varrho_\varkappa \eta_\iota)$ statt $(\varrho_\varkappa)$ und von $(\zeta \varsigma_\iota)$ an Stelle von (ς_ι) in sich selbst übergeht, so folgt daraus, dass die Charakteristiken $(\eta'_\varkappa \eta_\iota)$ dieselbe Formel wie $(\eta'_\varkappa)$ und die Charakteristiken $(\varsigma'_\lambda \varsigma_\iota)$ dieselbe Formel wie (ς'_λ) ergeben. Somit erhält man sämmtliche in (28) enthaltene verschiedene Gleichungen, wenn man an Stelle von $(\varrho_\varkappa)$ nacheinander die Charakteristiken $(\eta'_\varkappa)$ und, unabhängig davon, an Stelle von (ζ) nacheinander die Charakteristiken (ς'_λ) einführt. Die hiedurch entstehende Gleichung:

$$(28\,\mathrm{a})\begin{cases} n^{\sigma-\pi} \sum_{s=0}^{s=n^\sigma-1} \tau^{-|\eta'_\varkappa \eta_s| - \varsigma'_\lambda|\eta_s} \Theta(\eta'_\varkappa \eta_s)(u,b) \cdot \Theta(\eta'^{-1}_\varkappa \eta_s^{-1})(a,v) \\ = \tau^{\varsigma'_\lambda|\eta'_\varkappa} \sum_{s'=0}^{s'=n^{2\sigma-\pi}-1} \tau^{-|\varsigma'_\lambda \varsigma'_{s'}| - \eta'_\varkappa|\varsigma_{s'}} \Theta(\varsigma'_\lambda \varsigma_s)(u,v) \cdot \Theta(\varsigma'^{-1}_\lambda \varsigma_{s'}^{-1})(a,b), \end{cases}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots, n^{2\sigma-\pi}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n^\pi,$$

repräsentirt dann alle $n^\pi \cdot n^{2\sigma-\pi} = n^{2\sigma}$ möglichen Gleichungen dieser Gattung.

Dies ist die gewünschte Endformel, aus welcher die Relationen zwischen den Θ-Functionen n^{ter} Ordnung für den Modul n ebenso abgeleitet werden, wie die entsprechenden Relationen der ϑ-Functionen 1. Ordnung für den Modul 2 aus der von Herrn Prym l. c. gegebenen Formel. Für $\sigma = p$ geht dieselbe direct in die entsprechende Formel zwischen den ϑ-Functionen erster Ordnung über, wobei die Gruppe R mit der Gesammtgruppe aller n^{2p} vorhandenen p-reihigen Charakteristiken zusammenfällt. Somit umschliesst dieses Formelsystem (28a) alle bis jetzt aufgestellten Formeln gleicher Gattung.

München im Januar 1890.

Classification der algebraischen Strahlensysteme.

Von

Robert Schumacher in Augsburg.

Wenn es sich bei einer Classification der algebraischen Strahlengebilde zweiter Dimension darum handelt, die Zahlen aufzufinden, welche die allgemeinen Verhältnisse ohne Unterscheidung des Reellen und Imaginären charakterisiren, so lassen sich dieselben nicht als Functionen von Grad und Classe allein darstellen, sondern es steht in anbetracht einer gewissen Analogie mit den Raumcurven, wo ausser der Ordnung etwa noch die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte anzugeben ist, zu erwarten, dass mindestens drei unabhängige Zahlen aufzustellen sind. Drei solcher Zahlen hatte ich schon in einer früheren Abhandlung*) zum Zwecke einer Eintheilung der Strahlensysteme angegeben, wobei ich von der Betrachtung der Regelflächen ausging, welche von den eine Gerade schneidenden Strahlen des Systems gebildet werden; die Ordnung der Doppelcurven dieser Regelflächen giebt mittelbar an, wie oft eine gegebene Gerade mit zwei Strahlen des Systems in einer Ebene liegt und durch einen Punkt geht, und liefert so eine Zahl, welche es mit der Abzählung einfacher geometrischer Vorkommnisse zu thun hat. Diese Eintheilung nun zu vervollständigen und ihre Nothwendigkeit darzuthun ist die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung, welche sich hiezu einer Methode bedient, die mit weniger schwerfälligen Vorstellungen arbeitet. Es ist dies im Wesen dieselbe Methode, welche bei der analytischen Behandlung liniengeometrischer Probleme zur Anwendung kommt: es werden hier die entsprechenden auf Punktgebilde bezüglichen Probleme behandelt und die Resultate hernach in den Geradenraum versetzt.

Die vierdimensionale Punktmannigfaltigkeit, auf welche man hiebei den Geradenraum in einfachster eindeutiger Weise abbildet, ist der sogenannte projective vierdimensionale Raum, der für die Betrachtung im Unendlichen durch einen linearen dreidimensionalen Raum ge-

*) Des Verfassers Inaugural-Dissertation „Untersuchungen über das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Classe." München, 1885.

schlossen ist. Die Abbildung selbst zeigt sich nicht frei von Besonderheiten, indem zur vollständigen Eindeutigkeit im Geradenraum ein singulärer Complex und im Punktraum eine lineare dreidimensionale Mannigfaltigkeit auszuschneiden wäre. Die Charakterisirung dieser Abbildung im Sinne der Analysis situs*) sowie eine auf die Unterscheidung des Reellen und Imaginären gegründete Classification werden den Gegenstand einer späteren Abhandlung bilden.

Die eindeutige Beziehung des Geradenraums auf den fingirten Punktraum knüpft die Theorie der Strahlensysteme an diejenige der Flächen, für welche die Centralprojection in den gewöhnlichen Raum die natürlichste Methode bildet. Aus der Eintheilung der Flächen, für welche 3 Zahlen aufgestellt werden: der Grad, die Ordnung der scheinbaren Doppelcurve und die Anzahl der scheinbaren dreifachen Punkte geht eine naturgemässe Eintheilung der Strahlensysteme hervor.

Nachdem vier unabhängige Zahlen für die Classification aufgestellt sind, werden in der Abhandlung die übrigen Zahlen, welche sich auf die besondern Lagen linearer Strahlengebilde zum System beziehen, in ihrer Abhängigkeit von jenen dargestellt; in der Abbildung werden hiezu die besondern Lagen untersucht zuerst, welche eine Gerade zur entsprechenden Fläche, und dann, welche Ebene oder Raum dazu haben kann. Die Anwendung der gewonnenen Formeln auf den Fall des vollständigen Schnittes zweier Complexe liefert jedesmal dieselben Resultate, wie sie Herr Voss in seiner Abhandlung „über Complexe und Congruenzen" (Math. Annalen Bd. 9), wo sich eine erschöpfende Darstellung dieses Falles findet, auf analytischem Wege erhalten hat.

Zur Prüfung der Zahlen im allgemeinen Falle wählte ich als Beispiel eine besondere Art der Strahlensysteme, welche durch eine Cremona'sche Verwandtschaft n^{ter} Ordnung zweier Ebenen entstehen, und zwar, weil sich dieselben hier auch auf andere Weise besonders einfach ermitteln lassen.

Zusammenstellung der durchgehenden Bezeichnungen. Zur leichteren Orientirung seien hier die einheitlichen Bezeichnungen der vorkommenden geometrischen Grundbegriffe aufgeführt, es bezeichne:

M die vierdimensionale Punktmannigfaltigkeit,	$\mathfrak{M}$ den Geradenraum,
R die dreidimensionale lineare Punktmannigfaltigkeit (Raum),	$\mathfrak{K}$ den linearen Complex,
R^{μ} eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit μ^{ten} Grades (Raum),	

*) Ueber die hiebei zur Anwendung kommende Methode vergl.: Dyck. „Beiträge zur Analysis situs". Ber. der Ges. d. W. Leipzig 1885, 86 und 87, sowie Math. Ann. Bd. 32.

E eine zweidimensionale lineare Punktmannigfaltigkeit (Ebene),
F_n eine Fläche n^{ter} Ordnung zweidimensional im vierdimensionalen Raum, f_n eine solche in R.
g eine Gerade,
P, O Punkte in M.
Das griechische Alphabet dient zur Bezeichnung besonderer Elemente in M.

$\mathfrak{S}$ das lineare Strahlensystem,
$\mathfrak{E}$ eine Ebene, $\mathfrak{P}$ ein Punkt in $\mathfrak{M}$,
$\mathfrak{S}_{n,k}$ das Strahlensystem n^{ter} Ordnung und k^{ter} Classe,

s, S Strahlen in $\mathfrak{M}$.

§ 1.

Abbildung des Complexes auf den Raum.

Der Abbildung des Geradenraumes auf die vierdimensionale Punktmannigfaltigkeit schicken wir, um die Analogie hervortreten zu lassen, eine kurze geometrische Herleitung der Abbildung des linearen Complexes auf den gewöhnlichen Punktraum R voraus.*)

Den Strahl des Complexes bestimmen wir zu diesem Zwecke durch seine Spuren in zwei festen Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, deren Schnittgerade S selbst dem Complex angehöre. Sind dann die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ auf S in dem zum Complex gehörigen Nullsystem den Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ zugeordnet, so ist der Büschel der Geraden durch $\mathfrak{P}_1$ in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ durch das Nullsystem projectiv auf den Büschel der Geraden durch $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{E}_1$ bezogen und der Complex wird von den Strahlen gebildet, welche entsprechende Gerade dieser Büschel schneiden.

Den Punkt R bestimmen wir durch die Strahlen, welche ihn von zwei festen Punkten O_1 und O_2 aus projiciren. Durch eine collineare Beziehung zwischen der Ebene $\mathfrak{E}_1$ und dem Bündel (O_1) der Strahlen durch O_1 einerseits und eine solche zwischen der Ebene $\mathfrak{E}_2$ und dem Bündel (O_2) andrerseits wird dann jedem Punkte des Raumes eine Gerade zugewiesen (einem Punkte P gehört die Gerade zu, deren Spuren den Strahlen $\overline{PO_1}$ und $\overline{PO_2}$ entsprechen), aber nicht umgekehrt. Damit nun jedem Strahle des Complexes ein Punkt zukomme, d. h. damit die zu seinen Spuren gehörigen Strahlen von (O_1) und (O_2) in einer Ebene liegen, müssen obige collineare Beziehungen so beschaffen sein, dass jeder Ebene durch $\overline{O_1O_2}$ in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ eine Gerade durch $\mathfrak{P}_2$ und in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ die im Nullsystem letzterer zugehörige Gerade durch $\mathfrak{P}_1$ entspricht. — Dem Strahl S als Geraden von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ entspricht hiebei in beiden Beziehungen dieselbe Ebene E.

*) Bezüglich der näheren Verhältnisse dieser Abbildung, insbesondere bezügl. der Ausnahmecurven sei auf die Litteratur zu dieser Abbildung verwiesen. (Man sehe Salmon-Fiedler, anal. Geometrie des Raumes II. 3 A. Litteraturangaben 215).

In der so hergestellten Abbildung des linearen Complexes auf den Raum R entspricht im Allgemeinen jedem Punkte ein Strahl und umgekehrt. Eine Ausnahme bilden der Strahl S, welchem alle Punkte der Ebene E zugehören, und eine Reihe von Punkten in der Ebene E, welchen je die Strahlen eines Büschels mit dem Centrum auf S entsprechen. Diese besondern Punkte in E bilden einen Kegelschnitt K, welchen die zur Punktreihe auf S projectiven Strahlenbüschel von (O_1) und (O_2) erzeugen (der Geraden $\overline{O_1 O_2}$ entsprechen hiebei die verschiedenen Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$).

Den Punkten einer Ebene im Raume R sind im Complexe die Strahlen eines linearen Strahlensystems zugeordnet, dem S angehört. Denn projiciren wir die Ebene von O_1 und O_2 aus, so ist mit der perspectivischen Beziehung zwischen (O_1) und (O_2), in welcher E sich selbst entspricht, eine collineare Beziehung zwischen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ mit dem gemeinsamen entsprechenden Elemente S bestimmt. Die Strahlen, welche hier entsprechende Punkte von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ verbinden, bilden aber ein lineares Strahlensystem. Hieraus folgt auch: den Punkten einer Geraden im Raume entsprechen im Complexe die Strahlen einer linearen Regelschaar, welche S enthält. Umgekehrt erkennt man leicht, dass einem linearen Strahlensysteme durch S und einer Regelschaar durch S eine Ebene bezw. eine Gerade im Raume zugeordnet sind.

Allgemein entspricht einem linearen Strahlensystem eine Fläche 2^{ten} Grades, welche den Kegelschnitt K der ausgezeichneten Punkte enthält, und einer linearen Regelschaar ein Kegelschnitt, der K in zwei Punkten trifft.

Den Strahlen eines Büschels, der sich ja durch einen S enthaltenden Büschel zu einer Regelschaar ergänzt, entspricht eine K treffende Gerade und umgekehrt.

§ 2.

Abbildung des Geradenraums auf die vierdimensionale Punktmannigfaltigkeit.*)

Die gerade Linie im geraden Raume sei durch ihre Spuren in zwei festen Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ mit dem Schnitt S bestimmt; zur Lagenbestimmung des Punktes im vierdimensionalen Raume M nimmt man naturgemäss das System der Ebene durch eine Gerade g_1 und das System derjenigen durch eine Gerade g_2, welche g_1 nicht schneiden

*) Vergl. hiezu: Chizzoni „Sulla corrispondenza uni voca frale rette di uno spazio ordinario ed i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni"; die dort gegebene eindeutige Abbildung ordnet der Ebene einen Complex 2^{ten} Grades zu, ist also nicht der einfachsten Art. Klein, Math. Ann. Bd. 5 „Ueber Liniengeometrie u. s. w." wo sich eine geometrische Deutung der Plücker'schen Linien-coordinaten als Punktcoordinaten findet.

darf; denn durch zwei Ebenen ist ein Punkt als Schnitt bestimmt und durch einen Punkt geht je eine Ebene von (g_1) und (g_2). Eine eindeutige Abbildung des Geradenraumes $\mathfrak{M}$ auf den Raum M wird dann durch eine collineare Beziehung zwischen der Ebene $\mathfrak{E}_1$ und dem System (g_1) und einer solchen zwischen $\mathfrak{E}_2$ und (g_2) hergestellt. Damit hiebei einem linearen Raume R dritter Dimension je ein linearer Complex entspreche, sei dem linearen Raume P, welcher die Geraden g_1 und g_2 enthält, durch beide Beziehungen die Gerade S zugeordnet. Jeder Geraden von $\mathfrak{M}$ ist so im Allgemeinen ein Punkt von M zugewiesen und jedem Punkte P eine Gerade (einem Punkte P entspricht die Gerade von $\mathfrak{M}$, deren Spuren den Ebenen $\overline{Pg_1}$ und $\overline{Pg_2}$ durch obige collineare Beziehungen zugeordnet sind).

Besondere Elemente der Abbildung: Dem Strahle S gehören alle Punkte des Raumes P durch g_1 und g_2 zu. Gleicherweise giebt es in P besondere Punkte, denen unendlich viele Geraden von $\mathfrak{M}$ entsprechen; sie bilden eine Fläche Φ zweiten Grades, das Erzeugniss der beiden zur Punktreihe auf S projectiven Ebenenbüschel durch g_1 und g_2. Den Punkten einer Schnittgeraden entsprechender Ebenen dieser Büschel entsprechen die Geraden durch einen Punkt auf S.

Allgemeine lineare Gebilde: Einem Raume R entspricht in der Abbildung ein linearer Complex $\mathfrak{K}$ durch S. Denn R schneide die Ebenenbündel (g_1) und (g_2) nach den Strahlenbündeln (O_1) und (O_2) und habe mit P die Ebene E gemein, dann sind (O_1) und (O_2) so collinear zu $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ verwandt, dass E beidemal S zugeordnet ist, dass also dem Ebenenbüschel durch $\overline{O_1O_2}$ zwei Strahlenbüschel mit ihren Mittelpunkten auf S entsprechen. Die Geraden aber, welche zusammengehörige Strahlen dieser Büschel schneiden und daher den Punkten von R entsprechen, bilden nach dem Früheren einen linearen Complex $\mathfrak{K}$ durch S. — Umgekehrt entspricht einem Complexe $\mathfrak{K}$ durch S ein Raum R, da derselbe durch weitere 4 Strahlen, die nicht zu einem linearen Strahlensystem gehören, eindeutig bestimmt ist, gleichwie der Raum R durch 4 Punkte.

Aus der Discussion der Abbildung des linearen Complexes folgt, dass einer Ebene von M ein lineares Strahlensystem durch S mit zwei reellen, zusammenfallenden oder imaginären Directricen entspricht, je nachdem die Ebene die Fläche Φ in zwei, einem oder keinem Punkte trifft. Eine lineare Regelschaar durch S endlich bildet sich als Gerade ab. Offenbar gelten hier auch die Umkehrungen.

Einfachste Gebilde des Geradenraumes: Es soll jetzt untersucht werden, wie die einfachsten Gebilde des Geradenraumes: I) der Büschel der Strahlen durch einen Punkt und in einer Ebene, II) das System der Strahlen in einer Ebene, III) der Bündel der Strahlen durch einen

Punkt und IV) der Complex der Strahlen, welche eine Gerade schneiden, im Raume M sich abbilden.

I) Aus der Abbildung des linearen Complexes (Schluss) folgt: *Einem Strahlenbüschel erster Ordnung entspricht eine Gerade, welche* Φ *trifft und umgekehrt.*

II) *System der Strahlen in einer Ebene:* Dasselbe bildet mit dem Bündel der Strahlen, welche durch den Schnitt der Ebene mit S gehen, ein lineares Strahlensystem, welchem im Raume M eine Ebene entspricht. Dem Strahlenbündel entspricht hiebei, wie wir oben gesehen haben, eine Gerade auf Φ. Die Schaar der Geraden auf Φ, welcher diese Gerade angehört, sei mit σ_1 bezeichnet. Hieraus folgt: *Den Strahlen einer Ebene des Geradenraumes* $\mathfrak{M}$ *entsprechen die Punkte einer Ebene, welche durch eine Gerade der Schaar* σ_1 *auf* Φ *hindurchgeht* oder kurz: *einer Ebene von* $\mathfrak{M}$ *ist eine Ebene von* M *zugeordnet.*

III) *Strahlenbündel:* Ein Strahlenbündel in $\mathfrak{M}$ ergänzt sich analog durch das System der Strahlen in der Ebene, welche sein Centrum mit S verbindet, zu einem Strahlensystem, welchem wieder im Raume M eine Ebene entspricht. Letztere enthält offenbar unendlich viele Punkte von Φ, von jeder Geraden der Schaar σ_1 mindestens einen; da sie sich aber im Allgemeinen ausserhalb des Raumes P von Φ befindet, so muss sie Φ nach einer Geraden der andern Schaar σ_2 schneiden. *Einem Strahlenbündel* oder kurz *einem Punkte von* $\mathfrak{M}$ *ist also eine Ebene von* M *zugeordnet, welche durch eine Gerade von* σ_2 *hindurchgeht.* — Die gemeinsame Bezeichnung für die Ebenen (der ersten Art) durch σ_1 sei für die Folge: ε_1, für die (der zweiten Arten) durch σ_2 sei ε_2. — Für die Fälle I) und II) erkennt man ohne weiteres die Umkehrung.

Dem System der Strahlen in einer Ebene durch S ist im besondern eine Gerade der Schaar σ_2 zugeordnet. Hieraus folgt, *dass einem Punkte von* Φ *ein Büschel von Strahlen in einer Ebene durch* S *und mit dem Centrum auf* S *entspricht.*

IV) *Gesammtheit der Strahlen, welche eine Gerade schneiden.* Einem singulären linearen Complex entspricht in M im Allgemeinen ein Raum zweiten Grades, welcher Φ enthält. Gehört dem Complexe die Gerade S an, so entspricht ihm ein linearer Raum R, welcher P nach einer Tangentialebene von Φ schneidet. — *Beschreibt also ein Punkt im Raume* $\mathfrak{M}$ *eine Gerade oder dreht sich eine Ebene in* $\mathfrak{M}$ *um eine Axe, so beschreibt die zugeordnete Ebene einen Raum zweiten Grades und, wenn jene Gerade* S *schneidet, einen linearen Raum, welcher* Φ *berührt.*

Lineare Gebilde von $\mathfrak{M}$*, welche* S *nicht enthalten.* Einem linearen Complex im Allgemeinen entspricht in M ein Raum zweiten Grades, der von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten wird, denn der Complex hat mit einer linearen Regelschaar durch S je zwei Str[illegible]

gemein. Dieser Raum enthält Φ d. h. jede Gerade, welche Φ schneidet, trifft ihn noch in einem Punkte; einer solchen Geraden entspricht nämlich ein Strahlenbüschel 1^{ter} Ordnung, welcher von dem Complex nur einen Strahl enthält. Umgekehrt entpricht einem Raume 2^{ten} Grades, welcher durch Φ hindurchgeht, in $\mathfrak{M}$ ein linearer Complex; enthält dieser Raum Ebenen, so ist der Complex ein singulärer, der Raum besteht dabei aus den Ebenen, welche die Fläche Φ von einem Punkte aus, dem Bilde des singulären Strahles, projiciren.

Einem linearen Strahlensysteme entspricht, da es mit S einen linearen Complex bestimmt, allgemein eine Fläche 2^{ten} Grades, welche Φ nach einem Kegelschnitte schneidet. Jenachdem die Bildfläche gerade Linien besitzt oder nicht oder in einen Kegel ausartet, hat das System zwei, keine oder eine Directrix. Zerfällt der Kegelschnitt in zwei Gerade, so schneidet eine Directrix den Strahl S.

Der linearen Regelschaar ist ein Kegelschnitt zugeordnet, der Φ in zwei reellen oder imaginären Punkten trifft oder berührt, jenachdem S die Regelfläche schneidet, nicht schneidet oder berührt. Die Regelfläche artet in einen Kegel oder ein Strahlenbüschel 2^{ter} Ordnung aus, wenn der Kegelschnitt in einer Ebene ε_2 oder ε_1 enthalten ist.

§ 3.

Algebraische Gebilde höherer Ordnung im Geradenraum.

Ein Raum n^{ten} Grades R^n im vierdimensionalen Raume M ist das Bild eines *Complexes n^{ten} Grades*, der den Strahl S zum n-fachen Strahle hat. Eine Gerade von M schneidet nämlich den Raum in n Punkten; ein Strahlenbüschel 1^{ter} Ordnung oder eine lineare Regelschaar durch S hat daher mit dem Complexe n Strahlen gemein, jede andere Regelschaar enthält aber von ihm $2n$ Strahlen.

Der allgemeine Complex n^{ten} Grades bildet sich als Raum vom $2n^{ten}$ Grade ab. Dieser Raum geht durch die Fläche Φ n-mal hindurch, da jede Gerade, welche Φ in einem Punkte trifft, der also ein Strahlenbüschel entspricht, ihn nur noch in n Punkten schneidet.

Das Bild einer Regelschaar n^{ten} Grades (Regelfläche $2n^{ter}$ Ordnung) ist im Allgemeinen eine Curve $2n^{ter}$ Ordnung, welche Φ in $2n$ Punkten schneidet; denn ein linearer Complex hat $2n$ Strahlen mit ihr gemein und die Gerade S trifft $2n$ ihrer Strahlen.

Ist S ein m-facher Strahl der Regelfläche, so entspricht ihr in M eine Curve $2n-m^{ter}$ Ordnung, welche von $\Phi(2n-m)$ Punkte enthält.

Ein Strahlensystem n^{ten} Grades und k^{ter} Classe, welches also durch jeden Punkt n Strahlen schickt und in jede Ebene k Strahlen legt, bildet sich in M als Fläche ab, welche jede Ebene ε_1 durch eine

Gerade der Schaar σ_1 auf Φ in k Punkten, die nicht auf Φ liegen, und jede Ebene ε_2 durch eine Gerade der Schaar σ_2 in n solchen Punkten trifft (§ 2, II, III). Die Geraden der Schaar σ_1 selbst werden, da ihnen je ein Punkt auf S zugehört, von der Fläche je in n Punkten getroffen, die Geraden der Schaar σ_2 aber in k.

Hieraus folgt: *„Dem Strahlensysteme n^{ten} Grades und k^{ter} Classe entspricht in M eine Fläche $n+k^{\text{ter}}$ Ordnung — d. h. ein Gebilde, welches mit einer beliebigen Ebene $n+k$ Punkte gemein hat —; dieselbe schneidet Φ nach einer Curve $n+k^{\text{ter}}$ Ordnung; auf jeder Geraden der Schaar σ_1 liegen n, auf jeder der zweiten Schaar k Punkte von ihr.“*

„Enthält das Strahlensystem S als m-fachen Strahl, so entspricht ihm in M eine Fläche $n+k-m^{\text{ten}}$ Grades, welche jede Gerade von σ_1 in $n-m$, und jede von σ_2 in $k-m$ Punkten trifft.“

Die Umkehrung lautet: *„Einer Fläche μ^{ten} Grades von M, welche jede Gerade von σ_1 in ν und jede von σ_2 in k Punkten trifft, entspricht im Geradenraum ein Strahlensystem vom Grade $\mu-k$ und der Classe $\mu-\nu$, welches S zum $\big(\mu-(\nu+k)\big)$-fachen Strahl hat.“*

Dem Begriff der „algebraischen“ Fläche im Raume von vier Dimensionen legen wir im Folgenden allein die Eigenschaft zu Grunde, dass sie von jedem Punkte dieses Raumes aus in den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum als algebraische Fläche projicirt werde. „Algebraisch“ nennen wir dann ein Strahlensystem, wenn es eine derartige Fläche zum Bilde hat.

§ 4.

Art ϱ des algebraischen Strahlensystems.

Die Theorie der algebraischen Strahlensysteme wird durch das Vorausgegangene an diejenige der Flächen im vierdimensionalen Raume geknüpft. Das Hauptmittel, die Verhältnisse dieser Flächen zu untersuchen, bildet die Centralprojection in den gewöhnlichen Raum. Sei F_{n+k} eine Fläche $n+k^{\text{ter}}$ Ordnung, welche das Bild des allgemeinen Strahlensystems $\mathfrak{S}_{n,k}$ von der Ordnung n und der Classe k darstellt, so wird dieselbe von einem beliebigen Punkte in M aus, da sie mit jeder Ebene im Allgemeinen $n+k$ Punkte gemein hat, in eine Fläche f_{n+k} vom Grade $n+k$ projicirt. f_{n+k} wird im Allgemeinen eine Doppelcurve besitzen, da jeder lineare Raum R durch das Projectionscentrum P die Fläche F_{n+k} nach einer Raumcurve mit einer Anzahl scheinbarer Doppelpunkte schneidet. Durch jeden Punkt von M geht also ein Kegel von Sehnen der Fläche F_{n+k} oder F_{n+k} besitzt eine „scheinbare“ Doppelcurve. Eine Ausnahme findet nur statt, wenn F_{n+k} ganz in einem linearen Raume enthalten ist.

Es erscheint ganz der Sache gemäss, bei einer Classification der Flächen des vierdimensionalen Raumes die Ordnung des Kegels der Sehnen durch einen beliebigen Punkt, wie es auch die Analogie der Raumcurven erfordert, als charakteristische Zahl einzuführen.

Bei der Uebersetzung dieser Verhältnisse in den Geradenraum, zum Zwecke der Feststellung einer Classification der Strahlensysteme, nehmen wir, um sie hier möglichst anschaulich hervortreten zu lassen, nicht den Sehnenkegel der allgemeinsten Lage, sondern wir wählen seine Spitze auf der Fläche der singulären Punkte Φ. Einer Sehne des Kegels entspricht dann im Geradenraume $\mathfrak{M}$ ein Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher zwei Strahlen von $\mathfrak{S}_{n,k}$ enthält. Ist h die Ordnung der scheinbaren Doppelcurve von F_{n+k}, so hat speciell ein linearer Raum R, welcher Φ in der Spitze des Kegels berührt, ausser den in ihm enthaltenen Geraden der Schaaren σ_1 und σ_2, von denen die eine offenbar für $\frac{n(n-1)}{2}$, die andere für $\frac{k(k-1)}{2}$ Sehnen zählt (§ 3), mit dem Kegel noch $\varrho = h - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}$ Sehnen gemein. Da einem solchen Raume L_3 die Gesammtheit der Strahlen in $\mathfrak{M}$ entspricht, welche dieselbe der Kegelspitze zugeordnete Gerade schneiden, *so ist ϱ die Anzahl der Strahlenpaare des Systems, welche mit derselben Geraden in einer Ebene liegen und zugleich durch einen Punkt gehen.*

Diese Zahl ϱ will ich, wie ich es schon an anderer Stelle gethan habe*), *die Art des Strahlensystems* nennen.**)

Bestimmung der Art ϱ des vollständigen Schnittes zweier Complexe.

Die Complexe seien vom Grade μ und ν. In der Abbildung entsprechen ihnen ein Raum $R^{2\mu}$ vom Grade 2μ und ein Raum $R^{2\nu}$ vom Grade 2ν. Die Fläche Φ ist in dem einen μ-fach, in dem andern ν-fach enthalten, so dass der vollständige Schnitt der beiden Räume aus der $\mu\nu$-fach zu zählenden Fläche Φ und aus dem Bilde der Schnittcongruenz $\mu\nu^{\text{ten}}$ Grades besteht. Zur Bestimmung von ϱ schneiden wir $R^{2\mu}$ und $R^{2\nu}$ durch einen linearen Berührungsraum R von Φ, welcher von dieser Fläche die Geraden σ_1^0 und σ_2^0 mit dem Schnitt P enthalte, nach den Flächen $f^{2\mu}$ und $f^{2\nu}$. Der vollständige Schnitt dieser Flächen besteht dann aus den $\mu\nu$-fach zu zählenden Geraden σ_1^0 und σ_2^0 und aus einer Curve C von der Ordnung $2\mu\nu$, welche von

*) Dissertation § 1, 7.

**) Als Maximalwerth für ϱ bei gegebenem n und k findet man:

$$\frac{(n+k-1)(n+k-2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = nk - (n+k) + 1.$$

σ_1^0 und σ_2^0 je in $\mu\nu$ Punkten getroffen wird. Die Zahl ϱ bedeutet dann die Anzahl der Sehnen, welche durch P ausser σ_1^0 und σ_2^0 an die Curve C gehen. Projiciren wir also C von P aus, so ist die Anzahl der Doppelkanten des Projectionskegels, welche von scheinbaren Doppelpunkten herrühren, zu bestimmen. Das Doppelte dieser Anzahl erhält man offenbar, indem man von der gesammten Anzahl der nicht auf s_1 oder s_2 gelegenen Schnittpunkte von C mit der Curve C', in welcher der Kegel noch die Fläche $f^{2\mu}$, die in der Zahl $\mu\nu$ vorhandenen μ-fach zu zählenden Geraden σ_1^0 und σ_2^0 abgerechnet, schneidet, die Anzahl A_2 derjenigen abzieht, in denen die zugehörigen Mantellinien des Kegels die Fläche $f^{2\mu}$ berühren.

A_1 bestimmt sich als Anzahl der Schnittpunkte von C' mit $f^{2\nu}$, welche nicht auf σ_1^0 oder σ_2^0 liegen. Der Grad von C' ergiebt sich als: $2\mu\nu(2\mu-1) - 2\mu\nu\cdot\mu$. Da σ_1^0 und σ_2^0 auf $f^{2\nu}$ als ν-fache Gerade zählen, so folgt:

$$A_1 = \left(2\mu\nu(2\mu-1) - 2\mu\nu\mu\right) 2\nu - \left(2\mu\nu(2\mu-1) - 2\mu\nu\mu\right)\nu$$
$$= \left(2\mu\nu(2\mu-1) - 2\mu\nu\mu\right)\nu = 2\mu\nu(\mu-1)\nu.$$

A_2 besteht aus der Zahl der Schnitte von C mit der Polare des Punktes P in Bezug auf $f^{2\mu}$, davon die μ-fach zählenden Schnitte auf σ_1^0 und σ_2^0 abgerechnet (die erste Polare geht, wie man sich leicht überzeugt, μ-fach durch diese Geraden hindurch).

$$A_2 = 2\mu\nu(2\mu-1) - 2\mu\nu\cdot\mu = 2\mu\nu\cdot(\mu-1).$$

Hieraus folgt:

$$\varrho = \frac{A_1 - A_2}{2} = \mu\nu(\mu-1)(\nu-1).$$

§ 5.

Das zu einem Strahlensystem gehörige Nullsystem.*)

Ist F_{n+k} wieder das Bild des Strahlensystems $\mathfrak{S}_{n,k}$, so hat das System derjenigen Sehnen von F_{n+k}, welche die Fläche Φ treffen, die Beschaffenheit, dass durch jeden Punkt von Φ ein Kegel von Sehnen mit dem Grade $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + \varrho$ geht und dass in einer Ebene der Schaar ε_1 (Ebene durch eine Gerade von Φ) $\frac{n(n-1)}{2}$ und in einer Ebene der Schaar ε_2 $\frac{k(k-1)}{2}$ Sehnen (die Geraden auf Φ abgerechnet) liegen. Jeder der Sehnen entspricht im Geradenraum ein Büschel von Strahlen durch einen Punkt oder, wie wir sagen können,

*) Dissertation. Voss, Math. Ann. Bd. 23. Zweiter Aufsatz. Sturm, Math. Ann. Bd. 28. „Ueber höhere räumliche Nullsysteme".

eine Ebene und ein Punkt in ihr. Den Sehnen in einer Ebene der Schaar ε_1 sind so im Raume $\mathfrak{M}$ die $\frac{k(k-1)}{2}$ Schnittpunkte der Strahlen von $\mathfrak{S}_{n,k}$, welche in der zu ε_1 gehörigen Ebene liegen, zugeordnet. Analog entsprechen den Sehnen in einer Ebene ε_2 die Verbindungsebenen der Strahlen von $\mathfrak{S}_{n,k}$ durch einen Punkt. Dem System der Sehnen, welche die Fläche Φ schneiden, entspricht also das zum Strahlensystem gehörige Nullsystem.

Den Ebenen des Geradenraums, welche durch einen Punkt gehen, sind, wenn man sie je mit ihren im Nullsystem angehörigen Punkten zusammennimmt, die Sehnen von F_{n+k} zugeordnet, welche Φ und zugleich eine Ebene der Schaar ε_2 treffen (§ 2, III). Frägt man nach der Anzahl der zu den Ebenen durch einen Punkt im Nullsystem gehörigen Punkte, welche auf irgend einer Geraden, die etwa den ausgezeichneten Strahl S der Abbildung treffen möge, liegen, so ist dies gleichbedeutend mit der Frage nach der Anzahl der Ebenen ε_2, welche innerhalb eines linearen Tangentialraumes von Φ (§ 2, IV) Sehnen obiger Bedingungen enthalten. Man frägt hiermit, wie viele Sehnen zugleich eine Ebene ε_2 und eine Gerade der Schaar σ_2 treffen. Die Sehnen, welche σ_2 schneiden, bilden aber, wie die Projection in einen Raum R zeigt, eine Regelfläche $\frac{n(n-1)}{2} + \rho^{\text{ten}}$ Grades. Letztere Zahl ist aber offenbar die gesuchte. — Die Fläche der Punkte, welche den Ebenen durch einen Punkt im Nullsystem zugeordnet sind, ist also vom Grade $\frac{n(n-1)}{2} + \rho$ und der Modul des Nullsystems stimmt mit der Art des zugehörigen Strahlensystems überein.

§ 6.

Berührende Regelschaaren.

Unter den Sehnen der Fläche F_{n+k} finden sich solche, welche die Fläche in zusammenfallenden Punkten schneiden d. h. berühren. Aus der Projection von F_{n+k} in den gewöhnlichen Raum folgt, dass die Tangenten, welche F_{n+k} in demselben Punkte berühren, in einer Ebene liegen; denn die Projectionen thun dies für jedes allgemein gelegene Projectionscentrum. Diese Tangentialebenen zeichnen sich in ihrer Lage zur Fläche dadurch vor der allgemeinen Ebene in M aus, dass sie unendlich viele Punkte, welche im Berührungspunkt zusammenfallen, mit ihr gemein haben.

Für das Strahlensystem $\mathfrak{S}_{n,k}$ ergiebt sich hieraus: Die Regelschaaren, welche das Strahlensystem in demselben Strahl „berühren" und noch durch eine feste Gerade gehen, sind in einem linearen Strahlensystem enthalten. Wir haben so für jeden Strahl von $\mathfrak{S}_{n,k}$

einen Büschel berührender Strahlensysteme; durch jede Gerade geht eines. Unter den berührenden Regelschaaren findet sich eine, welche aus zwei Strahlenbüscheln besteht. Letztere entsprechen in der Abbildung mit beliebigem Grundstrahl S denjenigen zwei Tangenten der Tangentialebene von F_{n+k}, welche Φ schneiden. Die Centren der Strahlenbüschel heissen „Brennpunkte", die Trägerebenen „Brennebenen" des Berührungsstrahls. — Die berührenden Strahlensysteme an einen Strahl haben offenbar die specielle Regelschaar gemeinsam.

Von Wichtigkeit für die Charakterisirung der Fläche F_{n+k} ist, wie sich in der Folge erweisen wird, die Anzahl der Tangenten, welche je durch einen Punkt von M hindurchgehen. Ist F_{n+k} der vollständige Schnitt zweier Räume μ^{ten} und ν^{ten} Grades, so erhalten wir die Berührungspunkte der durch einen Punkt gehenden Tangenten als Schnitte dieser Räume und ihrer ersten Polaren in Bezug auf den Punkt. Ihre Anzahl ist daher $\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$, also gleich der doppelten Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte eines räumlichen Schnittes.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies auch im Allgemeinen der Fall ist: Der Sehnenkegel von einem Punkte aus an die Fläche F_{n+k} sei vom Grade h und werde von einem beliebigen Punkte aus mit σ Doppelkanten gesehen. Ausserdem gestatten wir ihm $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$-fache Kanten in der Anzahl x, welche die Fläche in α Punkten treffen. Der Kegel schneidet dann die Fläche F_{n+k} nach einer Curve, welche mit jedem Raume $2h$ Punkte gemein hat. Wie man leicht erkennt, geht diese Curve durch jeden Schnitt einer α-fachen Secante mit der Fläche $(\alpha-1)$-mal hindurch. Die Projection des Sehnenkegels in einen linearen dreidimensionalen Raum giebt dann einen Kegel K mit σ Doppelkanten und x α-fachen Kanten. Auf ihm liegt eine Curve C, welche jede Mantellinie zweimal schneidet; wir fragen jetzt nach der Zahl π der Mantellinien, welche die Curve berühren.

Die Curve C besitzt $(\alpha-1)$-fache Punkte in der Anzahl $\alpha.x$: auf jeder α-fachen Secante α; ausserdem hat sie eine gewisse Anzahl scheinbarer Doppelpunkte. Wir bezeichnen den Gesammtwerth der vielfachen Punkte, welche eine beliebige ebene Projection von C besitzt, in Doppelpunkten ausgedrückt (einen r-fachen Punkt als $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkte gerechnet) mit D. Es wird dann eine erste Relation zwischen den eingeführten Zahlen — wir handeln jetzt im gewöhnlichen Raume R — dadurch erhalten, dass wir die Anzahl der Tangentialebenen, welche durch eine beliebige Gerade an die Curve C gehen, der Summe der doppelten Anzahl der Tangentialebenen, die von irgend einem Punkte aus an K gehen, und der Zahl π gleichsetzen:

$$2h(2h-1) - 2D = 2\left(h(h-1) - 2\sigma - \frac{\alpha(\alpha-1)[\alpha(\alpha-1)-2]}{4}x\right) + \pi,$$

oder:

$$2h^2 - 2D = \pi - 4\sigma - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\alpha(\alpha-1)-2\right)x.$$

Eine zweite Relation ergiebt die Betrachtung der Regelfläche G, derjenigen Geraden, welche eine durch die Spitze von K laufende Gerade schneiden und C in zwei Punkten treffen. G besteht aus K und einer Fläche G_1. Zur Abzählung der Anzahl D der Erzeugenden von G_1, welche durch irgend einen Punkt von g gehen, wählen wir einen speciellen Punkt, die Spitze des Kegels, und fragen nach den gemeinsamen Erzeugenden von K und G_1. Diese bestehen offenbar aus den Berührungslinien der Tangentialebenen, welche durch g an den Kegel gehen, und aus den mehrfach zu zählenden Doppelkanten und α-fachen Kanten von K. Eine Doppelkante schneidet C in 4 Punkten, zählt also für die Gesammtregelfläche G 6-fach. K geht zweimal, G_1 also 4-mal hindurch.

Eine α-fache Kante zählt für G, da sie C in $\alpha(\alpha-1)$ Punkten schneidet, $\alpha(\alpha-1)\frac{(\alpha(\alpha-1)-1)}{2}$-fach. Der Kegel K geht $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$-mal hindurch, G_1 also: $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\alpha(\alpha-1)-2\right)$-mal. Wir erhalten somit:

$$D = \left(h(h-1) - 2\sigma - \frac{\alpha(\alpha-1)\left(\alpha(\alpha-1)-2\right)}{4}x\right) + 4\sigma + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\alpha(\alpha-1)-2\right)x\ ^{*})$$

oder:

$$D = h(h-1) + 2\sigma + \frac{\alpha(\alpha-1)\left(\alpha(\alpha-1)-2\right)}{1}x.$$

Die beiden aufgestellten Relationen geben:

$$\pi = 2h,$$

wie behauptet wurde; π ist hiebei von der Anzahl der vielfachen Secanten von F_{n+k}, welche etwa dem Kegel K angehören, unabhängig. Der hier eingeschlagene Weg zur Ableitung dieser Formel hat vor einem anderen kürzeren, welcher die Curve C als Schnitt des Kegels K und einer gewissen Fläche n^{ten} Grades mit einem $(n-2)$-fachen Punkte in der Kegelspitze auffasst, den Vorzug, zugleich zur Kennzeichnung der Schnittcurve eines Sehnenkegels mit der Fläche F_{n+k} zu führen.

*) Die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte von C erhält man durch Abzug von $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}x$.

Die gewonnene Zahl π enthält auch die Anzahl der uneigentlichen Tangenten der Fläche F_{n+k} d. h. diejenigen Sehnen, welche nach etwaigen Doppelpunkten der Fläche gehen. Solche Gerade geben für den Kegel K Mantellinien, in welchen sich die Curve C durchkreuzt. Bei der Ermittelung der Anzahl der eigentlichen Tangenten durch einen Punkt in M ist ihre Zahl doppelt in Abzug zu bringen.

In der That besitzt die Fläche F_{n+k} im allgemeinen Falle als Bild des Systems $\mathfrak{S}_{n,k}$ eine bestimmte Anzahl von Doppelpunkten. Denn betrachten wir den Grundstrahl S der Abbildung, so giebt es ϱ Strahlenpaare, die mit ihm je in einer Ebene liegen und zugleich durch einen Punkt gehen. Jedem solchen entspricht aber in der Abbildung nur ein auf Φ gelegener Punkt (§ 2, III); jeder in $\mathfrak{S}_{n,k}$ enthaltenen Regelschaar durch eines der Paare entspricht also eine Curve auf F_{n+k}, welche durch den entsprechenden Punkt zweimal hindurchgeht. *Die Fläche F_{n+k} enthält somit ϱ Doppelpunkte.* Die Zahl i der eigentlichen Tangenten durch einen Punkt des vierdimensionalen Raumes ist folglich:

$$i = \pi - 2\varrho = 2h - 2\varrho.$$

Da aber $h = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + \varrho$ ist (S. 108), so folgt:

$$i = n(n-1) + k(k-1).$$

Für die Projection f_{n+k} der Fläche F_{n+k} in den gewöhnlichen Raum geben die Tangenten durch das Projectionscentrum Cuspidalpunkte; im Falle ihrer Realität bilden sie offenbar die Uebergangsstellen von isolirten zu nicht isolirten Zügen der Doppelcurve auf f_{n+k}.

Beispiel.

Die Bedeutung der Zahl i für das Strahlensystem soll durch die Bestimmung derselben bei einem einfachen Beispiel, dem Strahlensystem $\mathfrak{S}_{n,2}$ von der Ordnung n und der Classe 2 mit eigentlicher Brennfläche dargethan werden. $\mathfrak{S}_{n,2}$ ist von der Art $n-2$*) und hat eine Brennfläche von der 4ten Classe; weiter besitzt es $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Doppelstrahlen. Das Bild F_{2+n} von $\mathfrak{S}_{n,2}$ hat also $\varrho + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Doppelpunkte.

Wir zählen die Tangenten ab, welche durch einen Punkt P auf Φ an F_{2+n} gehen. Jeder derselben entspricht ein Strahlenbüschel 1ter Ordnung mit zwei zusammenfallenden Strahlen von $\mathfrak{S}_{n,2}$, also eine Brennebene und der ihr zugeordnete Brennpunkt. Dem Punkte P entsprechen im Geradenraum die Geraden in einer Ebene $\mathfrak{E}$ durch den Grundstrahl S und durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ auf ihm. Wir fragen jetzt,

*) Dissertation p. 14.

wie viele Brennebenen gehen durch $\mathfrak{P}$, die ihre zugeordneten Brennpunkte in $\mathfrak{E}$ haben? — Die Ebenen durch $\mathfrak{P}$, deren $\mathfrak{S}_{n,2}$ angehörige Strahlen sich auf $\mathfrak{E}$ schneiden, bilden einen Büschel $\varrho + 1^{\text{ter}}$ Ordnung; denn durch jede Gerade in $\mathfrak{E}$ gehen ausser $\mathfrak{E}$ noch ϱ solcher Ebenen. Da nun in jeder Ebene nur 2 Strahlen von $\mathfrak{S}_{n,2}$ liegen, so giebt die Anzahl der Brennebenen, welche diesem Büschel angehören, die gesuchte Zahl. Dieselbe ist also:

$$4(\varrho + 1) = 4(n - 1).$$

Unsere Formel giebt:

$$i = n(n - 1) + 2(2 - 1) - (n - 2)(n - 3) = 4(n - 1).$$

§ 7.

Strahlentripel.

Eine Fläche des vierdimensionalen Raumes erscheint von einem Punkte desselben aus im Allgemeinen mit einer Anzahl „scheinbarer" dreifacher Punkte. Dies zeigt eine Abzählung der Mannigfaltigkeit ihrer dreifachen Secanten. In jedem linearen Raume befindet sich eine eindimensionale Mannigfaltigkeit derselben. Da weiter sämmtliche dreifachen Secanten in der Gesammtheit der linearen Räume durch eine Gerade enthalten sind, so ist ihre Mannigfaltigkeit von der dritten Dimension. Im Allgemeinen werden diese Secanten kein dreidimensionales Punktgebilde ausmachen, wie man am Falle des vollständigen Schnittes zweier Räume sehen kann; es geht daher durch jeden Punkt eine bestimmte Anzahl von ihnen.

Wir fügen diese Zahl noch den oben zur Classification der Flächen im vierdimensionalen Raume gewählten Zahlen bei, da dieselbe noch, wie es einfache Beispiele lehren sollen, willkürlich ist.

Zuerst nehmen wir eine Fläche 4^{ter} Ordnung, welche aus einer Ebene und einer Fläche 3^{ten} Grades in einem linearen Raume bestehe. Der Sehnenkegel von einem Punkte aus ist hier vom dritten Grade; dreifache Secante kann keine vorhanden sein.

Nehmen wir sodann die Fläche 4^{ter} Ordnung, welche dem Strahlensysteme 3^{ten} Grades und 1^{ter} Classe entspricht, so ist hier der Sehnenkegel durch einen Punkt ebenfalls vom dritten Grade, enthält aber, indem er aus drei in einer Geraden sich schneidenden Strahlenbüscheln besteht, eine dreifache Secante. — Hatten wir im ersten Falle die Zahlen 4, 3 und 0, so sind die entsprechenden im zweiten Falle: 4, 3 und 1.

Ein Beispiel einer nicht zerfallenden Fläche haben wir für den ersten Fall in der Fläche 4^{ter} Ordnung, welche aus der projectiven Beziehung einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung und einer ausserhalb ihres

Raumes gelegenen Geraden durch die Verbindung entsprechender Punkte hervorgeht. Ihre Projection ergiebt eine Fläche 4^{ten} Grades mit einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung als Doppelcurve. Die Gesammtheit der dreifachen Secanten bildet hier ein dreidimensionales Punktgebilde 2^{ten} Grades. In der Folge wird sich zeigen, dass die Zahlen, welche wir zur Classification der Flächen im vierdimensionalen Raume gewählt haben, auch wirklich zur Kennzeichnung der Eigenschaften einer allgemeinen algebraischen Fläche ausreichen.

Das Vorkomnis einer dreifachen Secante giebt bei der Uebersetzung in den Geradenraum, wenn die Secante die Fläche Φ schneidet, ein einfaches Verhalten. Es entspricht ihr dann ein Strahlenbüschel, dem drei Strahlen des abgebildeten Strahlensystems angehören. Eine solche Zusammenstellung von drei Strahlen in einer Ebene durch einen Punkt wollen wir ein *„Strahlentripel"**) nennen; die Ebene heisse eine *„Tripelebene"*, der Punkt ein *„Tripelpunkt"*.

Die Anzahl der dreifachen Secanten, welche durch einen Punkt der Fläche Φ an die betrachtete Fläche gehen, die beiden Geraden auf Φ abgerechnet, giebt dann die Anzahl der Strahlentripel, deren Tripelpunkte in derselben Ebene liegen und deren Tripelebenen zugleich durch denselben in jener gelegenen Punkt gehen (dem Punkte auf Φ entsprechen ja die Geraden eines S enthaltenden Strahlenbüschels).

*Diese Zahl, für welche wir im Folgenden die Bezeichnung t anwenden, giebt mit den Zahlen, welche Grad n, Classe k und Art ϱ anzeigen, eine vollständige Classification der algebraischen Strahlensysteme***).

Bestimmung der Zahl t für den vollständigen Schnitt zweier Complexe.

Den zwei Complexen vom Grade μ und ν entsprechen die Räume $R^{2\mu}$ und $R^{2\nu}$, welche durch Φ μ- und ν-fach hindurchgehen. Die Zahl t giebt die Anzahl der 3-fachen Secanten, welche dem Sehnenkegel K, der von einem Punkte P auf Φ an die der Schnittcongruenz entsprechende Fläche F geht, angehören — die beiden $\mu\nu$-fachen Secanten σ_1^0 und σ_2^0, welche auf der Fläche Φ liegen, sind hierbei abgerechnet. Zur Bestimmung dieser Anzahl betrachten wir den Schnitt

---

*) Dissertation p. 12.

**) Als Maximalwerth für $3t$ bei gegebenen n, k und ϱ findet sich:

$$(n(n-1)+\varrho-2)\frac{(\varrho-1)}{2}$$

oder:

$$(k(k-1)+\varrho-2)\frac{(\varrho-1)}{2}.$$

des Sehnenkegels mit dem Raume $R^{2\mu}$. Derselbe besteht I) aus der Schnittcurve C, welche K mit der Fläche F gemein hat, II) aus den als Schnittlinien je $\frac{\mu\nu(\mu\nu-1)}{2}\cdot\mu$-fach zu zählenden Geraden σ_1^0 und σ_2^0 und III) aus einer Curve C'. Bezeichnet h die Ordnung des Sehnenkegels, dann ist C von der Ordnung $2h$ und C' von der Ordnung:

$$h(2\mu-2)-\mu\nu(\mu\nu-1)\,\mu.$$

Ein Schnittpunkt von C mit C', der nicht auf σ_1^0 oder σ_2^0 liegt, giebt mit P durch eine Gerade verbunden entweder eine Tangente an $R^{2\mu}$ oder eine dreifache Secante (im Allgemeinen). Die Gesammtzahl A_1 der nicht auf σ_1^0 oder σ_2^0 gelegenen Schnittpunkte von C mit C', vermindert um die Anzahl A_2 derjenigen unter ihnen, in welchen die zugehörigen Mantellinien von K den Raum $R^{2\mu}$ berühren, giebt also das dreifache der Zahl t.

Die Anzahl A_1 bestimmen wir als die Anzahl der Schnitte von C' mit dem Raume $R^{2\nu}$, die auf Φ oder, was gleichbedeutend ist, im singulären Raume P liegenden ν-fach abgerechnet. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$A_1=\big(h(2\mu-2)-\mu\nu(\mu\nu-1)\,\mu\big)\,\nu.$$

Die Anzahl A_2 erhält man als die Anzahl der ausserhalb Φ gelegenen Schnitte von C mit der ersten Polare des Punktes P in Bezug auf $R^{2\mu}$, weniger der Zahl $i=2h-2\varrho$ der Tangenten von P an $R^{2\mu}$, welche zugleich C berühren.

Da die erste Polare durch die Fläche $\Phi(\mu-1)$-mal und durch die Geraden σ_1^0 und σ_2^0 im besondern μ-mal hindurchgeht (letzteres erkennt man, indem man $R^{2\mu}$ mit einem linearen Raum durch σ_1^0 schneidet) und da C durch einen Schnitt von σ_i^0 mit F offenbar $(\mu\nu-1)$-fach hindurchgeht, so wird:

$$A_2=2h(2\mu-1)-[2h(\mu-1)+2\mu\nu(\mu\nu-1)]-[2h-2\varrho]$$

oder, wenn man $\mu\nu(\mu\nu-1)=h-\varrho$ setzt:

$$A_2=2h\mu-4(h-\varrho).$$

Für die Zahl $3t$ findet man so den Ausdruck:

$$3t=A_1-A_2=h(\mu-2)(\nu-2)+\varrho(\mu\nu-4).$$

Setzt man für ϱ und h ihre Werthe in μ und ν in diese Gleichung ein:

$$\varrho=\mu\nu(\mu-1)(\nu-1), \quad \text{(S. 109)}$$

$$h=\mu\nu(\mu\nu-1)+\varrho=\mu\nu[2\mu\nu-(\mu+\nu)],$$

dann erhält man:

$$3t=\mu\nu[3\mu^2\nu^2-6\mu\nu(\mu+\nu)+2\nu^2+2\mu^2+q\nu\mu-4].$$

§ 8.

Tripelflächen.

Der Fläche, die den Ort der Tripelpunkte (S. 115) des Strahlensystems $\mathfrak{S}_{n,k}$ bildet, ist in der Abbildung das System der Ebenen ε_2 zugeordnet, welche dreifache Sehnen der Fläche F, des Bildes von $\mathfrak{S}_{n,k}$ enthalten; das analoge System der Ebenen ε_1 entspricht der Fläche, welche von den Tripelebenen umhüllt wird. Die Tripelpunktfläche besitzt im Allgemeinen eine vierfache Curve mit einer Anzahl von Doppelpunkten und fünffachen Punkten und dazu zwei getrennte Doppelcurven, gebildet von den Punkten mit einem Paar von Strahlentripeln, das aus 6 bezw. 5 Strahlen besteht. In der Abbildung sind den Punkten der vierfachen Curve bezw. der Doppelcurven Ebenen ε_2 mit vierfachen Sehnen bezw. zwei dreifachen (die einen oder keinen Punkt mit F gemein haben) zugeordnet. Die Zahlen, welche je die Ordnung dieser Curven und die Anzahl ihrer vielfachen Punkte angeben, sind bestimmte Functionen der Classificationszahlen.

Die Eigenschaften der Tripelflächen studiren wir mittelst der Untersuchung des Systems der dreifachen Sehnen der Fläche F. Durch jeden Punkt des Raumes M gehen im Allgemeinen $t+\binom{n}{3}+\binom{k}{3}$ derselben und in jedem Raume bilden dieselben eine Regelfläche vom Grade:

$$h(n+k-2)-\tfrac{1}{6}(n+k)(n+k-1)(n+k-2)=H,$$

wo

$$h=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\varrho^{*}).$$

Durch einen Punkt von F geht ein Kegel von dreifachen Sehnen, von denen diejenigen, welche Φ treffen, jedoch nicht in einem Punkte von F, eine einfache Bedeutung für den Geradenraum besitzen. Ihre Anzahl giebt nämlich an, wie oft ein Strahl von $\mathfrak{S}_{n,k}$ einem Strahlentripel zugehört. Nehmen wir, um diese Zahl τ zu bestimmen, speciell einen Strahl von $\mathfrak{S}_{n,k}$, welcher den Grundstrahl S der Abbildung

*) Dieser Ausdruck für den Grad der Regelfläche der dreifachen Sehnen einer Curve von der Ordnung $n+k$ und mit h scheinbaren Doppelpunkten, welcher bei Salmon, analytische Geom. des R. II. 3A. Art. 236, vom Falle des vollständigen Schnittes aus hergeleitet wird, lässt sich mittelst des Correspondenzprincipes von der Regelfläche der Sehnen aus, welche eine Gerade schneiden, ableiten, indem man je den Schnitt einer Sehne und der Geraden mit den übrigen Punkten verbindet, in denen die Ebene durch Sehne und Gerade die Curve schneidet. Die ganze Figur wird dann zuletzt von einem Punkte aus in die Ebene projicirt. Vergleiche hierzu noch Picquet: „Sur les courbes gauches algébriques", Comptes rendus LXXVII. 474—478.

schneidet, so haben wir im Raume M die Anzahl der dreifachen Sehnen zu ermitteln, die durch einen Punkt P des Schnittes von Φ und F innerhalb desjenigen Tangentialraumes R gehen, welcher dem Complexe mit dem zu P gehörigen Strahle als singulären Strahle entspricht. Um eine Gleichung für die Zahl τ aufzustellen, bestimmt man für die Schnittcurve des Tangentialraumes die Berührungsebenen, welche durch eine Gerade PP' in ihm gehen und sie nicht in P berühren, indem man dieselben nacheinander als Tangentialebenen des Kegels ansieht, welcher die Curve von P' aus, und desjenigen, welcher sie von P aus projicirt. Mit Berücksichtigung, dass P ein Doppelpunkt dieser Curve ist (in jeder Ebene ε_2 des Tangentialraumes liegen z. B. nur noch $n-1$ Punkte ausserhalb σ_2) und dass durch ihn eine Gerade σ_1 und eine σ_2 gehen, welche die Curve noch in $n-1$ bezw. $k-1$ Punkten trifft, erhält man die Gleichung:

$$(n+k)(n+k-1) - 2\left(\varrho + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}\right) - 2 =$$

$$4 + (n+k-2)(n+k-3) - 2\tau - (n-1)(n-2) - (k-1)(k-2)$$

und hieraus:

$$\tau = \varrho - n - k + 4.^*)$$

Will man den Grad der Fläche der Tripelpunkte bestimmen, so hat man die Anzahl der dreifachen Sehnen zu ermitteln, welche innerhalb eines linearen Tangentialraumes an Φ die in ihm liegende Gerade der Schaar σ_2 schneiden. Da diese Gerade selbst offenbar in der Regelfläche der dreifachen Secanten der Schnittcurve jenes Raumes als $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}$-fache Erzeugende zählt, so kann sie nur noch von $H - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.3}$ Erzeugenden geschnitten werden, wo H den Grad der Regelfläche bedeutet. Hiervon sind für unsern Zweck diejenigen Sehnen in Abzug zu bringen, welche die Gerade in Punkten von F schneiden; ihre Zahl wird für jeden dieser Punkte dadurch erhalten, dass man die Classe des Kegels, welcher obige Schnittcurve von einem beliebigen Punkte ihres Raumes aus projicirt, der um 2 vermehrten Classe des Projectionskegels von dem betreffenden Punkte aus gleichsetzt:

$$(n+k)(n+k-1) - 2h = (n+k-1)(n+k-2) + 2 - 2x;$$

die gewünschte Zahl ist hierbei gleich x weniger der $\frac{(k-1)(k-2)}{1.2}$ zählenden Geraden σ_2. Zum Schluss haben wir noch die im Tangentialraum enthaltene Gerade σ_1 als $\frac{n(n-1)}{1.2.3}\frac{(n-2)}{}$-fach zählend abzu-

*) Dissert. pag. 13.

ziehen, so dass der Grad der Tripelfläche sich nach einfacher Rechnung in der Form darstellt:

$$T = (n-2)\left[\varrho + \frac{(n-1)(n-3k)}{6}\right].$$

Aus dieser Formel, welche, wie bemerkt sei, *von t unabhängig ist*, geht durch Vertauschung von n mit k der Ausdruck für die Classe der von den Tripelebenen umhüllten Fläche hervor. Die beiden Tripelflächen sind eindeutig so auf einander bezogen, dass in jeder Ebene t Punkte der ersten Fläche liegen, deren zugeordnete Ebenen durch denselben Punkt der Ebene gehen.

§ 9.

Lineare Strahlensysteme in besonderer Lage zu $\mathfrak{S}_{n,k}$.

Es sollen jetzt die besonderen Lagen, die eine Ebene zur Fläche F_{n+k} im vierdimensionalen Raume haben kann, untersucht werden. Ein Fall wurde theilweise schon oben erörtert, nämlich der des Ortes der Tangenten, welche in einem Punkte der Fläche die Schnittcurven mit linearen Räumen berühren. Durch jeden Punkt des vierdimensionalen Raumes gehen $i = n(n-1) + k(k-1)$ solcher Tangentialebenen, wenn die Fläche das Bild des allgemeinen Strahlensystemes n^{ter} Ordnung und k^{ter} Classe ist.

Analog fragen wir nach dem Ort der Ebenen, welche in einem Punkte P der Fläche ihre Schnitte mit linearen Räumen osculiren. In jedem Raume durch P liegt eine Schmiegungsebene, durch jeden Punkt des Raumes gehen zwei; dieselben entsprechen, wenn wir die Fläche von diesem Punkte aus in den gewöhnlichen Raum projiciren, den beiden Haupttangenten der Projectionsfläche in der Projection von P.

Zur weiteren Untersuchung der Verhältnisse im Punkte P projiciren wir die Fläche von P aus selbst. Der Tangentialebene in P entspricht dann eine gerade Linie g, in welche ihr Berührungspunkt verzerrt erscheint. Die Schmiegungsebenen liefern die Tangenten an die Projectionsfläche f in den Punkten von g. Durch jeden Punkt von g gehen deren einfach unendlich viele, die in einer Ebene durch g liegen. In jeder Ebene durch g liegen 2 solcher Büschel. Die Berührungspunkte dieser Ebenen sind so zu einer Involution 2^{ten} Grades auf g angeordnet. Bei zwei Ebenen durch g fallen die Berührungspunkte zusammen; sie bilden die Projectionen zweier Räume, in denen durch jeden Punkt nur eine Schmiegungsebene geht — wir wollen sie parabolische Räume nennen. Die Tangenten der Fläche f, welche in den Berührungspunkten der Ebenen durch g die Schnittcurve derselben berühren, sind die Projectionen von Ebenen, welche in P mit der

betrachteten Fläche 4 zusammenfallende Punkte gemein haben. Es giebt somit in jedem Raume durch eine Tangentialebene zwei Ebenen, welche für die Schnittcurven der durch sie gehenden linearen Räume Wendeberührebenen in P bilden. In den parabolischen Räumen fallen diese Ebenen mit der Tangentialebene zusammen. Die Tangentialebene enthält in einem durch sie gehenden linearen Raum die beiden Tangenten im Doppelpunkte P der Schnittcurve; die beiden Ebenen der hier besprochenen Art, welche noch in dem Raume liegen, sind die beiden Schmiegungsebenen im Doppelpunkte der Curve. Die Tangentialebene schneidet die Fläche noch in $n + k - 4$ discreten Punkten, deren Projectionen die auf g liegenden Doppelpunkte der Fläche f sind.

Ist eine Tangente von f in einem Berührungspunkte einer Ebene durch g Wendetangente der Schnittcurve, so bildet sie die Projection einer Ebene, welche die projicirte Fläche in P fünffach schneidet. Es soll die Anzahl dieser Tangenten bestimmt werden. Die Tangenten an die Schnittcurven der Ebenen durch g in den Punkten auf g bilden eine Regelfläche 5^{ten} Grades (in jeder Ebene durch g liegen 2 Erzeugende und in jedem Punkte auf g wird die Regelfläche von 3 Tangentialebenen, einer veränderlichen und 2 festen, berührt). Die Regelfläche schneidet die Fläche f, deren Grad N sei, ausser g in einer Curve C von der Ordnung $5N - 5$; um dies einzusehen, zähle man in einer beliebigen Ebene durch eine Erzeugende der Regelfläche die Schnittpunkte der Curven, in welcher die Ebene die beiden Flächen schneidet, und beachte dabei, dass die Erzeugende eine Wendetangente der Curve von f ist. Wir haben jetzt nach der Anzahl der Punkte der Curve C zu fragen, welche auf g liegen, ohne in Doppelpunkte von f zu fallen. Ein Doppelpunkt der Fläche f auf g ist als dreifacher Punkt der Curve C zu zählen. Irgend ein ebener Schnitt von f durch den Doppelpunkt schickt nämlich einen Zweig durch diesen, welcher die Projection eines nicht durch P hindurchgehenden Curvenzuges auf der projicirten Fläche bildet. Der Schnitt dieses Zweiges giebt, da g dreifache Gerade der Regelfläche ist, einen dreifachen Punkt von C (der andere Zweig verhält sich im Doppelpunkte zur Regelfläche, wie jeder andere ebene Schnitt in seinem Punkte auf g). Da in einer Ebene durch g nur $2N - 6$ Punkte von C nicht auf g liegen, so wird die gesuchte Zahl der Punkte auf g:

$$(5N - 5) - 3(N - 3) - 2N + 6 = 10.$$

In jedem dieser Punkte ist die zugehörige Erzeugende Wendetangente für den Schnitt von f mit einer Ebene der g.

Wir haben also in dem Punkte einer Fläche im vierdimensionalen Raume 10 Ebenen, welche die Fläche in ihm fünffach schneiden.

Die Uebersetzung vorstehender Betrachtungen in den Geradenraum giebt für das Strahlensystem n^{ter} Ordnung und k^{ter} Classe die Sätze:

„Durch zwei beliebige Gerade gehen an das Strahlensystem

$$i = n(n-1) + k(k-1)$$

lineare Tangentialsysteme.“

„Durch zwei Gerade gehen im Allgemeinen zwei lineare Systeme, welche das Strahlensystem nach dem Strahle s dreifach schneiden. Diejenigen Geraden, welche mit einer gegebenen Geraden ein Paar bilden, durch das nur ein solches System geht, liegen mit ihr in zwei linearen Complexen. Die linearen Systeme durch eine feste Gerade, welche das Strahlensystem im Strahle s dreifach schneiden, gruppiren sich zu Büscheln, die je zu zweien in einem linearen Complexe durch ein Tangentialsystem enthalten sind. Die in s berührenden linearen Regelschaaren durch eine feste Gerade sind auf diese Weise zu einer Involution zweiten Grades angeordnet.“

„In einem linearen Complexe durch die zerfallende in s berührende Regelschaar gehen durch jeden Strahl im Allgemeinen zwei lineare Systeme, welche s mit dem betrachteten System vierfach gemein haben.“

„Durch eine beliebige Gerade gehen 10 *lineare Strahlensysteme, welche das System nach s fünffach schneiden.“*

§ 10.

Grad und Classe der Brennfläche.

Unter den Ebenen mit besonderer Lage zu einer Fläche F im vierdimensionalen Raume besitzen die, welche sie in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, die grösste Allgemeinheit. Geht eine solche Ebene durch eine Gerade auf Φ, gehört sie also der Schaar ε_1 oder ε_2 (§ 2, II, III) an, so ist ihr im Geradenraume eine Brennebene bezw. ein Brennpunkt des abgebildeten Strahlensystems $\mathfrak{S}_{n,k}$ zugeordnet. Die Brennpunkte bilden eine Fläche, welche von den Brennebenen umhüllt wird. Dies erkennt man aus der Abbildung auf den vierdimensionalen Raum, wie folgt: den Brennpunkten eines Strahles von $\mathfrak{S}_{n,k}$ mit ihren zugeordneten Brennebenen entsprechen zwei Φ schneidende Tangenten einer Tangentialebene an F. Durch diese Ebene gehen zwei Tangentialräume an Φ, welche je zwei ihrer Geraden enthalten. Ein solcher Tangentialraum hat offenbar mit dem Büschel der Ebenen durch eine in ihm gelegene Gerade von Φ, welche F in zusammenfallenden Punkten schneiden, zwei zusammenfallende Ebenen gemein (es zeigt dies unmittelbar eine Projection von einem Punkte auf der Axe des Büschels aus). Jeder der beiden Tangentialräume von Φ ist im Geradenraum eine Gerade zugeordnet, welche, wie man leicht erkennt, durch einen Brennpunkt und die nicht zugehörige Brennebene

desselben Strahles hindurchgeht; dieselbe hat also mit der Brennfläche zwei zusammenfallende Punkte gemein.

Den Grad der Brennfläche giebt die Anzahl der Punkte auf einer Geraden, durch welche zwei zusammenfallende Strahlen des Systems gehen. Trifft die Gerade den Grundstrahl S der Abbildung, so sind den Punkten auf ihr die Ebenen der Schaar ε_2 zugeordnet, welche in einem Tangentialraum an Φ enthalten sind. Der Grad der Brennfläche zeigt also an, wie viele Ebenen durch je eine Gerade der Schaar σ_2 in einem linearen Raume die Fläche F in zwei zusammenfallenden Punkten, die nicht auf Φ liegen, schneiden. Ebenso zeigt die Classe an, wie viel solcher Ebenen in einem linearen Raume durch eine Gerade der Schaar σ_1 gehen.

Diese Zahlen bestimmen wir durch Projection der Fläche F von einem Punkte auf Φ aus in den gewöhnlichen Raum. Ist dann n der Grad, k die Classe und ϱ die Art des Strahlensystems, so ist die Projection eine Fläche f vom Grade $n+k$ mit einer Doppelcurve von der Ordnung: $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + \varrho$. Die Gerade der Schaar σ_1 und die der Schaar σ_2, welche durch das Projectionscentrum gehen, projiciren sich in einen n-fachen Punkt N bezw. in einen k-fachen K der Fläche f. Die Ebenen durch diese Geraden, welche F in zusammenfallenden Punkten schneiden, geben Tangenten. Der Grad des Tangentenkegels von K aus giebt den Grad der Brennfläche, der Grad desjenigen von N aus ihre Classe. Von K aus gehen in einer Ebene an f:

$$(n+k)(n+k-1) - 2\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + \varrho\right) = 2k(n-1) - 2\varrho$$

Tangenten.

Der Grad der Brennfläche ist also: $2k(n-1) - 2\varrho$.

Ihre Classe ist: $2n(k-1) - 2\varrho$.*)

Für den Fall des vollständigen Schnittes zweier Complexe hat man $n = k = \mu\nu$, $\varrho = \mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$ und erhält also für Grad und Classe der Brennfläche:

$$2\mu\nu(\mu+\nu-2)^{**}).$$

*) Die hieraus sich ergebende Beziehung zwischen Grad und Classe der Brennfläche rührt von Klein her (vergl. Lie in Nr. 4 der „Göttinger Nachrichten" von 1870).

**) Voss: „Ueber Complexe und Congruenzen. Math. Ann. Bd. IX, p. 88.

Bemerkung: Besitzt ein Strahlensystem eine Brenncurve, so enthält es eine Regelschaar von Strahlen, für die jeder Punkt ein Brennpunkt ist. Diese Fläche bildet einen Theil der Brennfläche.

§ 11.

Rückkehrcurve der Brennfläche; Büschel ihrer stationären Ebenen.

Die Punkte bezw. Ebenen, für welche die Strahlen des Strahlensystems zusammenfallen, bilden eine Curve bezw. einen Büschel. Solchen Punkten entsprechen in der Abbildung Ebenen ε_2, welche drei zusammenfallende Punkte mit F gemein haben. Die Ordnung der Curve bestimmen wir mittelst der Anzahl ihrer Punkte speciell in einer Ebene durch S. Dieser Ebene entspricht in M eine Gerade von σ_2. Wie viele Ebenen ε_2 gehen also durch je eine Gerade von σ_2, welche von F drei zusammenfallende Punkte enthalten? Diejenigen dieser Ebenen ε_2, welche bei der Projection von F in den dreidimensionalen Raum durch das auf Φ gelegene Projectionscentrum gehen, projiciren sich in Rückkehrkanten des Tangentialkegels, welcher an die Projection f der Fläche F von ihrem k-fachen Punkte aus geht. Da der Tangentialkegel eindeutig auf einen ebenen Schnitt der Brennfläche bezogen ist, so folgt, dass die Punkte der dreifach zusammenfallenden Strahlen Rückkehrpunkte der Brennfläche sind, und analog, dass die Ebenen mit drei zusammenfallenden Strahlen stationäre Ebenen derselben bilden.

Es soll jetzt die Anzahl jener Rückkehrkanten bestimmt werden. Zu diesem Zwecke ermitteln wir zunächst die Anzahl der Rückkehrkanten des Tangentialkegels von einem beliebigen Punkte aus. Die Berührungspunkte dieser Rückkehrkanten sind Schnitte der zweiten Polare f'' der Kegelspitze in Bezug auf die Fläche f mit der Berührungscurve des Kegels. Die übrigen dieser Schnittpunkte gehören zugleich der Doppelcurve von f an. Die Zahl der letzteren findet man als die Anzahl der Schnittpunkte der zweiten Polaren f'' mit der Doppelcurve, welche nicht in einen vielfachen Punkt der letzteren fallen (ein μ-facher Punkt der Fläche f ist ein $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$-facher Punkt der Doppelcurve und ein $(\mu-2)$-facher der Polare f''; wenn $\mu > 2$, liegt ein solcher Punkt im Allgemeinen nicht auf der Berührungscurve).

Die Doppelcurve besitze t dreifache Punkte; in K findet sich ein $\frac{k(k-1)}{2}$-facher, in N ein $\frac{n(n-1)}{2}$-facher. Die Zahl der auf der Doppelcurve in Betracht kommenden Punkte beträgt also:

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{1}+\varrho\right)(n+k-2)-\frac{k(k-1)}{2}\frac{(k-2)}{}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2}-3t=\frac{(n+k-2)}{2}(nk+2\varrho)-3t.$$

Der Grad der Berührungscurve des Tangentialkegels von P aus ist offenbar gleich dem Grad der Brennfläche vermehrt um $2k$, also:

$$2nk-2\varrho.$$

Die Anzahl der Rückkehrkanten ergiebt sich somit als:

$$(2nk-2\varrho)(n+k-2)-\frac{(n+k-2)}{2}(nk+2\varrho)+3t=$$
$$(n+k-2)\left(\frac{3nk}{2}-3\varrho\right)+3t.$$

Der Berührungskegel aus K besitzt dieselbe Classe, wie der allgemeine; indess sind zu ihm als k-fachem Punkte, wie man leicht erkennt, k Doppeltangentialebenen hinzugetreten, von denen jede die Anzahl der Rückkehrkanten um 6 herabsetzt. Die Anzahl der Rückkehrkanten dieses Kegels und damit die *Ordnung der Rückkehrcurve der Brennfläche* ist also:

$$(n+k-2)\left(\frac{3nk}{2}-3\varrho\right)+3t-6k.$$

Analog beträgt die Ordnung *des Büschels der stationären Ebenen:*

$$(n+k-2)\left(\frac{3nk}{2}-3\varrho\right)+3t-6n.$$

Für den Fall des vollständigen Schnittes zweier Complexe ergiebt sich:

$$\mu\nu\left(-3\mu^2\nu^2+6\mu\nu(\mu+\nu)-6(\mu+\nu)-3\mu\nu\right)+3t.$$

Der früher berechnete Werth von $3t$ war:

$$3t=\mu\nu\left(3\mu^2\nu^2-6\mu\nu(\mu+\nu)+2\mu^2+2\nu^2+9\mu\nu-4\right).$$

Hieraus folgt für die Ordnung der Rückkehrcurve:

$$2\mu\nu\left((\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)+\mu\nu-4\right).^{*})$$

§ 12.

Rang der Brennfläche.

Der Grad des Tangentialkegels, der von einem Punkte aus an die Brennfläche geht, ist mit der Classe der Projection f von F identisch. Denn eine Ebene durch den Punkt K oder N ist die Projection eines Tangentialraumes von Φ, welchem im Geradenraum eine Gerade zugeordnet ist. Einer Tangentialebene durch K oder N entspricht so im Geradenraum eine Tangente der Brennfläche. Den Tangenten der letzteren, welche durch einen Punkt gehen und in einer Ebene liegen, sind aber Tangentialräume durch eine Gerade zugeordnet. Hieraus folgt die Behauptung.

Die Anzahl der Tangentialebenen durch eine Gerade g an f erhält man, indem man die Anzahl der Schnittpunkte der ersten Polare eines

*) Voss, a. a. O. pag. 138.

Punktes P auf g mit der Berührungscurve a des Tangentenkegels, welcher von einem zweiten Punkte P' der Geraden g aus an f geht, um die Anzahl der Schnittpunkte dieser Curve mit der Doppelcurve vermindert. Der eine Theil der letzteren Punkte liegt auf der zweiten Polaren von P'; ihre Anzahl wurde im vorigen Abschnitt gleich $\frac{(n+k-2)}{2}(nk+2\varrho) - 3t$ gefunden. Der andere Theil besteht aus den Cuspidalpunkten der Doppelcurve (dieselben sind Schnitte des Raumes von f mit den vom Projectionscentrum ausgehenden Tangenten an F); ihre Zahl ist im Allgemeinen $i = n(n-1) + k(k-1)$. Dieselben sind doppelt zu zählen, da sich in ihnen die Fläche f und ihre ersten Polaren gegenseitig berühren.

Für den Rang der Brennfläche ergiebt sich so, da die Curve a von der Ordnung $2nk - 2\varrho$ ist:

$$(2nk-2\varrho)(n+k-1) - \frac{(n+k-2)(nk+2\varrho)}{2} + 3t - 2\big(n(n-1)+k(k-1)\big)$$

oder:

$$2[3nk-(n+k+\varrho)](n+k-1) - \frac{(n+k-2)(nk+2\varrho)}{2} + 3t.$$

Besitzt die Fläche F ausser den im Allgemeinen vorhandenen ϱ Doppelpunkten noch eine weitere Anzahl d, so ist, da die Zahl i um $2d$ kleiner wird, zu der Formel $4d$ hinzuzufügen.

Für den Fall des vollständigen Schnittes zweier Complexe ergiebt sich hieraus

$$2\mu\nu\big((\mu+\nu-1)^2 - \mu\nu + 1\big).^*)$$

Ordnung der Doppelcurve der Brennfläche.

Durch Anwendung der Plücker'schen Formeln auf einen ebenen Schnitt der Brennfläche findet man aus dem Grade N der Brennfläche, aus ihrem Range S und aus der Ordnung R ihrer Rückkehrcurve die Ordnung D ihrer Doppelcurve:

$$2D = N(N-1) - S - 3R.$$

Die Vertauschung von n mit k giebt die Ordnung des Büschels der Doppeltangentialebenen an die Brennfläche.

Gleicherweise ergeben die Plücker'schen Formeln die Classe $\varkappa'$ *der Haupttangentencongruens* der Brennfläche:

$$\varkappa' = R + 3(S-N)$$

und die *Classe* δ' *der Doppeltangentencongruens:*

---

*) Vergl. Voss, a. a. O. pag. 92.

$$2\delta' = (S-N)(N+S-9) + 2D.$$

Die Ordnungen $\varkappa$ und δ dieser Congruenzen gehen aus diesen Formeln durch Vertauschung von n mit k hervor.

§ 13.

Regelschaar, welche die Rückkehrcurve trägt.

Zur Bestimmung des Grades der Fläche, welche von den Strahlen des Systemes gebildet wird, die für einen Punkt dreifach zu zählen sind, schneiden wir dieselbe durch eine Gerade g, welche mit dem Grundstrahl S der Abbildung in einer Ebene liegt. Den Geraden, welche g schneiden, entsprechen in der Abbildung die Punkte eines Raumes. Die Aufgabe verlangt dann zunächst die Anzahl der Ebenen der Schaar ε_2 zu ermitteln, welche die Fläche F in Punkten ihres Schnittes C mit dem Raume dreifach schneiden. Wir fragen zu diesem Zwecke nach der Anzahl $\mathfrak{A}$ der Osculationsebenen von F in Punkten von C, welche durch einen beliebigen Punkt P in R gehen und zugleich eine beliebige Gerade schneiden. Im singulären Raume P bilden dann die Spuren der Osculationsebenen in Punkten von C einen Complex vom Grade $\mathfrak{A}$, welcher $2\mathfrak{A}$ Strahlen mit der Schaar σ_2 gemein hat. Zieht man noch die $2(n+k)$ mehrfach zu zählenden Ebenen ε_2, welche in den Schnittpunkten von C mit P osculiren, von der Zahl $2\mathfrak{A}$ ab, so ergiebt sich die gesuchte Zahl in der Gestalt: $2\mathfrak{A} - \mu(n+k)$.

Bestimmung von $\mathfrak{A}$: F projicire sich von P aus in den gewöhnlichen Raum nach f, und die Curve nach der ebenen Curve c. Die Osculationsebenen durch P geben das System der Haupttangenten von f. Die Zahl $\mathfrak{A}$ stellt den Grad der Regelfläche derjenigen Haupttangenten dar, welche zu den Punkten von c gehören. Da c Doppelcurve dieser Regelfläche ist und da in der Ebene von c im Allgemeinen: $3(n+k)(n+k-2) - 6\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + \varrho\right)$ Erzeugende von ihr liegen, so findet sich die Zahl $\mathfrak{A}$ gleich:

$$\mathfrak{A} = 6nk - (n+k) - 6\varrho.$$

Bestimmung von μ: Die Regelfläche von Haupttangenten in den Punkten von c berührt in diesen Punkten die Fläche f so, dass die beiden durch einen von ihnen laufenden Zweige der Curve, nach welcher irgend eine Ebene erstere Fläche schneidet, in ihm sich und die Fläche f osculiren (zwei zu ihm benachbarte Punkte auf der Curve und auf f haben eine Entfernung von unendlich kleiner Grösse dritter Ordnung). Nimmt man den Punkt P innerhalb P, so folgt hieraus: Die Schnittcurve C_0 von P mit F wird in ihren auf C gelegenen Punkten von beiden Mänteln jedes Kegels des Complexes, welchen die Spuren der betrachteten Osculationsebenen bilden, osculirt. Wir

schliessen daraus, dass jede Regelfläche durch C_0 ihre Erzeugende durch die Punkte auf C mit dem Complex 6-fach zu zählend gemein hat (der Complex hat nämlich mit dem Complex der Geraden, welche C_0 schneiden die 6-fach zu zählenden Strahlenbündel durch jene Punkte auf C gemein). Die Zahl μ ist somit gleich 6.

Als Grad der Regelfläche, welche die Rückkehrcurve trägt, erhalten wir sonach:

$$4\left(3nk - 2(n+k) - 3\varrho\right).$$

Diese Zahl wird im Falle des vollständigen Schnittes zweier Complexe μ^{ten} und ν^{ten} Grades:

$$4\mu\nu\left(3(\mu+\nu) - 7\right).^{*})$$

§ 14.

Regelschaar, welche die Doppelcurve trägt.

Wir verfahren, um den Grad der Fläche zu bestimmen, welche von den Strahlen, die einen Brennpunkt auf die Doppelcurve der Brennfläche legen, erzeugt wird, ganz wie bei der analogen Aufgabe der Rückkehrcurve. Es ist hier zunächst die Anzahl der Ebenen der Schaar ε_2 aufzusuchen, welche die Fläche F in zwei Punkten berühren, von denen je einer auf der Schnittcurve C eines gegebenen linearen Raumes liegt. Wir ermitteln zu diesem Zwecke die Anzahl $\mathfrak{A}$ der F doppelt berührenden Ebenen mit dem Berührungspunkte auf C, welche durch einen beliebigen Punkt P gehen und eine gegebene Gerade schneiden. Der Complex vom Grade $\mathfrak{A}$, welchen dann die doppelt berührenden Ebenen mit einem Berührungspunkte auf C im Raume P bestimmen, enthält $2\mathfrak{A}$ Strahlen der Schaar σ_2; $2\mathfrak{A}$ ist die Anzahl der gesuchten Ebenen ε_2. Von diesen Ebenen ziehen wir zu unserm Zwecke diejenigen mehrfach ab — die betreffende Zahl sei $\mathfrak{B}$ —, welche F in einem Schnitte von C mit P berühren, und ebenso diejenigen — ihre Zahl sei $\mathfrak{C}$ —, welche dies in Punkten von P ausserhalb C thun. Als Grad der betrachteten Regelfläche des Strahlensystems ergiebt sich dann:

$$2\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C}.$$

Bestimmung von $\mathfrak{A}$: Wird F von P aus nach f und C nach c projicirt, so giebt $\mathfrak{A}$ den Grad der Regelfläche der Doppeltangenten von f, welche in Punkten von c berühren. Derselbe ist gleich der $(n+k)$-fachen Anzahl der Erzeugenden durch einen Punkt von c, vermehrt um die doppelte Zahl der Doppeltangenten in der Ebene von c (jede derselben gehört zwei Punkten von c zu); bedeutet also λ die Zahl der ersteren Erzeugenden, so wird:

*) Voss, a. a. O. pag. 130.

$$\mathfrak{A} = (n+k)\lambda + (2nk-n-k-2\varrho)(n+k+2nk-2\varrho-9) + 2\varrho + k(k-1) + n(n-1).$$

Da die vorige Regelfläche f längs c berührt, so sind die Ebenen, mit deren Abzählung $\mathfrak{B}$ zu thun hat, wie leicht zu ersehen, doppelt zu zählen, so dass man den Werth $2(n+k)\lambda$ erhält.

Bestimmung von $\mathfrak{C}$: Die betrachteten Ebenen ε_2, welche je in einem Punkte von P ausserhalb C die Fläche F berühren, bilden zwei Arten: die einen gehen durch Gerade σ_2, welche F berühren, die andern durch gewöhnliche σ_2. Lassen wir nun dem linearen Raume der Curve C im Geradenraum einen Complex mit dem singulären Strahle g entsprechen, so ist einer Ebene der ersten Art im Geradenraum ein Punkt zugeordnet, der in einer Brennebene durch den Grundstrahl S liegt und Brennpunkt eines die Gerade g schneidenden Strahles ist. Um die Anzahl jener Ebenen zu bestimmen, haben wir also die Schnittpunkte der Brennebenen durch g mit der Curve der Brennpunkte auf den g schneidenden Strahlen zu zählen. Die Ordnung dieser Curve ist aber $2kn - 2\varrho$, da auf g selbst sich $2k(n-1) - 2\varrho$ Punkte derselben befinden und auf jeder Ebene durch g noch $2k$ liegen. Die gesuchte Zahl ist daher $(2kn-2\varrho)\left(2n(k-1) - 2\varrho\right)$.

Einer Ebene der andern Art ist ein Punkt zugeordnet, welcher für einen die Gerade g schneidenden Strahl Brennpunkt ist und auf einem S schneidenden Strahle des Systemes liegt. Wir haben also, um die Zahl dieser Ebenen zu ermitteln, die Schnittpunkte obiger Brennpunktscurve mit der Regelfläche der S treffenden Strahlen des Systemes zu bestimmen, wovon dann die Brennpunkte auf den k Strahlen in der Ebene durch S und g und diejenigen der n Strahlen durch den Schnitt von g mit S abzuziehen sind und zwar doppelt, da die zu ihnen gehörigen Brennebenen Curve und Regelfläche in ihnen berühren. Die Anzahl der Ebenen der zweiten Art ist daher:

$$2(n+k)(kn-\varrho-2),$$

so dass:

$$\mathfrak{C} = 2(kn-\varrho)(2nk-n+k-2\varrho) - 4(n+k)$$

wird.

Nach einigen Umformungen ergiebt sich jetzt für den Grad der Fläche, welche die Doppelcurve trägt:

$$2[nk(2nk+n-k-20)+10(n+k)+\varrho(2\varrho-4nk+k-n+20)].$$

§ 15.

Beispiel.

Es sollen jetzt die Formeln für den Grad dieser die singulären Curven der Brennfläche tragenden Regelflächen an dem einfachen Beispiel des Strahlensystems 2^{ter} Ordnung und 2^{ter} Classe in ihren

Bestandtheilen geprüft werden. Das Strahlensystem, in einem linearen Complexe enthalten, bildet sich ab auf eine Fläche F 4^{ter} Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt K und 16 Geraden, welche den 16 Strahlenbüscheln entsprechen.

I. Im Falle der Rückkehrcurve wird der Grad der sie tragenden Regelfläche durch die Anzahl der Schnittpunkte des Kegelschnittes K mit der Regelfläche der Haupttangenten an F in den Punkten eines ebenen Schnittes C gegeben. Da nun im Strahlensysteme keine Rückkehrcurve vorhanden ist, so müssen diese Punkte theils auf die 16 Geraden, welche auch der Fläche der Haupttangenten angehören, theils auf C zu liegen kommen. Der Grad letzterer Fläche ist aber 20, so dass $40 - 16 = 24$ der betrachteten Punkte in die Schnitte von C mit K fallen. Da diese Schnitte einen Werth von $4 = n + k$ einfachen Punkten darstellen, so wäre der einfache Punkt, wie es auch im allgemeinen Falle geschehen ist, 6-fach zu zählen.

II. Im Falle der Doppelcurve ist die Anzahl der Schnittpunkte der Regelfläche der Doppeltangenten an F, welche in Punkten von C berühren, mit dem Doppelkegelschnitte zu betrachten. Offenbar müssen hier die Schnittpunkte alle in die Schnitte von C mit K und in die 4 Rückkehrpunkte auf K fallen — letztere Punkte entsprechen den Brennebenen durch den Grundstrahl der Abbildung und sind also der ersten im allgemeinen Falle bei der Zahl $\mathfrak{E}$ gebildeten Kategorie analog; in einen Rückkehrpunkt fallen 8 der Schnittpunkte, da von ihm aus so viele Tangenten an F gehen, welche in Punkten von C berühren. Da nun die Regelfläche vom Grade 24 ist (durch einen Punkt von C gehen je zwei Erzeugende und C besitzt 16 Doppeltangenten), so fallen in die für 4 Punkte zählenden Schnitte von C mit K zusammen $48 - 32 = 16$ der betrachteten Punkte, so dass der einfache Punkt $4 = 2\lambda$-fach, wo λ die Anzahl der durch einen Punkt von C gehenden Erzeugenden bedeutet, zu zählen wäre, wie analog auch im allgemeinen Fall (s.: Zahl $\mathfrak{B}$) gerechnet worden ist.

Wenn die allgemeine Formel für unsern speciellen Fall ein negatives Resultat, nämlich — 16 ergiebt, so hat das seinen Grund darin, dass die 16 Geraden auf F, wiewohl sie nicht der Fläche der Doppeltangenten angehören, doch in jener Formel mitrechnen. Sie vertreten nämlich die Tangenten, welche F in einem Punkte von C und in einem des für die Abbildung singulären Kegelschnittes K berühren, sie entsprechen also der zweiten Kategorie bei der Zahl $\mathfrak{E}$.

§ 16.

Anzahl der Punkte, für welche vier Strahlen zusammenfallen.

Den Punkten des Geradenraumes, in denen 4 Strahlen des Systems zusammenfallen, entsprechen in der Abbildung die Ebenen der Schaar ε_2, welche die Fläche F „vierpunktig berühren". Zur Ermittelung der Anzahl dieser Ebenen bestimmen wir die Anzahl $\mathfrak{A}$ der vierpunktig berührenden Ebenen, welche durch einen beliebigen Punkt P von M gehen und eine gegebene Gerade schneiden. $\mathfrak{A}$ giebt dann den Grad des Complexes an, den die Spuren dieser Ebenen im Raume P bilden. Von den $2\mathfrak{A}$ Strahlen, welche der Complex mit der Schaar der Geraden σ_2 gemein hat, ziehen wir diejenigen mehrfach ab, durch welche Ebenen hindurchgehen, die F in Punkten auf ihnen vierpunktig berühren; die so reducirte Zahl giebt dann die Zahl der betrachteten Punkte.

Bestimmung von $\mathfrak{A}$: Die Projection der Fläche F von P aus in den gewöhnlichen Raum sei f. Die Zahl $\mathfrak{A}$ stellt dann die Anzahl der f vierpunktig berührenden Tangenten dar, welche eine Gerade g schneiden. Um diese Anzahl zu bestimmen, betrachten wir die Curve c der Berührungspunkte der Haupttangenten, welche g schneiden. Ihre Ordnung erhält man in der Anzahl der Haupttangenten in einer Ebene durch g, vermehrt um die Anzahl der Haupttangenten in den Schnittpunkten von g mit f:

$$O = 3(n+k)\,(n+k-2) - 6\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + \varrho\right) + (2n+k)$$
$$= 6nk - (n+k) - 6\varrho.$$

Durch jeden Punkt auf g gehen, wenn R den Grad der Rückkehrcurve der Brennfläche des Strahlensystems bezeichnet, $R+6k$ Haupttangenten; es sind ihm also so viele Punkte auf c zugeordnet. Geht eine vierpunktig berührende Tangente durch einen Punkt auf g, so geht dessen dritte Polare durch einen zugeordneten Punkt. Ordnen wir einem Punkte von g die Schnittpunkte seiner dritten Polare mit c zu, so ist durch die doppelte Zuordnung der Punkte auf g zu denen auf c eine Correspondenz*) $\left(O(n+k-3), 3R+18k\right)$ auf g bestimmt. Zieht man von den Coincidenzen derselben die 6-fach zu zählenden Schnittpunkte der Fläche mit g ab und ebenso die Punkte der Doppelcurve von f, welche auf c liegen, ohne Cuspidalpunkte zu sein, so erhält man die Zahl $\mathfrak{A}$ der vierpunktig berührenden Tangenten, welche g treffen.

---

*) Durch jeden Punkt gehen im Allgemeinen 3 Flächen, welche dritte Polaren zu Punkten auf g sind.

Die Anzahl jener Schnittpunkte der Doppelcurve mit c bestimmt man durch Betrachtung der Schnittpunkte der ersten Polare irgend eines Punktes auf g mit c. Dieselben bestehen aus den Berührungspunkten der Haupttangenten vom Punkte aus, den doppelt zu zählenden Berührungspunkten der Tangentialebenen durch g, den gesuchten Punkten und den dreifach zu zählenden Cuspidalpunkten der Doppelcurve (die erste Polare in jedem Cuspidalpunkte berührt die eigentliche Tangentialebene). Bezeichnet S die Classe von f (Rang der Brennfläche), so erhalten wir für die gesuchte Zahl:

$$(n+k-1)\,O-(R+2S+3i+6k).$$

Für $\mathfrak{A}$ ergiebt sich hieraus der Werth:

$$\mathfrak{A}=\big((3R+18k+O(n+k-3)-6(n+k)\big)-O(n+k-1)+R+6k$$
$$+2S+3i=4R+2S+3i-2O+18k-6n.$$

Von der Anzahl $2\mathfrak{A}$ der Ebenen ε_2, welche F vierpunktig berühren, ziehen wir die Zahl der mehrfach gerechneten Ebenen ε_2 ab, welche dies in den Punkten von P thun. Der Umstand, dass ein Theil der zu letzteren Ebenen gehörigen σ_2 die Fläche F berührt und ein Theil nicht, ergiebt zwei zu unterscheidende Fälle. Den Ebenen des ersten Falles entsprechen im Geradenraum die Brennpunkte der Strahlen, von denen eine Brennebene durch den Grundstrahl der Abbildung S geht; die Zahl der zugehörigen σ_2 ist also gleich der Classe K der Brennfläche. Den Ebenen des zweiten Falles entsprechen Rückkehrpunkte der Brennfläche, deren zugehörige Strahlen S treffen; ihre Zahl ist daher gleich dem Grade L der Linienfläche, welche die Rückkehrcurve trägt.

Wie oft diese Vorkommnisse zu zählen sind, erkennt man folgendermassen: Die Projection f der Fläche F von P aus wird von der Fläche ihrer vierpunktig berührenden Tangenten in jedem Punkte p ihrer Berührungscurve so berührt, dass die Schnittcurven einer Ebene mit diesen Flächen sich in p überosculiren. In einem Cuspidalpunkte p' von f insbesondere berühren sich die Züge der Curven, nach welchen eine Ebene die Flächen schneidet, paarweise vierpunktig, so dass ein Zweig der einen Curve in ihm einen der andern berührt und einen schneidet. Ein Punkt p' zählt für diese Curven also 2×5-fach als Schnittpunkt. — Die Gerade $\overline{Pp}$ ist eine Secante von F, $\overline{Pp'}$ eine Tangente. Nehmen wir also P auf einer Geraden σ_2 des ersten bezw. zweiten Falles, so folgt für die Schnittcurve C_0 von P mit F, welche sich als ebener Schnitt von f projicirt: Die Kegel des Complexes, welchen die vierpunktig berührenden Ebenen von F in P ausschneiden, mit den Spitzen auf der Geraden σ_2, schneiden C_0 in einem Punkte dieser Geraden 10- bezw. 4-fach; d. h. die Gerade ist ein 10- bezw. 4-facher Strahl des Systems der Complexstrahlen, welche C_0 treffen.

Das erste der betrachteten Vorkommnisse ist also 10-fach, das zweite 4-fach in Rechnung zu ziehen.

Für die Anzahl der Punkte im Geradenraum, für welche 4 Strahlen des Systems zusammenfallen, erhalten wir so:

$$8R + 4S + 6i - 4O - 10K - 4L + 36k - 12n.$$

Setzen wir für die Symbole ihre Werthe ein, so resultirt:

$$6nk\big(3(n+k)-20\big) + 24n + 44k - 4\varrho\big(9(n+k)-39\big) + 36t - 2i.$$

Im Fall des vollständigen Schnittes der Complexe μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung:

$$4\mu\nu[6(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-1) - 21(\mu+\nu) + 5\mu\nu + 33]^*).$$

Was die Bedeutung eines Punktes, in dem 4 Strahlen zusammenfallen, für die Brennfläche betrifft, so ist derselbe ein Punkt der Doppelcurve und zugleich ein stationärer Punkt der Rückkehrcurve. Das letztere ersieht man daraus, dass für die Projection f der Fläche F eine vierfache Tangente durch einen Punkt für zwei Haupttangenten zählt und dass die Brennfläche in einem solchen Punkte, wie man an der Abbildung leicht erkennt, nur eine eigentliche Tangentialebene, die zugeordnete Brennebene, besitzt.

Weitere besondere Punkte, welche bei einem Strahlensystem im allgemeinen Fall auftreten, sind die, durch welche eine Gruppe von drei und zugleich eine solche von zwei zusammenfallenden Strahlen hindurchgeht, und diejenigen, für welche drei Paare zusammenfallender Strahlen vorhanden sind. Für die Brennfläche bedeutet das erste Vorkommniss einen stationären Punkt ihrer Doppelcurve, indem dieselbe die Rückkehrcurve schneidet, — man erkennt dies auf analoge Weise wie vorhin — und das zweite Vorkommniss einen dreifachen Punkt der Doppelcurve.

§ 17.

Beispiel.**)

Zur Prüfung der hauptsächlichsten für die Brennfläche aufgestellten Formeln wenden wir dieselben auf das Strahlensystem an, welches durch eine Cremona'sche Verwandtschaft k^{ter} Ordnung von zwei Ebenen E_1 und E_2 entsteht. Wir nehmen hiebei den besondern Fall, bei welchem die Curven einer Ebene, welche den Geraden der andern entsprechen, einen $(k-1)$-fachen Punkt gemein haben, so dass also in jeder der Ebenen $2k-2$ Hauptpunkte noch ausserdem vorhanden sind. Dem $(k-1)$-fachen Hauptpunkte H_1 in E_1 sind dann durch

*) Voss: a. a. O. pag. 136; es ist dies die dort mit β bezeichnete Zahl.

**) Vgl. Hirst, „On congruences of the third order and class", Proceedings of the London Math. Society, vol. 16, No. 247; Schöner, Dissertation „Untersuch. über das durch zwei cubisch verwandte Ebenen erzeugte Strahlensystem." München 1887.

die Verwandtschaft in E_2 die Punkte einer Curve vom Grade $k-1$ zugeordnet, welche $(k-2)$-mal durch den vielfachen Hauptpunkt H_2 in E_2 hindurchgeht. Das Strahlensystem, welches durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte gebildet wird, ist offenbar von der Classe k und besitzt einen k-fachen Strahl in dem Schnitt $\overline{E_1 E_2}$ der Grundebenen und einen $(k-2)$-fachen in $\overline{H_1 H_2}$. In E_1 befindet sich ein Büschel $k+1^{ter}$ Ordnung von Strahlen des Systems; dieselben verbinden die Punkte auf $\overline{E_1 E_2}$ mit ihren entsprechenden Punkten in E_1, die eine Curve C_1 vom Grade k bilden.

Der Grad des Strahlensystems ist daher $k+2$; denn durch einen Punkt von E_1 gehen $n+1$ Strahlen, welche auf E_1 liegen, und einer, der E_1 nicht angehört.

Wir ermitteln zuerst auf dem gewöhnlichen Wege die charakteristischen Zahlen für die Brennfläche des Strahlensystems und leiten sie hernach noch einmal an der Hand der oben aufgestellten Formeln ab. Den Grad der Brennfläche erhalten wir durch Betrachtung ihres Schnittes mit E_1. Diese Ebene berührt die Fläche zunächst nach der Curve C_1, weil den Punkten letzterer als Brennpunkten der Strahlen auf E_1 diese Ebene nicht als Brennebene zugeordnet ist. Dann schneidet E_1 die Fläche noch nach der Curve $2k^{ten}$ Grades — sie heisse K_1—, welche von den Strahlen auf E_1 umhüllt wird. Die Brennfläche besitzt also den Grad $4k$.

Ebenso bestimmen wir die Classe der Brennfläche an dem Tangentialkegel, der von H_1 aus an die Fläche geht. Derselbe besteht aus dem Kegel $2k-4^{ter}$ Classe, welcher H_1 mit der Curve h_2 verbindet, und dem Kegel k^{ter} Classe, dessen Tangentialebenen je einen Punkt von h_2 und die ihm zugeordnete Richtung durch H_1 enthalten. Da diese Tangentialebenen in H_1 selbst die Fläche berühren, so ergiebt sich als Classe der Brennfläche: $4k-4$.*)

Zur Bestimmung der Ordnung der Rückkehrcurve und der Doppelcurve führt die Betrachtung ihrer Schnittpunkte mit der Ebene E_1. Auf der Curve K_1 befinden sich, da sie eine k-fache Tangente besitzt, $3(k-1)$ Spitzen und $(k-1)(2k-4)$ Doppelpunkte, wie die Plücker'schen Formeln ergeben; diese Punkte gehören jenen singulären Curven an. Um die Punkte der Rückkehrcurve zu finden, welche ausser H_1 auf C_1 liegen, haben wir die Fälle abzuzählen, in denen der Berührungspunkt eines Strahles mit der Curve K_1 in den Punkt auf C_1 fällt, der zur Bestimmung des Strahles dient. Da sich in diesen Punkten die Curven K_1 und C_1 offenbar berühren, so haben wir danach zu fragen, wie oft eine Tangente von C_1 in den zu ihrem Berührungspunkt ge-

*) Hirst „On Cremonian congruences", Proceedings of the London Math. Society, vol. 14 (Nos. 211—213).

hörigen Strahl des Systems fällt. Die eindeutige Zuordnung der Tangenten von C_1 zu den Strahlen des Systems auf E_1 bestimmt auf der Geraden $\overline{E_1 E_2}$ eine Correspondenz $(1, 2k-2)$ — durch einen Punkt der Geraden gehen $2k-2$ Tangenten, so dass der betrachteten Fälle sich $2k-1$ finden. E_1 osculirt die Rückkehrcurve in jedem dieser Punkte; da sie nämlich für jeden Punkt von C_1 eigentliche Tangentialebene ist und somit die Tangente jeder durch ihn gehenden Curve der Fläche enthält, so befinden sich in ihr die Tangenten der Rückkehrcurve in den beiden unendlich benachbarten Punkten, welche einen Berührungspunkt von K_1 und C_1 bilden.*) In den übrigen $2k(k-2)+2$ Schnittpunkten der Curven K_1 und C_1 berührt die Ebene E_1 offenbar die Doppelcurve der Fläche.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, wie oft die singulären Curven der Fläche durch den Punkt H_1 hindurchgehen. Jeder Zweig der Rückkehrcurve, welcher von H_1 ausgeht, thut dies offenbar in der Richtung einer Rückkehrkante des Tangentialkegels im Punkte H_1 und jeder Zweig der Doppelcurve in der Richtung einer Doppelkante. Der Kegel ist aber, wie wir oben gesehen haben, von der Classe k und besitzt E_1 als $(k-1)$-fache Tangentialebene; es kommen ihm somit $3(k-2)$ Rückkehrkanten und $(k-2)(2k-6)$ Doppelkanten zu.

Wir erhalten für die Rückkehrcurve die Ordnung:

$$12(k-1)$$

und für die Doppelcurve:

$$8(k-1)(k-2)+4.$$

Der Rang der Brennfläche wird daher:

$$4(2k-1).$$

Um diese Zahlen mittelst unserer Formeln abzuleiten, suchen wir zuerst die Zahl τ (S. 118), welche angiebt, wie oft ein Strahl des Systems mit zwei andern Strahlen durch einen Punkt geht und in einer Ebene liegt, und verwenden dann zur Bestimmung von ϱ die Formel:

$$\varrho = n + k + \tau - 4,$$

wo

$$n = k + 2$$

ist.

Zu diesem Behufe untersuchen wir den Ort der Punkte, durch die mehr als zwei in derselben Ebene liegende Strahlen gehen. Schneidet eine solche Ebene ε die Ebenen E_1 und E_2 nach den Geraden l_1 und l_2, so bestimmen die Strahlenbüschel mit den Centren H_1 und H_2, welche auf E_1 bezw. E_2 liegend durch die Verwandtschaft dieser Ebenen pro-

*) Zu einem sorgfältigeren Beweise wäre hier ein Grenzübergang von einer Curve aus zu machen, durch deren Punkte je drei benachbarte noch verschiedene Strahlen gehen.

jectiv auf einander bezogen sind, auf l_1 und l_2 projective Punktreihen, da mindestens drei Verbindungslinien entsprechender Punkte auf ε durch einen Punkt gehen sollen. Die Ebene ε schneidet also $\overline{E_1 E_2}$ in einem der Punkte, in denen sich entsprechende Strahlen durch H_1 und H_2 schneiden — diese Punkte mögen mit T_1 und T_2 bezeichnet sein. Wir erhalten so den Satz, dass die Ebenen, deren k dem Systeme angehörigen Strahlen durch denselben Punkt gehen, durch den festen Punkt T_1 oder T_2 gehen. Die Punkte selbst in den sich je die Strahlen der Ebenen etwa durch T_1 schneiden, liegen auf der Ebene durch T_2, H_1 und H_2 — sie möge τ_1 heissen; denn sei ε eine solche Ebene, so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte von l_1 mit $\overline{T_1 H_1}$ und von l_2 mit $\overline{T_2 H_2}$ durch das Perspectivitätscentrum der Punktreihen von l_1 und l_2. Die Punkte, durch welche also je k in derselben Ebene liegende Strahlen des Systems gehen, liegen in zwei festen Ebenen τ_1 und τ_2. Jeder Ebene durch T_i ist auf diese Weise ein Punkt auf τ_i zugeordnet; dreht sich die Ebene um eine Axe, so beschreibt der Punkt einen Kegelschnitt, dessen Punkte von den Geraden ausgeschnitten werden, welche die Axe und irgend zwei einander entsprechende Gerade durch H_1 und H_2 in E_1 bezw. E_2 zugleich treffen.

Aus dem Bisherigen folgt, dass ein Strahl des Systemes zweimal mit $k-1$ andern Strahlen durch denselben Punkt geht und in derselben Ebene liegt, dass er dies also mit $(k-1)(k-2)$ Strahlenpaaren thut; die gesuchte Zahl τ wird also gerade gleich $(k-1)(k-2)$, woraus sich für ϱ der Werth:

$$(k-1)(k-2) + 2k - 2 = k(k-1)$$

ergiebt.

Aus den Formeln für Grad und Classe der Brennfläche:

$$2k(n-1) - 2\varrho \text{ bezw. } 2n(k-1) - 2\varrho$$

ergeben sich nach Einsetzung des Werthes von ϱ die oben gefundenen Werthe.

Als Grad der Fläche der Tripelpunkte erhalten wir in Ansehung davon, dass ein Punkt auf τ_i für $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}$ Tripelpunkte und ein Punkt auf E_i für $\frac{(k+1)k(k-1)}{1.2.3}$ gilt: $2k^3 - 3k^2 + k$; dasselbe Resultat liefert auch die allgemeine Formel (§ 8):

$$T = (n-2)\left(\varrho + \frac{(n-1)(n-3k)}{6}\right),$$

wenn für n und ϱ ihre Werthe eingesetzt werden.

Zur Bestimmung der Zahlen für die singulären Curven der Brennfläche muss noch die vierte Classificationszahl t gesucht werden, welche

angiebt, wie oft durch irgend einen Punkt P eine Tripelebene geht, deren Tripelpunkt in einer gegebenen Ebene ε durch P liegt. Zunächst ist offenbar die Ebene, welche P mit $\overline{E_1 E_2}$ verbindet, als $\binom{k}{3}$ solcher Tripelebenen zu zählen, da $\overline{E_1 E_2}$ k-facher Strahl des Systemes ist, und analog die Ebene durch P und $\overline{H_1 H_2}$ als $\binom{k-2}{3}$. Wir haben jetzt noch zu sehen, wie viele Ebenen durch P und T_i gehen, deren in τ_i zugeordneten Punkte in ε liegen. Den Ebenen durch $\overline{PT_i}$ sind aber in τ_i die Punkte eines Kegelschnittes zugeordnet, dessen Schnittpunkte mit ε Ebenen der verlangten Beschaffenheit liefern, so dass also durch P im ganzen 4 solcher Ebenen gehen. Da jede derselben für $\binom{k}{3}$ Tripelebenen zählt, so ergiebt sich für t der Werth:

$$5\binom{k}{3} + \binom{k-2}{3} = (k^3 - 4k^2 + 6k - 4).$$

Dieser Werth in den Ausdruck für die Ordnung der Rückkehrcurve:

$$(n+k-2)\left(\frac{3nk}{2} - 3\varrho\right) + 3t - 6k = -3k^3 + 12k^2 - 6t + 3t$$

eingesetzt, bringt das Resultat hervor: $12(k-1)$, wie wir es auch oben erhalten haben.

Bei der Berechnung des Ranges der Brennfläche ist zu beachten, dass das Bild des Strahlensystems im vierdimensionalen Raume zwei vielfache Punkte im Werthe von $\binom{k}{2}$ bezw. $\binom{k-2}{2}$ Doppelpunkten besitzt, wodurch die Anzahl $i = n(n-1) + k(k-1)$ der an das Bild von einem Punkte ausgehenden Tangenten entsprechend vermindert wird. Die Formel für den Rang der Brennfläche:

$$(2nk - 2\varrho)(n+k-1) - \frac{(n+k-2)(nk+2\varrho)}{2} + 3t - 2i$$

giebt dann, da

$$i = n(n-1) + k(k-1) - k(k-1) - (k-2)(k-3) = 8k - 4$$

wird,

$$(12k^2 + 6k) - 3k^3 + 3(k^3 - 4k^2 + 6k - 4) - (16k - 8) = 8k - 4,$$

welcher Werth sich auch zuerst ergeben hat.

Wir schliessen hiemit die Behandlung dieses Beispiels, das ausser zur Prüfung der Formeln zeigen wollte, wie die Classificationszahlen in besondern Fällen zu ermitteln sind und wie sich specielle Vorkommnisse in die allgemeinen einfachen umsetzen lassen.

§ 18.

Singularitäten der Tripelflächen.

Für die singulären Curven der Tripelpunktfläche bestimmen wir die Ordnung durch Betrachtung der Regelfläche L der dreifachen Secanten an das Bild F des Strahlensystems, welche eine Gerade G der Schaar σ_2 treffen. 1) Die Anzahl der vierfachen Secanten, welche G schneiden, giebt dann die Ordnung v der vierfachen Curve C_4 der Tripelfläche, 2) die Anzahl der Ebenen durch G, welche zwei nicht durch denselben Punkt von F gehende dreifache Secanten enthalten, giebt die Ordnung u einer Doppelcurve C_2, 3) die Anzahl der Ebenen durch G mit zwei auf F sich schneidenden Erzeugenden von L die Ordnung w einer zweiten Doppelcurve Γ_2, durch deren Punkte je zwei Strahlentripel mit gemeinsamem Strahle gehen.

1) *Ordnung v von C_4.* Wir stellen die Frage, wie oft in einer Ebene durch G und durch eine dreifache Secante ein weiterer Schnittpunkt mit der Fläche F in die Secante fällt. Verbinden wir den Schnitt von G und der Secante mit den $n-3$ übrigen Punkten der Ebene auf F, so werden hierdurch jeder dreifachen Secante $n-3$ Gerade zugeordnet, und wir fragen danach, wie oft eine Secante mit einer der zugeordneten Geraden zusammenfällt. Giebt dies die Zahl $\mathfrak{Z}$ an, so erhält man das vierfache von v dadurch, dass man von $\mathfrak{Z}$ die Zahl μ der Ebenen durch G abzieht, welche F je in einem Punkte einer Erzeugenden von L berühren, ohne dass dabei die Erzeugende Tangente an F ist.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{Z}$ projiciren wir die Fläche L der dreifachen Secanten und die Regelfläche L' der zugeordneten Geraden von einer beliebigen Geraden aus — einen Punkt mittelst einer Ebene — in die Ebene E. Die Projectionen der dreifachen Secanten umhüllen dann offenbar eine Curve von der Classe $t+T$, wenn t die vierte Classificationszahl und T den Grad der Tripelfläche bedeutet (S. 118). Die Projection von L' wird ein Strahlenbüschel von der Ordnung $(t+T)(n-3)+k(T-\tau)$, wo τ die Anzahl der Strahlentripel mit demselben Strahl vorstellt (S. 118); denn auf G liegen offenbar $k(T-\tau)$ Erzeugende von L' (soviele Ebenen gehen durch G, welche dreifache Secanten, die F nicht in einem Punkte von G schneiden, enthalten und F in je einem Schnitt mit G berühren). Auf einer beliebigen Geraden g auf E ist dann durch die Zuordnung von L und L' eine Correspondenz $\big((t+T)(n-3),\ (t+T)(n-3)+k(T-\tau)\big)$ bestimmt, so dass wir, da der Schnitt von l mit der Projection von G offenbar für $(t+T)(n-3)$ Coincidenzen zählt, erhalten:

$$\mathfrak{Z} = (t+T)(n-3)+k(T-\tau).$$

Die Zahl μ finden wir von der Regelfläche der G treffenden Sehnen aus, welche in den Berührungsebenen an F durch G je den Berührungspunkt enthalten. Solcher Sehnen befinden sich in einem Raume durch G, wenn N den Grad der Brennfläche des Systems bezeichnet, $N(n-2)$ und durch jeden Punkt gehen deren soviele, als an die Projection f von F, die von diesem Punkte aus in den gewöhnlichen Raum geschieht, Tangenten durch den Schnitt von G mit f gehen, welche in andern Punkten der Doppelcurve von f berühren; diese Zahl, welche wir mit a bezeichnen, wurde oben (S. 123) bestimmt. Den Schnitt je einer Sehne der betrachteten Regelfläche — sie heisse B — mit G verbinden wir mit den übrigen $n-3$ Schnittpunkten von F und der Ebene durch G und die Sehne, so dass jeder Erzeugenden von B $n-3$ Erzeugende einer Fläche B' zugeordnet sind, wobei $(N-2)k(n-2)$ Erzeugende von B' in G fallen (in den Ebenen durch G, welche F in den Schnittpunkten mit G berühren). Zieht man von der Zahl $\mathfrak{Z}'$, die angiebt, wie oft zugeordnete Gerade zusammenfallen, die Anzahl R der Osculationsebenen durch G, welche F nicht in Punkten von G osculiren, also die Ordnung der Rückkehrcurve der Brennfläche $2(n-3)$-fach ab und ebenso die Ordnung D ihrer Doppelcurve 4-fach, so ergiebt sich das Doppelte der gesuchten Zahl μ. Man erhält aber $\mathfrak{Z}'$ durch Projection der Flächen B und B' von einer Geraden aus in eine Ebene, in der wir dann zwei auf einander bezogene Strahlenbüschel von der Ordnung $a + N(n-2)$ und $\big(a + N(n-2)\big)(n-3) + (N-2)k(n-2)$ bekommen. Auf irgend einer Geraden l der Ebene ist dann eine Correspondenz bestimmt, deren Coincidenzen, ausser dem Schnitt von l mit der Projection von G, die Zahl $\mathfrak{Z}'$ abzählt, so dass:

$$\mathfrak{Z}' = \big(a + N(n-2)\big)(n-3) + (n-2)(N-2)k$$

wird. Hieraus folgt:

$$2\mu = \big(a + N(n-2)\big)(n-3) + (n-2)(N-2)k - 2(n-3)R - 4D,$$

womit die Zahl $4v = \mathfrak{Z} - \mu$ bestimmt ist.

2) *Ordnung u der Doppelcurve C_2:* Die Regelfläche, von der wir hier ausgehen, wird von den Sehnen gebildet, welche in je einer Ebene durch G und eine dreifache Secante die übrigen Punkte von F paarweise verbinden. In einem Raume durch G liegen daher $\frac{T(n-3)(n-4)}{2}$ Erzeugende und durch jeden Punkt auf G gehen deren $T\left(\varrho + \frac{n(n-1)}{2}\right) - 3t$ (soviele Ebenen projiciren von G aus zugleich Erzeugende von L und einfache Kanten des Sehnenkegels durch diesen Punkt).

Wir ordnen jetzt wieder jeder Erzeugenden die Geraden zu, welche in der Ebene durch G und durch die Erzeugende den gemeinsamen Punkt dieser Geraden mit den übrigen weder auf der Erzeugenden noch auf L liegenden Punkten von F verbinden, und finden dann für die Zahl zusammenfallender entsprechender Geraden:

$$\left[T\left(\binom{n-3}{2}+\varrho+\binom{n}{2}\right)-3t\right](n-5)+k(T-\tau)\binom{n-4}{2}$$

(die zweite Zahl der Summe giebt an, wie viele den Erzeugenden zugeordnete Geraden auf G zu liegen kommen).

Ziehen wir hievon die Anzahl der Ebenen durch Erzeugende von L und durch G ab, welche F berühren aber nicht in Punkten von L, und zwar $2(n-5)$-fach, so ergiebt sich das Dreifache der Zahl u. Die Anzahl jener Ebenen ist $NT-\mu$ weniger der Anzahl ν der Erzeugenden von L, welche F berühren.

Ordnet man jeder G schneidenden Tangente an F die Geraden nach den Punkten von F zu, welche mit ihr in einer Ebene durch G liegen, so erhält man, da $i\left(=n(n-1)+k(k-1)\right)$ Tangenten (S. 113) durch jeden Punkt von G gehen und in einem Raume durch G deren N die Gerade G schneiden und da ferner $k(N-2)$ zugeordnete Gerade in G fallen, für ν den Werth:

$$k(N-2)+(i+N)(n-2)-2R$$

in Anbetracht davon, dass die osculirenden Ebenen doppelt abzuziehen sind.

3) *Berechnung der Ordnung w von Γ_2.* Man projicirt hiezu die Regelfläche L von einem Punkte auf G aus in den gewöhnlichen Raum und erhält einen Kegel vom Grade T mit ν 4-fachen und $u+w$ 2-fachen Kanten, so dass seine Classe wird:

$$x=T(T-1)+2(u+w)+12\nu.$$

Dann projicirt man L von einem beliebigen Punkte aus in einen Raum R nach l und ordnet jeder Erzeugenden von l die Geraden zu, welche durch ihren Schnitt mit g, der Projection von G, in derselben Ebene durch g nach den übrigen Schnitten von l mit f laufen. Da $k\tau(T-1)$ solcher zugeordneter Geraden auf g fallen, so erhält man für die Anzahl der in einander liegenden entsprechenden Geraden:

$$(t+T)(n-3)+k\tau(T-1)=3x+2w+4\nu.$$

Aus den beiden hier aufgestellten Gleichungen berechnet sich w.

Singuläre Punkte auf den Curven: 1) Auf C_4 befinden sich 5-fache Punkte entsprechend den 5-fachen Φ schneidenden Secanten. 2) Die Schnitte von C_4 mit C_2 und Γ_2 sind 10- bezw. 6-fache Punkte der letzteren Curven. 3) Ein Schnitt von C_2 und Γ_2 ist ein einfacher Punkt von C_2 und ein doppelter von Γ_2 oder umgekehrt. 4) Auf C_2 und Γ_2

finden sich noch dreifache Punkte. Wir sehen indess von der Durchführung der langwierigen Rechnungen, welche die Bestimmung der Anzahl dieser Punkte erfordert, hier ab und begnügen uns damit, auf den Weg der Berechnung hingewiesen zu haben.

Zum Schlusse möge es mir gestattet sein, Herrn Professor Dyck für die Anregung und Antheilnahme, die ich von seiner Seite erfuhr, an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

Augsburg im April 1870.

Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie.

Von

Emil Waelsch in Prag.

Herrmann Grassmann stellt den Linientheil dar als das äussere Product seiner Endpunkte; hierbei ergeben sich die homogenen Coordinaten p_{ik} der geraden Linie. Diese, als Determinanten 2^{ten} Grades, werden von Grassmann alternirenden Producten gleich gesetzt*), nämlich $p_{ik} = p_i p_k = -p_k p_i$. Aehnliches gilt für die Coordinaten der Elementargebilde in höheren Räumen.

Führt man nun diese symbolischen Liniencoordinaten p_i in einige bekannte liniengeometrische invariante Bildungen ein**), so erkennt man, dass sich diese Invarianten aus Factoren zusammensetzen, die in Bezug auf die Symbole linear sind, also aus Factoren wie

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 + p_4 \xi_4,$$

wobei die ξ_i Ebenencoordinaten bedeuten. Diese Elementarfactoren werden für sich invariant sein und z. B. die p contragredient den ξ.

Hierauf wird man auch lineare und höhere Complexe symbolisiren, das Verhalten der Symbole bei linearer Transformation untersuchen, dann invariante Elementarausdrücke bilden und aus diesen durch Aggregation alle Invarianten. Diese Benutzung der Grassmann'schen Symbolik auszuführen und einige Anwendungen zu geben ist die Absicht der vorliegenden Arbeit.

1.

Die Symbole.

Sind x_i, y_i die Coordinaten zweier Punkte, ξ_i, η_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Coordinaten zweier Ebenen einer Geraden, so sind bekanntlich die Strahlencoordinaten dieser Geraden die 6 Grössen

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i,$$

*) s. auch Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme. § 35 ff.

**) z. B. in die Formeln, welche Herr Pasch ableitet in seiner Abhandlung: Zur Theorie der linearen Complexe, Crelle's J. Bd. 75. S. 106.

welche mit den *Axencoordinaten*

$$\pi_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$$

durch die Relationen

$$p_{23} = \varrho \pi_{14}, \ \ldots, \ p_{34} = \varrho \pi_{12}$$

verbunden sind. Es ist

$$p_{ik} = - p_{ki}, \quad \pi_{ik} = - \pi_{ki}.$$

Man kann statt dieser Coordinaten Symbole dadurch einführen, dass man setzt

$$p_{ik} = p_i p_k = - p_k p_i; \quad p_i p_i = 0,$$
$$\pi_{ik} = \pi_i \pi_k = - \pi_k \pi_i; \quad \pi_i \pi_i = 0.$$

Die p_i mögen Strahlensymbole, die π_i Axensymbole heissen.

Ist

$$\sum c_{ik} \pi_{ik} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum \gamma_{ik} p_{ik} = 0,$$

wobei $c_{23} = \varrho \gamma_{14}$ u. s. w., die Gleichung eines linearen Complexes, so heissen die c_{ik} oder γ_{ik} die Coordinaten desselben. Man kann wieder setzen

$$c_{ik} = c_i c_k = - c_k c_i, \quad \gamma_{ik} = \gamma_i \gamma_k = - \gamma_k \gamma_i.$$

Da

$$\sum c_i c_k \pi_i \pi_k = \sum c_i \pi_i c_k \pi_k = \frac{1}{2} (c_1 \pi_1 + c_2 \pi_2 + c_3 \pi_3 + c_4 \pi_4)^2 = \frac{1}{2} (c\pi)^2,$$

so geht die Complexgleichung über in

$$\frac{1}{2} (c\pi)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} (\gamma p)^2 = 0.$$

Kommen in einer Form die Linien- oder Complexcoordinaten in höherem Grade vor, so wird man um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden soviele Symbolreihen $p = p^1 = p^2 \ldots$; $\pi = \pi^1 = \pi^2 \ldots$ u. s. w. einführen als dieser Grad beträgt.

2.

Lineare Transformation.

Der Raum der Punkte x werde der linearen Transformation

(1) $$x_i' = (\alpha^i x)$$

unterworfen. Dann sind die Coordinaten der transformirten Geraden

$$p'_{ik} = \alpha^i x \cdot \alpha^k y - \alpha^i y \cdot \alpha^k x = \sum \alpha^i_\lambda \alpha^k_\mu p_\lambda p_\mu,$$

also

(2) $$p'_{ik} = p_i' p_k' = (\alpha^i p) \cdot (\alpha^k p).$$

Ist nun die Form $F(p_{ik})$ bei der Transformation (1) invariant, so ist

$$F(p'_{ik}) = F(p_i' p_k') = F\left((\alpha^i p)\,(\alpha^k p)\right) = c F(p_{ik});$$

wendet man daher auf $F(p'_{ik})$ die Substitution

$$p_i' = \alpha^i p$$

an, so gelangt man zur transformirten Form. Daher folgt:

Die Symbole p, c sind cogredient den Coordinaten x und daher contragredient den untereinander cogredienten π, γ, ξ.

Demnach werden symbolische Ausdrücke wie:

$$(p\pi),\quad (p\gamma),\quad (p\xi),\quad (x\pi),\quad (x\gamma),\quad (p^1p^2p^3p^4),\quad (p^1p^2cx),$$
$$(\gamma\pi\xi\eta)\quad \text{u. s. w.}$$

bei linearer Transformation invariant sein. Durch Aggregation dieser Ausdrücke erhält man dann invariante Bildungen, unter welchen die wichtigsten diejenigen sein werden, bei welchen die Symbole in solchen Graden vorkommen, dass das Aggregat unsymbolische Bedeutung hat.

So sind z. B. $(c\gamma)^2$, $(cx)(cy)$ Invarianten des linearen Complexes. Die erste verschwindet, wenn der Complex singulär wird; die letztere giebt annullirt die durch den Complex bestimmte räumliche Reciprocität.

3.

Bildformen 2ter Ordnung.

Die invariante Form $F(c_{ik}, \gamma_{ik}, p_{ik}, \pi_{ik})$, welche jede Symbolreihe der Complexform c quadratisch enthält, ist auch dann eine invariante Bildung, wenn man in dem System der gegebenen Formen statt des Complexes die quadratische Form $(c\xi)^2$ einführt, ebenso statt der Symbole γ, p, π die Symbole der quadratischen Formen $(\gamma x)^2$, $(p\xi)^2$, $(\pi x)^2$. So lässt sich jede liniengeometrische Invariante eines Systems, in welchem lineare Complexe vorkommen, als Invariante eines Systems deuten, in welchem statt dieser Complexe und der Liniencoordinaten Formen 2ter Ordnung, *die Bildformen*, eintreten.

Jede Invariante des letzten Systems ist aber ein Aggregat blos der angegebenen symbolischen Elementarausdrücke. *Man erhält daher durch Aggregation dieser Elementarausdrücke auch alle liniengeometrischen Invarianten des gegebenen Systems.*

Beispiel: Jede Invariante des Complexes $(c\pi)^2 = 0$, welche blos von den c abhängt, ist das Bild einer Invariante der Fläche $(c\xi)^2 = 0$; also ist nur das Bild der einzigen Invariante $(c^1c^2c^3c^4)^2$ zu wählen; da nun (s. Art. 5)

$$(c^1c^2c^3c^4)^2 = \frac{3}{2}\left((c\gamma)^2\right)^2,$$

so besitzt der lineare Complex nur die Invariante $(c\gamma)^2$.

4.

Complexe n^{ten} Grades.

Im II. Bde. der Math. Ann. hat Clebsch*) gezeigt, dass jeder Complex n^{ten} Grades symbolisch dargestellt werden kann als Potenz eines linearen Complexes. Ist

$$C \equiv \sum c_{ik,lm,} \ldots \pi_{ik}\pi_{lm} \ldots = 0$$

die Complexgleichung, so kann man ja symbolisch setzen

$$c_{ik,lm,} \ldots = c_{ik} \cdot c_{lm} \ldots,$$

worauf

$$C \equiv \left(\sum c_{ik}\pi_{ik}\right)^n$$

wird. Wir bilden nun eine neue symbolische Form, indem wir hierin symbolische Linien- und Complexcoordinaten einführen. Es wird

$$2^n C \equiv \left((c\pi)^2\right)^n.$$

Demnach sind

$$(c\pi)^{2n} = 0 \quad \text{und} \quad (\gamma p)^{2n} = 0$$

die symbolischen Complexgleichungen. Auch hier treten im Sinne des vorigen Art. an Stelle des gegebenen Complexes die Bildformen $2n^{ter}$ Ordnung rsp. $2n^{ter}$ Classe $(c\xi)^{2n}$ und $(\gamma x)^{2n}$, so dass also der dort angegebene Satz auch gilt, wenn das System Complexe n^{ten} Grades enthält.

5.

Identitäten.

Wir wollen, um auch formal mit Grassmann übereinzustimmen und wegen kürzerer Schreibweise, setzen:

$$\frac{1}{2}(c\gamma)^2 = [c\gamma], \quad \frac{1}{2^n}(cp)^{2n} = [cp]^n, \quad x\gamma \cdot \gamma y = [x\gamma y],$$

$$\xi c^1 \cdot c^1\gamma^2 \cdot \gamma^2 x = [\xi c^1 \gamma^2 x], \quad \gamma^1 c^2 \cdot c^2\gamma^3 \cdot \gamma^3 c^4 \cdot c^4\gamma^1 = [\gamma^1 c^2 \gamma^3 c^4], \text{ u. s. w.}$$

und leiten nun eine Reihe von Identitäten ab.

a. In der Identität

$$(1) \quad (abcd) \cdot x\xi - (abcx) \cdot d\xi + (abdx) \cdot c\xi - (acdx) \cdot b\xi + (bcdx) \cdot a\xi = 0$$

führe man dadurch Complexsymbole ein, dass man setzt:

$$a = c^1, \quad b = c^1; \quad c = c^2, \quad d = c^2;$$

dann erhält man, da

$$c\mu \cdot c\nu = -c\nu \cdot c\mu,$$

*) Ueber die Plücker'schen Complexe. St. 1. S. auch Salmon-Fiedler, Raumgeom. II. S. 503.

die Identität

$$2(c^2c^2c^1x)\cdot c^1\xi + 2(c^1c^1c^2x)\cdot c^2\xi = (c^1c^1c^2c^2)\cdot x\xi.$$

Nun ist

$$(ccc'x) = 2c_2c_3(c_1'x_4 - c_4'x_1) + \cdots = \sum \gamma_i\gamma_k(c_i'x_k - c_k'x_i)$$
$$= c'\gamma\cdot\gamma x - x\gamma\cdot\gamma c',$$

also

(2) $\quad (ccc'x) = 2[c'\gamma x]$ oder $(\gamma\gamma\gamma'\xi) = 2[\gamma' c\xi]$;

daher geht die letzte Identität über in:

I. $\quad [x\gamma^1c^2\xi] + [x\gamma^2c^1\xi] = -[c^1\gamma^2]\cdot x\xi.$

Sind die Complexe 1 und 2 identisch, so erhält man:

II. $\quad [x\gamma c\xi] = -\frac{1}{2}[c\gamma]\cdot x\xi.$ *)

b. Setzt man in der Identität (1)

$$b = c^1,\quad c = c^2,\quad d = c^3,\quad \xi = x,\quad a = y,$$

$x =$ den Unterdeterminanten der Matrix $|c^1c^2c^3|$, so erhält man unter Benutzung von (2)

(3) $(xc^1c^2c^3)(yc^1c^2c^3) = (c^2c^3xy)\cdot c^2\gamma^1\cdot\gamma^1c^3 + (c^3c^1xy)\cdot c^3\gamma^2\cdot\gamma^2c^1$
$+ (c^1c^2xy)\,c^1\gamma^3\cdot\gamma^3c^2,$

oder bei Gleichwerthigkeit der Symbole: $c^1 = c^2 = c^3$:

$$(xc^1c^2c^3)(\xi c^1c^2c^3) = 3(c^1c^2x\xi)\cdot c^1\gamma\cdot\gamma c^2$$

und hieraus, indem man rechts die Formel II. und dann (2) benützt

III. $\quad (c^1c^2c^3x)(c^1c^2c^3y) = 3[c\gamma][x\gamma y].$

Setzt man hierin $x = y = c^4$, so hat man für einen linearen Complex:

$$(c^1c^2c^3c^4)^2 = 6[c\gamma]^2 = (\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4)^2$$

und für Liniencoordinaten:

$$(p^1p^2p^3p^4)^2 = (\pi^1\pi^2\pi^3\pi^4)^2 = 6[p\pi]^2 = 24|p_{ik}|$$
$$= 24(p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34})^2.$$

c. Setzt man in (3) $c^1 = a$, $c^2 = b$, $c^3 = c$ und wären dies Symbole verschiedener Complexe, so erhält man:

$$(xbcd)(ybcd) = (xycd)\cdot c\beta\cdot\beta d + (xybd)\cdot b\gamma\cdot\gamma d + (xybc)\cdot b\delta\cdot\delta c.$$

Ist $x = y = a$ das Symbol eines weiteren Complexes, so erhält man hieraus unter Anwendung der Formel (2)

$$-\frac{1}{2}(abcd)^2 = [ac\beta d] + [ab\gamma d] + [ab\delta c]$$

und hieraus unter Anwendung der Identität I.:

IV. $\quad \frac{1}{2}(abcd)^2 = [ab][c\delta] + [ac][\beta d] + [ad][\beta c].$

*) Vergl. Pasch, l. c. § 4.

Aus dieser Formel ergeben sich die folgenden, wenn mehrere der Symbole zu demselben Complexe gehören:

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(ab c^1 c^2)^2 = [ab]\,[c\gamma] + 2[ac]\,[\beta c], \\ (ac^1 c^2 c^3)^2 = 6[ac]\,[\gamma c], \\ (c^1 c^2 c^3 c^4)^2 = 6[c\gamma]^2, \end{cases}$$

welch' letztere Formel schon oben gefunden wurde.

d. Aus

$$(c^1 c^2 c^3 c^4)\cdot(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4)\cdot(c^1 c^2 c^3 c^4) = (c^1 c^2 c^3 c^4)^2\cdot(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4)$$

folgt nach der letzten Formel (4) bei Gleichwerthigkeit der Symbole c:

$$(5)\qquad 4\cdot c^1\xi^1\cdot c^2\xi^2\cdot c^3\xi^3\cdot c^4\xi^4\cdot(c^1 c^2 c^3 c^4) = [c\gamma]^2\cdot(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4).$$

Hierzu

$$(6)\qquad 2\cdot c^1\xi^1\cdot c^2\xi^2\cdot c^3\xi^3\,(c^1 c^2 c^3 x^4) = -[c\gamma]\cdot\gamma^4 x^4\cdot(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4),$$

$$(7)\qquad c^1\xi^1\cdot c^2\xi^2\,(c^1 c^2 x^3 x^4) = \gamma^3 x^3\cdot\gamma^1 x^4\,(\xi^1\xi^2\gamma^3\gamma^4);$$

die beiden letzten Formeln folgen aus (5) durch ein- resp. zweimalige Anwendung von Substitutionen wie $\xi_i = x\gamma\cdot\gamma_i$ und deren Umkehrung

$$-\tfrac{1}{2}[c\gamma]\cdot x_i = c\xi\cdot c_i,$$

wie letztere sich aus II. ergiebt, wenn man dort $\xi = \eta$ und links $\xi_i = x\gamma\cdot\gamma_i$ setzt.

Durch Anwendung der Formel (2) erhält man:

$$2(\gamma\xi^1\xi^2\xi^3)\,\gamma x = -|ccx|\cdot|\xi^1\xi^2\xi^3| = -\sum \pm (c\xi^1\cdot c\xi^2\cdot x\xi^3),$$

also

$$(8)\qquad (\xi^1\xi^2\xi^3\gamma)\,\gamma x = [\xi^3 c\xi^3]\cdot x\xi^1 + [\xi^3 c\xi^1]\cdot x\xi^2 + [\xi^1 c\xi^2]\cdot x\xi^3,$$

ferner

$$(9)\qquad (\xi^1\xi^2\gamma^1\gamma^2)\gamma^1 x^1\cdot\gamma^2 x^2 = \tfrac{1}{2}[c\gamma](x^1\xi^2\cdot x^2\xi^1 - x^1\xi^1\cdot x^2\xi^2) + [x^1\gamma\xi^2][\xi^1 c\xi^2],$$

wie aus (8) für $\xi_i^3 = \gamma_i^2\cdot\gamma^2 x^2$ unter Anwendung von II. folgt.

6.

Lineare Complexe.

Der lineare Complex hat die Gleichung

$$(cx)^2 = [cx] = 0 \quad \text{oder} \quad (\gamma p)^2 = [\gamma p] = 0,$$

die Invariante $(c\gamma)^2 = [c\gamma]$. Die Gleichungen

$$c\xi\cdot c\eta = 0, \quad \gamma x\cdot\gamma y = 0$$

geben eine Polarbeziehung, welche das mit dem Complex verbundene Nullsystem darstellt.

Nach Formel III. des vorigen Art. ist:

$$3[c\gamma] \cdot \gamma x \cdot \gamma y = (c^1 c^2 c^3 x)\,(c^1 c^2 c^3 y),$$
$$3[c\gamma] \cdot c\xi \cdot c\eta = (\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \xi)\,(\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \eta);$$

für die Bildform $(\gamma x)^2$ hat man daher

$$3[c\gamma] \cdot (\gamma x)^2 = (c^1 c^2 c^3 x)^2.$$

Die Gleichung der Fläche $(c^1 c^2 c^3 x)^2$ in Ebenencoordinaten ist aber $(c\xi)^2$, also identisch mit der anderen Bildfläche. Ihre Invariante ist

$$(c^1 c^2 c^3 c^4)^2 = 6[c\gamma]^2,$$

was in Art. 3 ergab, dass $[c\gamma]$ die einzige Invariante des linearen Complexes sei.

Da ferner nach den Formeln (4) des vorigen Art. jede Invariante eines Systems von Bildformen linearer Complexe sich als Aggregat der Invarianten $[c^i \gamma^k]$ darstellt, so bilden letztere das volle Invariantensystem eines Systems linearer Complexe.

Bezeichnet man für den Augenblick mit $\widehat{x}$ die Nullebene des Punktes x, mit $\widehat{\xi}$ den Nullpunkt der Ebene ξ, so hat man für die Coordinaten

$$\widehat{\xi}_i = c\xi \cdot c_i, \quad \widehat{x}_i = \gamma x \cdot \gamma_i.$$

Dann folgen aus den Gleichungen (5), (6), (7) Art. 5 und ihren dualistischen die *Relationen**), welche zwischen den Coordinaten von 4 Punkten und ihren Nullebenen bestehen:

$$4(\widehat{\xi}\,\widehat{\eta}\,\widehat{\zeta}\,\widehat{\vartheta}) = [c\gamma]^2 \cdot (\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta),$$
$$2(\widehat{\xi}\,\widehat{\eta}\,\widehat{\zeta}\,x) = [c\gamma] \cdot (\xi\,\eta\,\zeta\,\widehat{x}),$$
$$(\widehat{\xi}\,\widehat{\eta}\,x\,y) = (\xi\,\eta\,\widehat{x}\,\widehat{y}),$$

u. s. w.

Sei $\widehat{x}^1$ die Nullebene des Punktes x bezüglich eines ersten Complexes, so ist der Nullpunkt von $\widehat{x}^1$ bezüglich eines 2^{ten} Complexes

$$\widehat{x}^1 \gamma^2 \cdot \gamma^2 \xi = 0;$$

daher ist

$$[x\gamma^1 c^2 \xi] = 0$$

die *specielle Collineation*, welche durch Aneinanderfügung der beiden Nullsysteme entsteht.

Sind die beiden Complexe singulär und schneiden sich ihre Träger, so ist

$$[x\gamma^1 c^2 \xi] = 0$$

die *Gleichung des Schnittpunktes* oder der *Verbindungsebene* der beiden Geraden, jenachdem man ξ oder x als variabel ansieht.

---

*) Vergl. Pasch, l. c. § 4.

$$[x\gamma^2 c^1 \xi] = 0$$

ist die zu der obigen inverse Collineation, und nach Formel I. ist

$$[x\gamma^1 c^2 \xi] + [x\gamma^2 c^1 \xi] = 0$$

die Identität, da der Ausdruck links proportional $x\xi$ ist; daher ist

$$[x\gamma^1 c^2 \xi] - [x\gamma^2 c^1 \xi] = 0,$$

die Gleichung der mit den beiden Complexen verbundenen *geschaarten Involution*.

7.

Drei lineare Complexe

haben die covarianten Flächen

$$x\gamma^1 \cdot \gamma^1 c^2 \cdot c^2\gamma^3 \cdot \gamma^3 x = [x\gamma^1 c^2 \gamma^3 x] = 0,$$
$$\xi c^1 \cdot c^1\gamma^2 \cdot \gamma^2 c^3 \cdot c^3 \xi = [\xi c^1 \gamma^2 c^3 \xi] = 0.$$

Es sind dies die Gleichungsformen der Fläche 2ten Grades, welche von den gemeinsamen Complexstrahlen der Complexe gebildet wird. Denn es sind

$$\xi_i = x\gamma^1 \cdot \gamma_i{}^1, \quad \xi_i{}^1 = x\gamma^3 \cdot \gamma_i{}^3$$

die Coordinaten der Nullebenen des Punktes x bezüglich der Complexe 1 und 3; wenn sich diese Ebenen in einem Strahle des Complexes 2 schneiden sollen, muss $\xi c^2 \cdot c^2 \xi^1 = 0$ sein.

Um die umgekehrte Aufgabe zu lösen, *die Complexe zu bestimmen, welche die Regelschaaren einer Fläche*

$$F_2 \equiv (\alpha x)^2 = 0$$

enthalten, bemerken wir, dass in dem Büschel zweier bezüglich F_2 zu einander polarer Complexe c, c' sich zwei Complexe der verlangten Eigenschaft vorfinden.

Die Gleichung

$$(\alpha\beta\xi\eta)(\alpha\beta\xi'\eta') = 0$$

vermittelt die zu F_2 gehörige Polarbeziehung zwischen den Geraden, es ist daher

$$c' \equiv [\alpha c\beta] \cdot [\alpha p\beta] = 0;$$

hieraus die Symbole $\gamma_i' = \alpha c \cdot \alpha_i$ des Complexes c' und mit Hilfe der Formel (2) Art. 5.

$$c' \equiv \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma\gamma) \cdot [\alpha p\beta].$$

Setzt man hierin $\gamma = \gamma'$, so erhält man den Polarcomplex c'' von c':

$$c'' \equiv \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\delta\varepsilon)[\alpha p\beta][\delta c\varepsilon] = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{24}(\alpha\beta\delta\varepsilon)^2 (ppcc) = \Delta[\gamma p] = \Delta \cdot c.$$

Der Complex des Büschels

$$\lambda c + c' = 0$$

hat daher als Polare den Complex

$$\lambda c' + \Delta c = 0;$$

sollen beide Complexe identisch sein, so folgt $\lambda^2 = \Delta$. Daher: Die Regelschaaren der Fläche $(\alpha x)^2 = 0$ sind enthalten in den linearen Complexen:

$$\pm \sqrt{\Delta} \cdot [\gamma p] + [\alpha c \beta] \cdot [\beta p \alpha] = 0,$$

worin $[\gamma p] = 0$ ein beliebiger Complex und $\Delta = |\alpha_{ik}|$. *)

8.

Uebertragungsprincip für lineare Complexe.

Genügt die Ebene ξ der Gleichung

$$[\xi c^1 \gamma^2 c^3 \xi] = 0,$$

so liegen ihre Nullpunkte bezüglich der 3 Complexe 1, 2, 3 nach Obigem in einer Geraden. In der That geht der linke Ausdruck in die Determinante der Coordinaten der Nullpunkte der Ebene $x_4 = 0$ über, wenn $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ gesetzt wird.

Man weiss nun nach Clebsch (Crelle's Journ. Bd. 59), dass sich jede Invariante J von k Punkten einer Ebene durch die Determinanten (ikl) der Coordinaten von je drei dieser Punkte ganz und rational ausdrücken lässt. Setzt man dann für die Determinante (ikl) den Ausdruck

$$(ikl) = [\xi c^i \gamma^k c^l \xi],$$

so erhält man eine covariante Fläche des Systems der linearen Complexe; jede Tangentialebene derselben besitzt bezüglich der Complexe k Nullpunkte, für welche $J = 0$ ist.

Ebenso gelten die dualen Betrachtungen.

Beispiel: Sollen 6 Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so muss sein **)

$$(123)\,(345)\,(561)\,(246) = (456)\,(612)\,(234)\,(513);$$

man erhält demnach eine Fläche 8^{ter} Classe, deren Tangentialebenen bezüglich 6 Complexen 6 auf einem Kegelschnitt liegende Nullpunkte haben.

Soll dies für jede Ebene der Fall sein, *so müssen die Complexe paarweise in Involution liegen.* Denn enthält die Ebene einen gemeinsamen Strahl der Complexe 1, 2, 3, so muss der Kegelschnitt zerfallen und daher muss in der Ebene ein gemeinsamer Strahl der Complexe 4, 5, 6 liegen; übereinstimmend wird, wenn die Ebene der Fläche (123) genügt, auch einer der in der letzten Gleichung rechts

*) Vergl. Gordan, Ueber eine das Hyperboloid betreffende Aufgabe, Schlömilch, Bd. 13, S. 59 u. Pasch, l. c. § 8 und 11.

**) S. Hunyady, Ueber die verschiedenen Formen der Bedingung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Crelle's Journ. Bd. 83, S. 76.

stehenden Factoren verschwinden und zwar der Factor (456), weil sonst die Complexe von einander abhängig wären. Die Complexbündel (1, 2, 3) und (4, 5, 6) liefern daher die beiden Schaaren einer und derselben F_2: die Complexe des ersten Bündels sind mit denen des zweiten in Involution.

Es ist in der That bekannt, dass die Nullpunkte einer Ebene bezüglich eines Klein'schen Systems von 6 Fundamentalcomplexen auf einem Kegelschnitt liegen.

Es erwächst hier die Aufgabe aus dem identischen Verschwinden der Covariante 8^{ter} Classe, das Verschwinden der 10 Invarianten $[\gamma^i c^k]$ nachzuweisen.

9.

Uebertragungsprincip für höhere Complexe.

Jede Invariante J im ternären Gebiete ist ein Aggregat von Determinanten dritten Grades, und man kann dieselbe auffassen als zu einem System linearer Formen gehörig, indem man die Gleichwerthigkeit der Symbole aufhebt. Ersetzt man dann die Determinanten durch Ausdrücke von der Form $[\xi c^1 \gamma^2 c^3 \xi]$, so erhält man nach dem letzten Art. diejenige Covariante eines Systems linearer Complexe, deren Tangentialebenen eine Gruppe von Nullpunkten mit der Invariante $J = 0$ haben. Lässt man die linearen Complexe, welche von gleichwerthigen ternären Symbolen herrühren, wieder zusammenfallen, so gelangt man zu Covarianten auch von Systemen mit Complexen höherer Ordnung. Ebenso gelangt man dual zu covarianten Flächen, welche Ort des Punktes sind, dessen Complexkegel gegebene invariante Eigenschaften haben.

Enthält ein Glied der Invariante i Determinanten 3^{ten} Grades, so folgt:

Die $\left.\begin{matrix}\text{Ebenen}\\ \text{Punkte}\end{matrix}\right\}$, *deren Complex* $\left.\begin{matrix}\text{-curven}\\ \text{-kegel}\end{matrix}\right\}$ *bezüglich einer Anzahl von Complexen beliebigen Grades, eine Eigenschaft haben, die durch das Verschwinden einer Invariante vom Gewichte i ausgedrückt ist, liegen auf einer Fläche* $2i^{ter}$ $\left.\begin{matrix}\text{Classe}\\ \text{Ordnung}\end{matrix}\right\}$.

Speciell: Die $\left.\begin{matrix}\text{Ebenen}\\ \text{Punkte}\end{matrix}\right\}$ deren Complex $\left.\begin{matrix}\text{-curve}\\ \text{-kegel}\end{matrix}\right\}$ bezüglich eines Complexes n^{ten} Grades eine Eigenschaft hat, welche durch das Verschwinden einer Invariante k^{ten} Grades ausgedrückt ist, liegen auf einer Fläche der $\left.\begin{matrix}\text{Ordnung}\\ \text{Classe}\end{matrix}\right\}$ $2i = \frac{2nk}{3}$; ein Resultat, welches bei Clebsch (Mathem. Ann. Bd. V) erst durch Ausscheidung eines Factors $(x\xi)^{\frac{kn}{2}}$ gewonnen werden konnte.

Beispiele: *a.* Die Discriminante einer ebenen Curve ist vom Grade $3(n-1)^2$, daher ist Ordnung und Classe der Singularitätenfläche eines Complexes n^{ten} Grades $= 2n(n-1)^2$.

Für den Complex 2^{ten} Grades $[c\varkappa]^2 = 0$ ist ihre Gleichung

in Ebenencoordinaten $[\xi c^1 \gamma c^2 \xi]^2 = 0$,

in Punktcoordinaten $[x \gamma^1 c \gamma^2 x]^2 = 0$.

b. Für die Tactinvariante zweier ebenen Curven n^{ter} und m^{ter} Ordnung ist $i = n \cdot m(n + m - 2)$, daher ist Ordnung und Classe der Brennfläche der Schnittcongruenz zweier Complexe n^{ten} und m^{ten} Grades $= 2m \cdot n(n + m - 2)$. Ihre Gleichungen sind darstellbar, wenn diese Tactinvariante bekannt ist.

Ist $m = 1$, so hat man die Bedingung der Berührung einer Geraden mit einer Curve n^{ter} Ordnung zu nehmen, also die Liniencoordinatengleichung der Curve. Diese erhält man, indem man in der Discriminante der binären Form n^{ter} Ordnung für $(\alpha\beta)$ den Ausdruck $(\alpha\beta\xi)$ schreibt. Setzt man also in diese Discriminante für $[\alpha\beta]$ ein: $[x\gamma c\mathfrak{g}x]$, so erhält man die Gleichung der Brennfläche des Schnittes des linearen Complexes $\mathfrak{g}$ und eines Complexes n^{ten} Grades.

Beispiel: Ist hier $n = 2$, so hat man als Gleichung der Kummer'schen Brennfläche

$$[x\gamma c\mathfrak{g}x]^2 = 0.$$

Für $n = 3$ hat man als Gleichung der Brennfläche:

$$[x\gamma c\mathfrak{g}x]^2 \cdot [x\gamma^1 c^1 \mathfrak{g}x]^2 \cdot [x\gamma c^1 \mathfrak{g}x] \cdot [x\gamma^1 c\mathfrak{g}x] = 0.$$

Ist $\mathfrak{g}$ ein singulärer Complex, so erhält man die Gleichung der Complexfläche für den gegebenen Complex n^{ten} Grades.

c. Für die Invariante, deren Verschwinden aussagt, dass sich 3 Curven der Ordnung m, n, r in einem Punkte schneiden, ist $i = m \cdot n \cdot r$; daher ist Ordnung und Classe der von den gemeinsamen Strahlen der Complexe der Ordnungen m, n, r gebildeten Regelfläche $= 2m \cdot n \cdot r$.

Ist $r = 1$, so hat man in die Resultante zweier binären Formen m^{ter} und n^{ter} Ordnung für $(\alpha\beta)$ zu setzen $[x\gamma c\mathfrak{g}x]$, um zur Gleichung der Regelfläche zu gelangen.

Für $m = 2$, $n = r = 1$ hat man so für die beiden Complexe: $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1$:

$$[x\gamma\mathfrak{g}\mathfrak{g}^1 x]^2 = 0.$$

Für $m = n = 2$, $r = 1$ folgt

$$[x\gamma c\mathfrak{g}x]^2 [x\gamma^1 c^1 \mathfrak{g}x]^2 - ([x\gamma c^1 \mathfrak{g}x]^2)^2 = 0,$$

u. s. w.

d. Es drängt sich hier eine Frage auf: Welche ternäre Invarianten haben die Eigenschaft, dass die nach Obigem in ihnen ausgeführten Substitutionen: $[x\gamma^1 c^2 \gamma^3 x]$ und $[\xi c^1 \gamma^2 c^3 \xi]$ dieselbe Fläche liefern?

Bekanntlich ist dies der Fall für die Discriminante einer ebenen Curve, da die Singularitätenfläche eines Complexes gleichzeitig Ort der singulären Punkte und Ebenen ist; für die Tactinvariante zweier Curven, da der Ort der Brennpunkte und Brennebenen der Strahlen einer Congruenz identisch ist; für die Bedingung, dass sich 3 Curven in einem Punkte schneiden, entsprechend der drei Complexen gemeinsamen Regelfläche.

e. Aber auch in Covarianten und anderen invarianten ternären Bildungen kann man die letzten Substitutionen ausführen (vergl. Gundelfinger, Math. Ann. Bd. 6); man erhält dann z. B. aus einer Covariante eine räumliche Zwischenform, welche jeder Ebene eine Fläche zuweist, die aus ihr die Covariante der Complexcurve ausschneidet. Gewisse invariante Eigenschaften der Complexcurven können durch das identische Verschwinden einer Covariante dargestellt sein; ist die Eigenschaft drei Bedingungen äquivalent, so gelangt man durch Uebertragung zu einem Flächensystem, dessen Flächen die Ebenen der verlangten Eigenschaft berühren.

Beispiel: Soll eine Curve 2^{ter} Classe $(a\xi)^2 = 0$ in einen doppeltzählenden Punkt ausarten, so muss $(abx)^2$ identisch verschwinden. Man erhält durch Substitution: $[\xi cyx]^2 = 0$ als diejenige Beziehung, welche covariant jeder Ebene eine Fläche zuweist, die aus ihr den Complexkegelschnitt ausschneidet. Setzt man $x_i = p_i \cdot p\xi$, so erhält man die Liniencoordinatengleichung desselben. Soll für ein bestimmtes ξ diese Gleichung für jedes p_{ik} verschwinden, so erhält man: die Doppelebenen des Complexes (Doppeltangentialebenen der Singularitätenfläche) werden von allen Complexflächen berührt.

Prag, im November 1889.

Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Von

W. Hess in Bamberg.

Bis in die neueste Zeit waren nur zwei Fälle bekannt, in denen das Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt gelöst werden konnte: der feste Punkt musste entweder mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfallen oder aber auf einer Hauptaxe durch den letzteren gelegen sein, während die Trägheitsmomente des Körpers um die beiden andern Hauptaxen einander gleich zu nehmen waren. Sophie Kowalevski hat diesen beiden Drehbewegungen jüngst eine neue hinzugefügt*), indem sie nachwies, dass, falls der Schwerpunkt in einer Hauptebene durch den Unterstützungspunkt gelegen ist, während gleichzeitig die Trägheitsmomente um die Hauptaxen dieser Ebene je gleich dem doppelten dritten Hauptträgheitsmomente sind, die Elemente der Bewegung festgelegt werden können durch hyperelliptische Functionen.

In einer im vergangenen Jahre erschienenen Programmschrift**) habe ich sodann auf eine vierte mögliche Lösung des Rotationsproblems hingewiesen:

Liegt nämlich der Schwerpunkt des starren Körpers in einer Hauptebene durch den festen Punkt, während das Trägheitsmoment um die Verbindungslinie der beiden Punkte (um die Figuraxe) die vierte geometrische Proportionale bildet zwischen den Trägheitsmomenten um die Hauptaxen der ausgezeichneten Ebene einerseits und dem dritten Hauptträgheitsmomente andererseits, so reducirt die Annahme, dass die Axe des momentan anregenden Kräftepaars senkrecht stehe zur Figuraxe,

*) Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Math. 12, p. 177—232. 1889.

**) Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und deren singuläre Lösungen. Progr. d. Lyceums Bamberg 1889. 8°. 60 S.

die Euler'schen Differentialgleichungen der Bewegung auf eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades zwischen zwei Variabeln. Dieselbe ist sofort lösbar, wenn die Kräftepaaraxe zugleich horizontal angenommen wird, und führt dann auf elliptische Functionen.

In der citirten Abhandlung wurde dieser Lösung neben der Bewegung des Gyroscops und einigen untergeordneten Fällen gleichförmiger Drehbewegung der Charakter einer singulären Lösung,*) der Euler'schen Bewegungsgleichungen zugesprochen. Gleichzeitig sollte sich hierdurch der Inhalt einer früheren Note**) als hinfällig erweisen, in welcher behauptet war, dass die Annahme einer constanten Intensität des wirkenden Paares ebenfalls auf eine Lösung solchen Charakters hinführe.

Eine Weiterführung des Problems, wie ich sie in der Zwischenzeit anbahnte, hat nun folgende Eigenthümlichkeit dargethan:

Sowohl die Annahme, es möge die Grösse des momentan angreifenden Kräftepaars, als auch jene, es möge die Projection dieses Paares längs der Figuraxe constant bleiben während des ganzen Verlaufes der Bewegung, führt auf eine wirklich singuläre Lösung allgemeinster Beschaffenheit eines reducirten Systems der Euler'schen Bewegungsgleichungen, nicht aber auf eine singuläre Lösung der ursprünglichen Euler'schen Gleichungen (deren Form singuläre Lösungen überhaupt ausschliesst). Die beiden Annahmen sind in dieser Allgemeinheit zugleich die einzigen singulären Lösungen. Nur bei speciellen Bedingungen für die Constanten des Problems erscheinen hieraus auch Lösungen der Euler'schen Originalgleichungen; die Lösungen, denen also insbesondere der oben angeführte neue Fall zuzuzählen ist, sind dann particulärer Natur.

Die Thatsache, dass für eine reducirte Form der Euler'schen Gleichungen Integralgleichungen existiren, welche nicht zugleich auch Integralgleichungen der früheren Form darstellen — obgleich beide Formen durchaus äquivalent sind — befindet sich in Uebereinstimmung mit einem allgemeinen Satze und beweist gerade die Singularität der gedachten Integralgleichungen. Da die concreten Beispiele, an denen sie zu Tage tritt, somit auch vom Standpunkte der Theorie der singulären Lösungen aus einiger Beachtung werth sein dürften, möge die Untersuchung in der nachfolgenden Gestalt zur Veröffentlichung gelangen.

---

*) Zur genaueren Ausdrucksweise sei hervorgehoben, dass es sich hier selbstverständlich nicht um den Nachweis der Existenz singulärer Lösungen im Lagrange'schen Sinne (aus der Integralgleichung) handeln kann, sondern dass wir an die Darboux'sche Definition denken, wonach jede Lösung einer Differentialgleichung $\varphi(x, y, y') = 0$ als singulär bezeichnet wird, wenn sie zugleich auch der Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0$ genügt.

**) Ueber das Problem der Rotation. Math. Ann. Bd. XX, p. 461—470.

Verschiedene Formen der Euler'schen Bewegungsgleichungen.

1.

Wir nehmen zunächst die Euler'schen Bewegungsgleichungen in der bekannten Form

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{dAp}{dt} = (B-C)qr + P(\beta c'' - \gamma b''), \\ \frac{dBq}{dt} = (C-A)rp + P(\gamma a'' - \alpha c''), \\ \frac{dCr}{dt} = (A-B)pq + P(\alpha b'' - \beta a''). \end{cases}$$

Darin bedeuten P das Maximalmoment der Schwerkräfte; α, β, γ und a'', b'', c'' die Neigungscosinus der 3 Hauptträgheitsaxen X', Y', Z' durch den festen Punkt O gegen die Figuraxe OS und die Verticale OZ; A, B, C die 3 Hauptträgheitsmomente des Körpers bezüglich des Punktes O und endlich Ap, Bq, Cr bezw. p, q, r die Componenten des Momentkräftepaars bezw. der instantanen Drehung um die Hauptträgheitsaxen.

Die 9 kinematischen Relationen zwischen den letzteren und den Richtungen eines festen Coordinatensystems $OXYZ$ sind dargestellt durch 9 Gleichungen von der Form

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{da''}{dt} = b''r - c''q, \\ \frac{db''}{dt} = c''p - a''r, \\ \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p, \end{cases}$$

es sind jedoch zur Fixirung des Rotationsproblems nur 3 dieser Gleichungen, etwa die Gleichungen (2) selbst, völlig ausreichend. Denn es bedarf nach ihrer Integration der Ausführung blos einer einzigen Quadratur und der Vornahme rein algebraischer Umformungen, um alle Elemente der Bewegung in Functionen der Zeit zu kennen. Das hierauf abzielende Verfahren von Weierstrass*) ist das folgende:

Es ist identisch

$$d\log(c \pm ic') = \frac{dc \pm idc'}{c \pm ic'} = \frac{(cdc + c'dc') \pm i(cdc' - c'dc)}{c^2 + c'^2}.$$

Aus den erweiterten Formeln (2) fliesst aber

$$\frac{dc}{dt} = aq - bp,$$

$$\frac{dc'}{dt} = a'q - b'p,$$

*) Hoffmann-Natani, mathem. Wörterbuch, sub „Rotation".

$$c\frac{dc'}{dt} - c'\frac{dc}{dt} = (ca' - a'c)q - (cb' - c'b)p,$$

während die (zweimal) 6 Gleichungen der orthogonalen Transformation

$$\Sigma a^2 = 1, \qquad \Sigma bc = 0$$

zu den bekannten Relationen Veranlassung geben

$$a'' = bc' - b'c,$$
$$b'' = ca' - a'c \text{ u. s. f.}$$

Es wird also durch Substitution

$$d\log(c \pm ic') = \frac{-c''dc'' \pm idt(a''p + b''q)}{1 - c''^2}$$

d. h. es können, sobald die Grössen p, q, r und a'', b'', c'' aus den beiden Gleichungssystemen (1), (2) durch die Zeit t ausgedrückt vorliegen, c und c' durch Integration gefunden werden.

Mit den letzteren Cosinus sind aber auch zugleich die 4 anderen a, a', b, b' gegeben; denn es gelten identisch die Beziehungen

$$(a \pm ia')(c \mp ic') = (ac + a'c') \pm i(a'c - ac') = -a''c'' \pm ib'',$$
$$(b \pm ib')(c \mp ic') = (bc + b'c') \pm i(b'c - bc') = -b''c'' \mp ia''.$$

Die Zusammengehörigkeit der Gleichungen (1) und (2) möge als die *Originalform* der Euler'schen Bewegungsgleichungen bezeichnet werden.

2.

Die 3 Differentialgleichungen (2) lassen sich sofort durch ein Tripel von Integralgleichungen ersetzen. Man multiplicire respective die Gleichungen (2) mit a'', b'', c''; die Gleichungen (1) mit a'', b'', c'' und (2) mit Ap, Bq, Cr; die Gleichungen (1) endlich mit p, q, r und (2) mit $-P\alpha, -P\beta, -P\gamma$, addire jedesmal und integrire, so kommt

$$(3) \quad \begin{cases} a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \\ a''Ap + b''Bq + c''Cr = \lambda, \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = \dfrac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - h}{2P} = \mu. \end{cases}$$

μ bedeutet hierin den Neigungscosinus zwischen den Axen OS der Figur und OZ der Schwerkräfte, λ das constant bleibende Moment des anregenden Kräftepaars bezüglich der letzteren Axe und h die Constante der lebendigen Kraft.

Löst man die Gleichungen (3) nach a'', b'', c'' auf und substituirt die erhaltenen Werthe in die Gleichungen (1), so gehen die letzteren über in ein System dreier Differentialgleichungen mit t als unabhängiger und p, q, r als abhängigen Veränderlichen — die *zweite Form* der Euler'schen Bewegungsgleichungen.

Zur Aufstellung von a'', b'', c'' erscheint es nun sehr zweckmässig, sich der folgenden Combinationen zu bedienen

$$(4)\qquad \begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \mu_1 \ (= 2P\mu + h), \\ p^2 + q^2 + r^2 = \tau, \\ Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = \varrho, \\ p\alpha + q\beta + r\gamma = \sigma, \end{cases}$$

von welchen darstellen: ν das Quadrat der Grösse des Momentkräftepaars, τ desjenigen der instantanen Drehgeschwindigkeit, μ_1 die lebendige Kraft der Rotation und ϱ, σ die Componenten des Kräftepaars und der Drehung bezüglich der Figuraxe.

Die Determinante der Coefficienten in den Gleichungen (3) ist

$$\mathsf{N} = \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

und deren Quadrat

$$\mathsf{N}^2 = N = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho \\ \mu & \varrho & 1 \end{vmatrix}.$$

Nach einem von Combescure angegebenen Verfahren*) ergeben sich dann a'', b'', c'' aus dem Gleichungssystem

$$(5)\qquad \begin{cases} a''N_1 - ApN_\lambda + \alpha N_\mu = \sqrt{N} \,.\, \mathsf{N}_{a''}, \\ b''N_1 - BqN_\lambda + \beta N_\mu = \sqrt{N} \,.\, \mathsf{N}_{b''}, \\ c''N_1 - CrN_\lambda + \gamma N_\mu = \sqrt{N} \,.\, \mathsf{N}_{c''}, \end{cases}$$

worin die Indices die zu den obigen Determinanten gehörigen Unterdeterminanten anzeigen,

$$(5a)\qquad \begin{cases} N_1 = \nu - \varrho^2, \\ N_\lambda = \lambda - \mu\varrho, \\ N_\mu = \lambda\varrho - \mu\nu, \end{cases}$$

und das Zeichen der Quadratwurzel in diese selbst eingeschlossen sein mag. Durch Substitution der Werthe von a'', b'', c'' in die Euler'schen Gleichungen (1) gewinnen diese die folgende Form

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{dAp}{dt} = (B-C)qr + \frac{P}{N_1}\{(Ap - \alpha\varrho)\sqrt{N} - N_\lambda \mathsf{N}_{a''}\}, \\ \frac{dBq}{dt} = (C-A)rp + \frac{P}{N_1}\{(Bq - \beta\varrho)\sqrt{N} - N_\lambda \mathsf{N}_{b''}\}, \\ \frac{dCr}{dt} = (A-B)pq + \frac{P}{N_1}\{(Cr - \gamma\varrho)\sqrt{N} - N_\lambda \mathsf{N}_{c''}\}, \end{cases}$$

*) Sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles. J. f. d. reine u. angew. Math. 80, p. 33—51.

in welcher sie ausser t nur noch die Grössen p, q, r oder doch blosse Functionen dieser Grössen enthalten.

3.

Multipliciren wir die Gleichungen (1) der Reihe nach mit Ap, Bq, Cr; α, β, γ; p, q, r und addiren jedesmal, so ergeben sich unter Berücksichtigung der Einführungen (4) die 3 Gleichungen

$$\frac{1}{2P}\cdot\frac{d\nu}{dt} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = \mathsf{N},$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix} = \mathsf{P}, \tag{7}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ a'' & b'' & c'' \\ p & q & r \end{vmatrix} = \mathsf{M}.$$

Von denselben ist die zweite bereits von a'', b'', c'' frei, die erste wird es durch Quadriren, die dritte durch Substitution der Werthe von a'', b'', c'' aus dem Systeme (5) — so dass an Stelle der drei früheren abhängigen Variabeln p, q, r nunmehr drei neue treten, ν, ϱ, μ: das Quadrat ν der Grösse des anregenden Momentankräftepaars, die Projection ϱ eben dieses Paares auf die Figuraxe und der Neigungscosinus μ zwischen den Axen der Figur und Verticalen (oder, was damit äquivalent ist, μ_1, die lebendige Kraft der Rotation).

Es wird so als *dritte Form* der dynamischen Differentialgleichungen erhalten:

$$\left(\frac{1}{2P}\cdot\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho \\ \mu & \varrho & 1 \end{vmatrix} = N,$$

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & \varrho & \sigma \\ \varrho & \nu & \mu_1 \\ \sigma & \mu_1 & \tau \end{vmatrix} = R, \tag{8}$$

$$(\nu - \varrho^2)\frac{d\mu}{dt} = (\mu_1 - \varrho\sigma)\frac{d\nu}{2P\,dt} + (\lambda - \mu\varrho)\frac{d\varrho}{dt}.$$

Freilich treten in den rechten Seiten dieser Gleichungen ausser den Variabeln ν, ϱ, μ und der Constanten λ auch die Combinationen σ und τ auf. Dieselben zeigen sich aber, da die fünf Gleichungen (4) die drei Grössen p, q, r zu eliminiren gestatten, durch ν, ϱ, μ darstellbar (zunächst wenigstens implicite). Von diesen Darstellungen

werden wir später eine benutzen müssen, wesshalb wir dieselbe an dieser Stelle folgen lassen: wir bestimmen aus den zwei letzten Gleichungen (4) die Grössen p, q in Functionen der Werthe ϱ, σ und r, bilden p^2 und q^2, und eliminiren aus den quadratischen Ausdrücken die erste Potenz von r, so erhalten wir eine einzige Gleichung, welche die drei Winkelgeschwindigkeiten im Quadrat enthält und, zu den drei ersten Relationen (4) geschlagen, p^2, q^2,r^2 zu eliminiren gestattet.

Durch Einführung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Sigma A &= D, \\ \Sigma AB &= E, \\ ABC &= F, \\ \Sigma A\alpha^2 &= G, \\ \Sigma AB\gamma^2 &= H \end{aligned} \tag{9}$$

schreibt sich die Eliminationsgleichung:

$$\begin{aligned} (10)\quad (\tau-\sigma^2)(H\varrho-F\sigma) - (\mu_1-\varrho\sigma)([D-G]\varrho - [E-H]\sigma) \\ + (\nu-\varrho^2)(\varrho - G\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Dieselbe, nicht minder auch die ihr assimilirte zweite Eliminationsgleichung, vereinfacht sich bedeutend, sobald irgend welche Grössen der zwei Tripel

$$\begin{matrix} A-B, & B-C, & C-A; \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{matrix}$$

gleich Null angenommen werden. In diesen Fällen vereinfacht sich natürlich auch das Gleichungssystem (8). Wir verweisen bezüglich dieser Vereinfachungen jedoch auf unsere eingangs erwähnte Abhandlung.

4.

Die sämmtlichen 6 in dem System (8) erscheinenden Grössen ν, ϱ, μ, λ, σ, τ der Relationen (3), (4) können auf einer der folgenden 4 Axen gedeutet werden:

auf der Axe ON des Momentenkräftepaars;
„ „ „ OT der instantanen Drehung;
„ „ „ OZ der Schwere, und
„ „ „ OS der Figur.

Trägt man auf den beiden ersten Axen vom Unterstützungspunkte O aus auf je die Intensitäten $\sqrt{\nu}$ des Kräftepaars und $\sqrt{\tau}$ der Drehgeschwindigkeit, so können die Gleichungen (7) leicht in folgende Form übergeführt werden:

$$\frac{1}{2P}\cdot\frac{d\nu}{dt}=\sqrt{\nu}\cdot\begin{vmatrix}1 & \cos SZ & \cos SN\\ \cos SZ & 1 & \cos ZN\\ \cos SN & \cos ZN & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\text{6fache Pyramide } OZNS,$$

$$\frac{d\varrho}{dt}=\sqrt{\nu\tau}\cdot\begin{vmatrix}1 & \cos SN & \cos ST\\ \cos SN & 1 & \cos NT\\ \cos ST & \cos NT & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\text{6fache Pyramide } ONST,$$

$$\frac{d\mu}{dt}=\sqrt{\tau}\cdot\begin{vmatrix}1 & \cos SZ & \cos ST\\ \cos SZ & 1 & \cos ZT\\ \cos ST & \cos ZT & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\text{6fache Pyramide } OSTZ.$$

Durch Entwickelung der Determinanten fliesst endlich als *vierte Form* der Euler'schen Bewegungsgleichungen das Gleichungstripel:

$$\frac{1}{2P}\cdot\frac{d\nu}{dt}=\sqrt{\nu}\cdot\left\{\begin{matrix}\sin ZN\,.\,\sin NS\,.\,\sin\widehat{ZNS}\\ \sin NS\,.\,\sin SZ\,.\,\sin\widehat{NSZ}\\ \sin SZ\,.\,\sin ZN\,.\,\sin\widehat{SZN}\end{matrix}\right\},$$

$$\frac{d\varrho}{dt}=\sqrt{\nu\tau}\cdot\left\{\begin{matrix}\sin NS\,.\,\sin ST\,.\,\sin\widehat{NST}\\ \sin ST\,.\,\sin TN\,.\,\sin\widehat{STN}\\ \sin TN\,.\,\sin NS\,.\,\sin\widehat{TNS}\end{matrix}\right\},\qquad(11)$$

$$\frac{d\mu}{dt}=\sqrt{\tau}\cdot\left\{\begin{matrix}\sin ST\,.\,\sin TZ\,.\,\sin\widehat{STZ}\\ \sin TZ\,.\,\sin ZS\,.\,\sin\widehat{TZS}\\ \sin ZS\,.\,\sin ST\,.\,\sin\widehat{ZST}\end{matrix}\right\},$$

wobei jedesmal eines der drei gleichwerthigen Producte zu nehmen ist.

Die Gleichungen dieses Paragraphen sagen aber offenbar Folgendes aus:

Trägt man vom festen Punkte O des rotirenden Körpers aus auf den vier Axen des Kräftepaars N, der Drehung T, der Schwere Z und der Figur S beziehungsweise auf: die Grösse $\sqrt{\nu}$ des Paares, $\sqrt{\tau}$ der Drehgeschwindigkeit und je die Längeneinheit, so wird dem Wachsthum der drei neuen abhängigen Variabeln (8) *ν, ϱ, μ je ein bestimmter Bezirk zugewiesen:*

dem Quadrate ν der Grösse des Momentankräftepaars die Pyramide $OZNS$;

der Grösse ϱ des um die Figuraxe thätigen Antheils dieses Paares die Pyramide $ONST$;

der Grösse $\mu_1\,(=2P\mu+h)$ der lebendigen Kraft der Rotation die Pyramide $OSTZ$.

Und zwar sind die Zunahmen der drei vorstehenden Grössen bis auf Constante dem Kubikinhalte der jeweiligen Pyramiden effectiv gleich.

Die drei Gleichungen (11) sagen ferner:

Soll von den drei Grössen 1) $\sqrt{\nu}$ *des Momentankräftepaars*, 2) ϱ *der Projection desselben auf die Figuraxe*, 3) μ *des Winkelcosinus zwischen diesen Axen und der Verticalen (oder auch* μ_1 *der lebendigen Kraft) eine ein Maximum oder Minimum werden, so muss in jenem Augenblicke entweder das Axentripel* 1) *der Verticalen, des Kräftepaars, der Figur;* 2) *des Kräftepaars, der Figur, der Drehung;* 3) *der Figur, der Drehung, der Verticalen in je eine Ebene fallen — oder es müssen je zwei Axen eines Tripels zusammenliegen.*

Singuläre Lösungen.

5.

Indem wir nunmehr die drei Gleichungen (8), die wir die *reducirte Form* der Euler'schen Bewegungsgleichungen nennen wollen, nach der Möglichkeit singulärer Lösungen befragen, folgen wir einer Abhandlung von Herrn A. Mayer*), welche sich zum Ziele gesetzt hat, die Criterien für die Singularität der Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aufzustellen. Wir schreiben zu diesem Zwecke die Gleichungen (8) wie folgt:

$$(12)\qquad \begin{cases} F_1 \equiv \nu'^2 - 4P^2N = 0, \\ F_2 \equiv \varrho'^2 - R = 0, \\ F_3 \equiv (\nu - \varrho^2)\mu' - \frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P}\nu' - (\lambda - \mu\varrho)\varrho' = 0. \end{cases}$$

Die erste Bedingung für das Auftreten singulärer Lösungen ist die, dass die Gleichungen (12) die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = \frac{d\nu'}{dt} = \nu'',$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{d\varrho'}{dt} = \varrho'',$$

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} = \frac{d\mu'}{dt} = \mu''$$

nicht mehr vollständig bestimmen dürfen, sobald man die den singulären Lösungen entlehnten Werthe von $\nu, \varrho, \mu, \nu', \varrho', \mu'$ in das System (12) substituirt hat. Diese Bedingung gipfelt in dem Nullwerden der Determinante (M. 371)

*) Ueber die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst. Math. Ann. Bd. XXII, p. 368—392. (Im Texte einfach mit M. bezeichnet).

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \nu'} & \frac{\partial F_1}{\partial \varrho'} & \frac{\partial F_1}{\partial \mu'} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \nu'} & \frac{\partial F_2}{\partial \varrho'} & \frac{\partial F_2}{\partial \mu'} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \nu'} & \frac{\partial F_3}{\partial \varrho'} & \frac{\partial F_3}{\partial \mu'} \end{vmatrix},$$

hier also von

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\nu' & 0 & 0 \\ 0 & 2\varrho' & 0 \\ -\frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P} & -(\lambda - \mu\varrho) & (\nu - \varrho^2) \end{vmatrix} = 4\nu'\varrho'(\nu - \varrho^2).$$

Wie man erkennt, verschwindet Δ 1) für $\nu' = 0$, 2) für $\varrho' = 0$, 3) für $\nu - \varrho^2 = 0$, 4) für den Eintritt zweier oder aller drei der vorstehenden Bedingungen.

Nun zieht der vierte Fall offenbar nach sich $\nu = \nu_0$, $\varrho = \varrho_0$, zufolge der ersten Gleichung (8), sodann auch $\mu = \mu_0$ und weiterhin auf Grund der Gleichungen (4) und (3) im Allgemeinen auch p, q, r, sowie a'', b'', c'' alle als constant. Analog führt die Verfolgung der Annahme $\nu - \varrho^2 = 0$, wie schon aus rein geometrischen Gründen, nicht minder aber auch aus der Bedeutung von ν und ϱ im Formelsystem (4) erkannt werden kann, auf invariable Werthe sowohl von ν als von ϱ.

Sehen wir von diesen zwei besonderen Fällen hier gänzlich ab, so verbleiben nur die allgemeinen Möglichkeiten

$$1)\ \nu' = 0, \qquad 2)\ \varrho' = 0,$$

denen wir in der That unser ganzes Interesse zuwenden wollen.

Es war oben die Existenz der Bedingung $\Delta = 0$ als erste Voraussetzung für den Eintritt singulärer Lösungen angegeben worden. Damit die Gleichung $\Delta = 0$ aber zusammen mit den Gleichungen (12) ein integrirendes Werthsystem wirklich liefere, darf sie nicht eine blosse algebraische Folge letzterer Gleichungen sein, was in der That für unsere (sämmtlichen) Fälle ausgeschlossen ist.

Es dürfen ferner die Gleichungen (12) die zweiten Derivirten ν'', ϱ'', μ'' weder völlig bestimmen, noch auch unendlich werden lassen. Desshalb müssen auch jene Determinanten verschwinden, welche für diese Grössen als Zähler erhalten werden. Dieselben können vermöge der Gleichungen (12) oder auch (12) im Vereine mit $\Delta = 0$ entweder an sich schon Null sein oder aber höchstens zu einer einzigen, von $\Delta = 0$ unabhängigen Relation Veranlassung geben (M. 371—374). Eine kurze Rechnung zeigt, dass diese Zählerdeterminanten hier als blosse Folge der Gleichungen $\Delta = 0$ und (12) verschwinden.

In wie weit nun freilich die Annahmen $\nu' = 0$, $N = 0$ und $\varrho' = 0$, $R = 0$ wirklich Integralgleichungen des Systems (8) bedeuten, möge in den folgenden Abschnitten klar gelegt werden.

Der Fall $\nu' = 0$, $N = 0$.

6.

Wird für die ganze Zeitdauer der Bewegung

$$\nu' = 0, \quad \nu = \nu_0 = \text{constans}$$

angenommen, so reduciren sich die drei Differentialgleichungen (8) auf die folgenden Gleichungen:

$$N = 0 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu_0 & \varrho \\ \mu & \varrho & 1 \end{vmatrix},$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{R} = \begin{vmatrix} 1 & \varrho & \sigma \\ \varrho & \nu_0 & \mu_1 \\ \sigma & \mu_1 & \tau \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

$$(\nu_0 - \varrho^2)\, d\mu = (\lambda - \mu\varrho)\, d\varrho.$$

Von denselben ist die letzte eine lineare Differentialgleichung und liefert als solche integrirt

$$\mu\nu_0 - \lambda\varrho = D\sqrt{\nu_0 - \varrho^2},$$

und durch besondere Wahl der willkürlichen Constanten

$$D = \sqrt{\nu_0 - \lambda^2}$$

und Quadrirung:

$$(\mu\nu_0 - \lambda\varrho)^2 - (\nu_0 - \varrho^2)(\nu_0 - \lambda^2) = 0,$$

welche Gleichung gleichbedeutend ist mit

$$N = 0 = (\nu_0 - \varrho^2)(1 - \mu^2) - (\lambda - \mu\varrho)^2. \tag{14}$$

Damit ist in der That erwiesen, dass $N = 0$ eine Integralgleichung des System (13) ist.

Ein zweiter Beweis kann auf Grund folgenden allgemeinen Satzes geliefert werden (M. 380): soll die Gleichung

$$N = (\nu - \varrho^2)(1 - \mu^2) - (\lambda - \mu\varrho)^2$$

eine Integralgleichung des mit (8) identischen Systems sein

$$\frac{d\nu}{dt} = 2P\sqrt{N},$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{R},$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\nu - \varrho^2}\left[(\mu_1 - \varrho\sigma)\sqrt{N} + (\lambda - \mu\varrho)\sqrt{R}\right],$$

so ist nothwendig und hinreichend, dass die abgeleitete Gleichung

$$N' \equiv \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial \nu} \cdot \frac{d\nu}{dt} + \frac{\partial N}{\partial \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dt} + \frac{\partial N}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{dt}$$

entweder identisch gleich Null sei oder aber als blosse algebraische Folge von N mit N zugleich verschwinde. Nun ist

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} = 1 - \mu^2,$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varrho} = 2(\lambda\mu - \varrho); \quad \frac{\partial N}{\partial \mu} = 2(\lambda\varrho - \mu\nu),$$

$$N = 0 \quad ; \quad \nu = \nu_0,$$

also wird

$$N' = 2(\lambda\mu - \varrho)\sqrt{R} + \frac{2(\lambda\varrho - \mu\nu)}{\nu - \varrho^2}(\lambda - \mu\varrho)\sqrt{R}$$

$$= \frac{2\sqrt{R}}{\nu - \varrho^2}[(\lambda\mu - \varrho)(\nu - \varrho^2) + (\lambda\varrho - \mu\nu)(\lambda - \mu\varrho)]$$

$$= \frac{2\sqrt{R}}{\nu - \varrho^2} \cdot - \varrho N,$$

wodurch in der That N' zugleich mit N verschwindet.

Es steht somit fest, dass die gleich Null gesetzte Determinante N des Gleichungssystems (8) eine Integralgleichung eben dieses Systems darstellt.

Nun ist aber die Derminante N das Quadrat der Determinante N der Gleichungen (7),

$$N \equiv \mathsf{N}^2;$$

wenn also N während der ganzen Dauer der Bewegung für die Gleichungen (8) gleich Null sein soll, muss es auch N für die Gleichungen (7) oder $\sqrt{N}$ für die mit (7) äquivalenten Gleichungen (6) sein. Letzteres System ist aber durch die Integralgleichungen (3) hindurch den sechs ursprünglichen Euler'schen Gleichungen (1), (2) äquivalent. Es wird sich also fragen: erstens, ob überhaupt diese Aequivalenz auch jetzt noch statt habe, und, wenn ja, ob zweitens die Annahme

$$\mathsf{N} = \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

auch eine integrirende Lösung der Gleichungen (1), (2) bedeute.

Was die erstere Frage anlangt, so tritt zu den drei Relationen (3) für die Bestimmung von a'', b'', c'' nun noch als vierte Relation $\mathsf{N} = 0$ hinzu, so dass im Ganzen vier Gleichungen für a'', b'', c'' existiren:

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

$$a''Ap + b''Bq + c''Cr = \lambda,$$

$$a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = \mu,$$
$$\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

worin die Determinante nichts anderes ist als die Discriminante der drei ersteren Gleichungen.

Die Gleichungen (5), welche allgemein die Werthe von a'', b'', c'' liefern, gehen aber für $\mathsf{N} = \sqrt{N} = 0$ über in

$$a''N_1 - ApN_\lambda + \alpha N_\mu = 0,$$
$$b''N_1 - BqN_\lambda + \beta N_\mu = 0,$$
$$c''N_1 - CrN_\lambda + \gamma N_\mu = 0,$$

und man erkennt aus den Bedeutungen (5a) der N sehr leicht, dass in der That diese Ausdrücke die vier vorhergehenden Relationen sämmtlich erfüllen, dass also die Gleichungen (6), wenngleich sie sich merklich vereinfacht haben, doch noch den Gleichungen (1), (2) äquivalent sind.

Sollte freilich für die letztgenannten Gleichungen die Voraussetzung $\mathsf{N} = 0$ eine integrirende Lösung bilden, so müsste wieder

$$\mathsf{N}' = \frac{d\mathsf{N}}{dt} = \Sigma \frac{da''}{dt} \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - \Sigma \frac{dAp}{dt} \cdot \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

entweder an sich Null sein oder als blosse algebraische Folge von N zugleich mit N verschwinden.

Setzt man aber in den Ausdruck für N' die Werthe der Differentialquotienten aus den sechs Gleichungen (2) und (1) ein, so erhält man

$$\mathsf{N}' = \Sigma \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - \Sigma \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + P \cdot \Sigma \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2.$$

Durch Ausführung der Multiplication der Determinanten und Beachtung der Beziehungen (3), (4), (5), (5a) folgt hieraus nach kurzer Rechnung

$$\mathsf{N}' = \frac{1}{\nu_0 - \varrho^2} \left[(\mu_1 - \varrho\sigma)(\lambda\varrho - \mu\nu_0) + P(\nu_0 - \varrho^2)(1 - \mu^2) \right].$$

Soll also N' gleich Null werden, so ist dies nur möglich, wenn die Beziehung stattfindet

$$(16) \qquad (\mu_1 - \varrho\sigma)(\lambda\varrho - \mu\nu_0) + P(\nu_0 - \varrho^2)(1 - \mu^2) = 0.$$

Nun hat aber das Verschwinden von N bezw. N auf die Gleichung (14) geführt:

$$(\nu_0 - \varrho^2)(1 - \mu^2) - (\lambda\mu - \varrho)^2 = 0.$$

Es bieten sich desshalb nur zwei Möglichkeiten dar bezüglich der Variabeln ϱ und $\mu \left(= \frac{\mu_1 - h}{2P}\right)$: entweder es lassen sich die beiden

Gleichungen zu einer einzigen Combination verschmelzen, in welcher weder ϱ noch μ vorkommt, so dass die bislang willkürliche Constante ν_0 einer Bestimmungsgleichung unterliegt — oder es werden ϱ und μ beide constant.

Die Untersuchung zeigt das Letztere: man hat nur nöthig, das sogen. Princip der speciellen Lage herbeizuziehen, indem man etwa einen Körper annimmt, dessen Schwerpunkt auf einer Hauptträgheitsaxe liegt ($\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$), während die Axe des anregenden Momentankräftepaars eine horizontale Lage hat ($\lambda = 0$). Dann nimmt wegen (4) $\sigma = \varrho : C$ das obige Gleichungspaar (16), (14) die folgende Gestalt an:

$$\left(2P\mu - \frac{\varrho^2}{C} + h\right)\mu\nu_0 - P(\nu_0 - \varrho^2)(1-\mu^2) = 0,$$
$$\nu_0(1-\mu^2) - \varrho^2 = 0.$$

Der Werth von ϱ^2 aus der zweiten in die erste Gleichung eingesetzt lässt für μ eine biquadratische Gleichung erscheinen, deren Coefficienten unmöglich alle verschwinden können, wenn nicht die Idee des rotirenden Körpers ganz hinfällig werden soll. Es bleibt also nur übrig,

$$\mu = \mu_0 = \text{constans}$$

anzunehmen, was dann auch für einen Körper allgemeiner Gestalt und Lage $(\alpha, \beta \gtrless 0,\ \lambda \gtrless 0)$ in Richtigkeit bleiben muss. Hiermit ist aber auch $\varrho = \varrho_0 = \text{const.}$ erwiesen, und es läuft also die Annahme $N = 0$ zusammen mit der Voraussetzung

$$\nu = \nu_0, \quad \varrho = \varrho_0,$$

oder

$$\nu' = 0, \quad \varrho' = 0,$$

d. h. auf einen speciellen Fall von Drehbewegung, wie er nach der Abmachung des § 5 hier nicht weiter zur Sprache gebracht werden soll.

Sehen wir also von demselben ganz ab, so können wir constatiren, dass, trotzdem die Gleichung (14) $N = 0$ als eine Integralgleichung des „reducirten Systems" (8) feststeht, dennoch die Gleichung (15) $N = 0$ keine Integralgleichung der Systeme (1), (2) der Euler'schen Bewegungsgleichungen sei.

Diese Thatsache beweist aber gerade, dass die Gleichung $N = 0$ effectiv eine singuläre Lösung des reducirten Systems (8) der Euler'schen Gleichungen ist, indem sie eine concrete Illustration zu dem folgenden allgemeinen Satze*) liefert:

Hat man ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung (1), (2) mit Hilfe von r bekannten Integralgleichungen (3) — aus denen durch Differentiation und Substitution der Differential-

*) Die Kenntniss dieses Satzes verdankt der Verf. der Güte des Herrn Prof. A. Mayer.

gleichungen neue Integralgleichungen nicht hervorgehen — zurückgeführt auf ein System (6) von nur noch $(n-r)$ Differentialgleichungen 1. O., und besitzt dieses reducirte System (6) singuläre Lösungen, so gehören diese im Allgemeinen doch keinem Systeme Lösungen der gegebenen Differentialgleichungen (1), (2) an.

Nachdem so gezeigt ist, dass die allgemeine Annahme $\mathsf{N} = 0$ sich nicht als Lösung der Euler'schen Originalgleichungen erweist, möge noch hervorgehoben werden, dass die Form dieser Gleichungen (1), (2) singuläre Lösungen überhaupt nicht duldet. Denn die sechs Differentialquotienten von p, q, r, a'', b'', c'' nach t sind rationale ganze Functionen eben dieser Grössen. Eine nach Massgabe der Einleitung zu § 5 construirte Determinante Δ kann also unmöglich verschwinden.

Der Fall $\varrho' = 0$, $R = 0$.

7.

Diese zweite der allgemeinen Voraussetzungen des Paragraphen 5 vereinfacht das Gleichungssystem (8) in das folgende:

$$\frac{d\nu}{dt} = 2P \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho_0 \\ \mu & \varrho_0 & 1 \end{vmatrix} = 2P\sqrt{N},$$

$$R = 0 = \begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & \sigma \\ \varrho_0 & \nu & \mu_1 \\ \sigma & \mu_1 & \tau \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$(\nu - \varrho_0^2)\frac{d\mu_1}{dt} = (\mu_1 - \varrho_0\sigma)\frac{d\nu}{dt}.$$

Soll in demselben die Gleichung

$$R \equiv (\nu - \varrho_0^2)(\tau - \sigma^2) - (\mu_1 - \varrho_0\sigma)^2 = 0 \tag{18}$$

eine Integralgleichung sein, so muss wieder

$$R' = \frac{\partial R}{\partial t} + \sum_{x=r,\varrho_0,\mu} \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} = \sum \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} = 0$$

entweder eine Identität sein oder eine blosse algebraische Folge von $R = 0$.

Die Untersuchung, ob sie das eine oder andere sei, wird aber diesesmal wesentlich ausgedehnter, wie im Falle $\nu' = 0$, $N = 0$, weil in der Determinante R ausser den drei unabhängigen Veränderlichen ν, ϱ, μ noch die Grössen σ und τ vorkommen, die erst durch ν, ϱ, μ ausgedrückt werden müssen. In Ausführung letzteren Gedankens kommt uns nun die Relation (10) zu statten, laut welcher sich unter

Berücksichtigung der Abkürzungen (9) die Differenz $\tau - \sigma^2$ folgendermassen darstellt:

$$\tau - \sigma^2 = \frac{(\mu_1 - \varrho_0\sigma)([D-G]\varrho_0 - [E-H]\sigma) - (\nu - \varrho_0^2)(\varrho_0 - G\sigma)}{H\varrho_0 - F\sigma}.$$

Der Nenner $H\varrho_0 - F\sigma$ kann offenbar nicht verschwinden, solange σ als nicht constant gleich $H\varrho_0 : F$ vorausgesetzt wird. Sehen wir von diesem Unterfall vorläufig ganz ab, wie wir andererseits auch durchaus an der allgemeinen Voraussetzung $\nu - \varrho_0^2 \gtrless 0$ des § 5 festhalten, so geht die Relation (18) über in

(18a) $$R = \sigma(G - [E-H]\eta + F\eta^2) - \varrho_0(1 - [D-G]\eta + H\eta^2) = 0,$$

worin η den Quotienten bedeutet

(19) $$\eta = \frac{\mu_1 - \varrho_0\sigma}{\nu - \varrho_0^2}.$$

Wir haben somit statt der drei ursprünglichen Variabeln ν, μ, ϱ die drei Variabeln ϱ_0, σ, η erhalten, die sich für die Untersuchung bequemer erweisen werden.

Für R' wird demgemäss zu schreiben sein

$$R' = \frac{\partial R}{\partial \sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial R}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dt}.$$

Es ist aber einerseits zufolge der Gleichung (19)

$$(\nu - \varrho_0^2)\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\mu_1}{dt} - \varrho_0 \frac{d\sigma}{dt} - \eta \frac{d\nu}{dt},$$

andererseits zufolge der dritten Gleichung (17)

$$\frac{d\mu_1}{dt} = \eta \frac{d\nu}{dt},$$

also wird

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\varrho_0}{\nu - \varrho_0^2} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

und

$$R' = \frac{d\sigma}{dt}\left[\frac{\partial R}{\partial \sigma} - \frac{\varrho_0}{\nu - \varrho_0^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \eta}\right].$$

Durch partielle Differentiation von (18a) bilden sich die Ausdrücke

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = G - [E-H]\eta + F\eta^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \eta} = ([D-G]\varrho_0 - [E-H]\sigma) - 2\eta(H\varrho_0 - F\sigma),$$

durch deren Substitution also

$$R' = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{\nu - \varrho_0^2}\{(G - [E-H]\eta + F\eta^2)(\nu - \varrho_0^2) - ([D-G]\varrho_0 - [E-H]\sigma)\varrho_0 + 2(H\varrho_0 - F\sigma)\varrho_0\eta\}.$$

Wir behaupten nun, dass der Ausdruck in der geschweiften Klammer

in der That als eine blosse algebraische Folge der Annahme (18a) $R = 0$ verschwinde.

Zunächst können wir noch R' unter eben dieser Annahme in folgende Form umschreiben:

$$(20)\quad R' = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{\varrho_0}{\sigma(\nu - \varrho_0^2)} \{(1 - [D-G]\eta + H\eta^2)(\nu - \varrho_0^2) - ([D-G]\varrho_0 - [E-H]\sigma)\sigma + 2(H\varrho_0 - F\sigma)\sigma\eta\},$$

in welche nur noch die Differenz $\nu - \varrho_0^2$ als eine Function der drei Grössen ϱ_0, ν, η einzusetzen sein wird. Zur Bildung dieser Function aber dienen die folgenden Ueberlegungen.

8.

In den erweiterten Relationen (4),

$$(21)\quad \begin{aligned} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= \nu, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= \mu_1, \\ p^2 + q^2 + r^2 &= \tau, \\ Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma &= \varrho, \\ p\alpha + q\beta + r\gamma &= \sigma, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}$$

besitzen die Grössen

$$\begin{cases} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ Ap, & Bq, & Cr, \\ p, & q, & r, \end{cases}$$

als Unbekannte in den Gleichungen

$$\begin{cases} 6, & 4, & 5, \\ 4, & 2, & 1, \\ 5, & 3, & 2 \end{cases}$$

aufgefasst, sämmtlich als Determinante der Coefficienten die mit $R = 0$ zugleich verschwindende Determinante P der Gleichungen (7), so dass zu den obigen 6 Gleichungen (21) noch als siebente hinzukommt

$$(22)\quad \mathsf{P} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Keine der angeführten 9 Grössen kann aber — ihrer Bedeutung zufolge — unendlich werden, also müssen auch die sämmtlichen 9 auftretenden Zählerdeterminanten zu Null werden, was insgesammt drei Tripel von Bedingungsgleichungen giebt, von folgender Form

$$1 \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} + \varrho_0 \cdot \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \sigma \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = 0,$$

$$\varrho_0 \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} + \nu \cdot \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \tau \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = 0.$$

Diese drei Tripel sind aber nicht unabhängig: man hat nur nöthig, irgend eine der vorstehenden drei Gleichungen mit irgend einer ihrer Determinanten zu multipliciren, und die entsprechenden Gleichungen der zwei andern Tripel mit den entsprechenden Determinanten, um durch Addition entweder die Identität $0 = 0$ oder aber die Ausgangsbedingung (18) $R = 0$ zu erhalten.

Aber auch die drei Gleichungen eines und desselben Tripels sind nicht unabhängig von einander, indem in ihnen thatsächlich nur die Verhältnisse der Determinanten auftreten, eine Ueberbestimmung aber ausgeschlossen erscheint, weil die Discriminante des Tripels,

$$\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & \sigma \\ \varrho_0 & \nu & \mu_1 \\ \sigma & \mu_1 & \tau \end{vmatrix}$$

keine andere als R und somit Null ist.

Es bleiben also statt der erwähnten 9 Bedingungsgleichungen nur 2 zu Recht bestehen. Aus diesen oder aus zwei mit ihnen äquivalenten Combinationen folgen die Verhältnisse $p : q : r$; die Zuziehung der Gleichung (21) für ϱ_0 oder σ giebt endlich definitiv die absoluten Werthe von p, q, r, und zwar in linearer Form.

Dieselben lauten

$$(23) \quad \begin{cases} p = \frac{\alpha\sigma}{\Omega}([1-B\eta][1-C\eta]), \\ q = \frac{\beta\sigma}{\Omega}([1-C\eta][1-A\eta]); \quad \Omega = 1-(D-G)\eta + H\eta^2. \\ r = \frac{\gamma\sigma}{\Omega}([1-A\eta][1-B\eta]), \end{cases}$$

Dabei sind wieder die Abkürzungen (9) verwendet, welche geschrieben wurden:

$$\begin{cases} \Sigma A = D & \Sigma A\alpha^2 = G, \\ ABC = F & \\ \Sigma BC = E & \Sigma BC\alpha^2 = H. \end{cases}$$

Das Werthsystem (23) giebt offenbar Antwort auf die Zwischenfrage, in welcher Weise sich in dem hier vorliegenden Falle $R = 0$ oder

$P = 0$ die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r durch die eingeführten Variabeln ν, ϱ, μ_1 oder den daraus ableitbaren Variabeln ϱ, σ, η sich darstellen möchten. Zur Giltigkeit desselben ist erforderlich, dass es sowohl die Gleichung (20), als auch die fünf ersten Gleichungen (19) befriedige d. h. dass es zu zwei und nicht mehr als zwei Bedingungsgleichungen zwischen den ν, ϱ, μ, σ, τ Veranlassung gebe: die eine der letzteren wird sich überdies decken müssen mit der Relation (10), während die andere eben die von uns gesuchte Gleichung darstellen muss, aus der wir $\nu - \varrho_0^2$ in Function von ϱ_0, σ, η berechnen können.

Wie man sich nun sofort überzeugt, erfüllen die Werthe (23) sowohl die Gleichung (22) als auch von den Gleichungen (21) jene für σ.

Dagegen fliessen nach einiger Rechnung aus den vier anderen Gleichungen (21) die Beziehungen:

$$\varrho_0 \cdot \frac{\Omega}{\sigma} = G - (E-H)\eta + F\eta^2,$$

$$\nu \cdot \frac{\Omega^2}{\sigma^2} = (DG - [E-H]) + 2(F-EG)\eta + (E[E-H] - F[D-G] + 2FG)\eta^2 - 2F(E-H)\eta^3 + F^2\eta^4,$$

$$\mu_1 \cdot \frac{\Omega^2}{\sigma^2} = G - 2(E-H)\eta + (D[E-H] + [F-EG] + 2F)\eta^2 - 2F(D-G)\eta^3 + FH\eta^4.$$

24)
$$\tau \cdot \frac{\Omega^2}{\sigma^2} = 1 - 2(D-G)\eta + (D[D-G] - [E-H] + 2H)\eta^2 + 2(F-DH)\eta^3 + (EH - F[D-G])\eta^4,$$

$$(\nu - \varrho_0^2) \cdot \frac{\Omega^2}{\sigma^2} = (G[D-G] - [E-H]) + 2(F-GH)\eta + (H[E-H] - F[D-G])\eta^2,$$

$$(\mu_1 - \varrho_0\sigma) \cdot \frac{\Omega^2}{\sigma^2\eta} = \quad " \quad " \quad "$$

$$(\tau - \sigma^2) \cdot \frac{\Omega^2}{\sigma^2\eta^2} = \quad " \quad " \quad "$$

Auf Grund derselben wird

$$\frac{\mu_1 - \varrho_0\sigma}{\nu - \varrho_0^2} = \eta,$$

$$(\tau - \sigma^2)(\nu - \varrho_0^2) = (\mu_1 - \varrho_0\sigma)^2,$$

$$\sigma(G - [E-H]\eta + F\eta^2) = \varrho_0\Omega = \varrho_0(1 - [D-G]\eta + H\eta^2),$$

so dass in der That die Gleichungen (19), (18) und (18a) erfüllt sind, und durch die beiden letzteren hindurch auch die Gleichung (10).

Als die einzige noch unabhängige Beziehung des Systems (24) wählen wir die folgende:

$$(1 - [D-G]\eta + H\eta^2)(\nu - \varrho_0^2) = \frac{\sigma^2}{(1 - [D-G]\eta + H\eta^2)} \cdot \{(G[D-G] - [E-H]) + 2(F-GH)\eta + (H[E-H] - F[D-G])\eta^2\},$$

um solche nunmehr direct für die Gleichung (20) verwerthen zu können.

9.

Setzen wir den vorstehenden Ausdruck in eben diese Gleichung ein und ordnen nach σ, so schreibt sich dieselbe

$$R' = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{\varrho_0}{\nu - \varrho_0^2}$$

$$\cdot \frac{\sigma\{(G[D-G]-[E-H])+2(F-GH)\eta+(H[E-H]-F[D-G])\eta^2+([E-H]-2F\eta) \cdot(1-[D-G]\eta+H\eta^2)\}+\varrho_0(2H\eta-[D-G])\cdot(1-[D-G]\eta+H\eta^2)}{1-[D-G]\eta+H\eta^2}$$

Der zu σ gehörige Factor zieht sich aber zusammen auf das Product

$$([D-G]-2H\eta)\,(G-[E-H]\eta+F\eta^2),$$

also geht die obige Formel über in

$$R' = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{\varrho_0([D-G]-2H\eta)}{\nu-\varrho_0^2} \cdot \frac{\sigma(G-[E-H]\eta+F\eta^2)-\varrho_0(1-[D-G]\eta+H\eta^2)}{1-[D-G]\eta+H\eta^2}$$

d. h. also in

$$(25)\quad R' = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{\varrho_0([D-G]-2H\eta)}{\nu-\varrho_0^2} \cdot \frac{R}{1-[D-G]\eta+H\eta^2}.$$

Es verschwindet sonach R' zugleich mit R, und zwar für die allgemeinste Annahme des rotirenden Körpers.

Die ganze Entwicklung fusste dabei auf der Voraussetzung, dass neben ϱ_0 nicht auch noch die Grösse σ eine Constante sei, speciell gleich $H\varrho_0 : F$; ϱ und σ aber beide als constant angenommen, weisen, wie sehr einfach gezeigt werden kann, auf den Fall der Bewegung eines Gyroscops oder auch wieder auf den Specialfall gleichförmiger Drehbewegung parallel der Horizontalebene.

Nachdem somit constatirt ist, dass die Gleichung $R = 0$ ganz ebenso wie jene $N = 0$ eine Integralgleichung der reducirten Form (8) der Euler'schen Bewegungsgleichungen ist, wird es sich wieder darum handeln, zu entscheiden, ob, da $R \equiv \mathsf{P}^2$ ist, auch die Determinante (7) P, gleich Null gesetzt, eine Integralgleichung des Gleichungssystems (7) oder (6) abgebe.

Ist freilich die Gleichung $R = 0$ eine singuläre Integralgleichung, so wird die singuläre Lösung $\mathsf{P} = 0$ eben dieser singulären Integralgleichung im Allgemeinen keine integrirende Lösung der genannten Systeme sein. Und wenn sie es nicht ist, beweist dies gerade die Existenz der Singularität der Integralgleichung $R = 0$.

10.

Wir fügen zu den drei Gleichungen (6) noch die beiden Bedingungen $\varrho = \varrho_0$ und $\mathsf{P} = 0$ und erhalten so folgendes System:

$$(26)\begin{cases}\frac{dAp}{dt} = (B-C)qr + \frac{P}{N_1}[(Ap-\alpha\varrho_0)\sqrt{N} + N_1(\beta Cr - \gamma Bq)],\\ \frac{dBq}{dt} = (C-A)rp + \frac{P}{N_1}[(Bq-\beta\varrho_0)\sqrt{N} + N_1(\gamma Ap - \alpha Cr)],\\ \frac{dCr}{dt} = (A-B)pq + \frac{P}{N_1}[(Cr-\gamma\varrho_0)\sqrt{N} + N_1(\alpha Bq - \beta Ap)],\\ \varrho_0 = Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma,\\ \mathsf{P}_0 = 0 = \Sigma\alpha(B-C)qr = \Sigma Ap(\gamma q - \beta r) = \Sigma p(\beta Cr - \gamma Bq).\end{cases}$$

Durch Differentiation von P erscheint

$$\mathsf{P}' = \frac{d\mathsf{P}}{dt} = \Sigma\frac{dAp}{dt}\left[(\gamma q - \beta r) + \frac{\beta Cr - \gamma Bq}{A}\right].$$

Setzen wir für diesen Abschnitt voraus, dass die sämmtlichen Elemente der Tripel

$$\begin{matrix} p, & q, & r,\\ A-B, & B-C, & C-A,\\ \alpha, & \beta, & \gamma\end{matrix}$$

von Null verschieden seien, so schreibt sich identisch

$$(\gamma q - \beta r) + \frac{\beta Cr - \gamma Bq}{A} = \frac{\mathsf{P} - \alpha(B-C)qr}{Ap},$$

also wird

$$(27)\qquad \mathsf{P}' = \frac{d\mathsf{P}}{dt} = \Sigma\frac{dAp}{dt}\cdot\frac{\mathsf{P} - \alpha(B-C)qr}{Ap}.$$

In die rechte Seite dieser Gleichung sind die Werthe für die Differentialquotienten aus den drei ersten Gleichungen (26) einzusetzen, so soll also dieselbe entweder an sich schon Null sein oder aber mit P zugleich verschwinden.

Jene Werthe bestehen nun in Summen von je zwei Summanden, also erscheint auch für P' eine zweigliedrige Summe. Das zweite Glied ist dabei mit dem Factor P des Directionsmomentes der Schwerkräfte behaftet, während das erste als Constante nur die von der Gestalt des Körpers allein, von P jedoch nicht abhängigen Grössen $A, B, C\ \alpha, \beta, \gamma$ enthält. An ein identisches Verschwinden ist also hier ebensowenig zu denken, als es im Falle $N = 0$ für die Gleichung (6) statt hatte — dafür bürgt eben das Auftreten des Werthes P; P' aber schlechterdings gleich Null gesetzt, liefert zu den zwei letzten Relationen (26) noch eine dritte, welche im Verein mit diesen für den allgemeinen Fall des rotirenden Körpers, p, q, r sämmtliche als constant liefern würde. Es bleibt also nur die einzige Möglichkeit noch, dass die beiden Summanden der zweigliedrigen Summe P' einzeln für sich verschwinden, und zwar eben als blosse algebraische Folgen der angenommenen Gleichung $\mathsf{P} = 0$.

Es muss also erscheinen

$$(28)\begin{cases} \Sigma(B-C)qr\cdot\frac{P-\alpha(B-C)qr}{Ap}=0, \\ \sqrt{N}\cdot\Sigma(Ap-\alpha\varrho_0)\frac{P-\alpha(B-C)qr}{Ap}+N_1\cdot\Sigma(\beta Cr-\gamma Bq)\frac{P-\alpha(B-C)qr}{Ap}=0. \end{cases}$$

Betrachten wir von diesen beiden Bedingungen zunächst die erstere, so ergiebt dieselbe für $P=0$ folgende Relation in p, q, r:

$$\Sigma\alpha BC(B-C)^2q^3r^3=0;$$

$P=0$ selbst aber wurde bereits im Systeme (26) in die Form gebracht

$$\Sigma\alpha(B-C)qr=0.$$

Führen wir in diese beiden Gleichungen die Abkürzungen ein

$$\alpha(B-C)qr:\beta(C-A)rp:\gamma(A-B)pq=p_1:q_1:r_1,$$
$$A\alpha^2(B-C)=\mathsf{A},$$
$$B\beta^2(C-A)=\mathsf{B},$$
$$C\gamma^2(A-B)=\Gamma,$$

so schreiben sich dieselben

$$\mathsf{B}\Gamma p_1^3+\Gamma\mathsf{A}q_1^3+\mathsf{AB}r_1^3=0,$$
$$p_1+q_1+r_1=0.$$

Da von den Constanten A, B, Γ nach der eingangs des Paragraphen getroffenen Festsetzung keine verschwinden soll, so folgt hieraus

$$\frac{r_1}{p_1}=\text{constans},\qquad\frac{r_1}{q_1}=\text{constans}$$

und hieraus wieder

$$\frac{p}{r}=\text{constans},\qquad\frac{q}{r}=\text{constans}.$$

Soll aber die Substitution der letzteren Werthe in die vierte Gleichung (26),

$$\varrho_0=Ap\alpha+Bq\beta+Cr\gamma$$

nicht $r=$ constans und damit den Fall gleichförmiger Drehbewegung liefern, so muss entschieden sowohl

$$\varrho_0=0$$

als auch

$$A\left(\frac{p}{r}\right)\alpha+B\left(\frac{q}{r}\right)\beta+C\gamma=0$$

genommen werden. Letztere Gleichung aber schreibt sich in p_1, q_1, r_1 als

$$\Gamma p_1q_1+\mathsf{A}q_1r_1+\mathsf{B}r_1p_1=0,$$

so dass wir nunmehr drei Gleichungen, in diesen Variabeln geschrieben, besitzen:

$$\mathsf{B\Gamma}p_1^3 + \mathsf{\Gamma A}q_1^3 + \mathsf{AB}r_1^3 = 0,$$
$$\mathsf{\Gamma}p_1q_1 + \mathsf{A}q_1r_1 + \mathsf{B}r_1q_1 = 0,$$
$$p_1 + q_1 + r_1 = 0.$$

Sollen dieselben mit einander verträglich sein, so müssen, wie sich einfach zeigen lässt, die Coefficienten A, B, Γ die Bedingung erfüllen

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma\mathsf{A}^2 - 2\,\Sigma\mathsf{B\Gamma} \\ &\equiv (\mathsf{A}+\mathsf{B}-\mathsf{\Gamma})^2 - 4\mathsf{AB} \\ &\equiv (\mathsf{B}+\mathsf{\Gamma}-\mathsf{A})^2 - 4\mathsf{B\Gamma} \\ &\equiv (\mathsf{\Gamma}+\mathsf{A}-\mathsf{B})^2 - 4\mathsf{\Gamma A}. \end{aligned}$$

Auf Grund einer dieser gleichwerthigen Bedingungen aber ergeben sich die Werthe

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^2 = \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{\Gamma}},$$
$$\left(\frac{q_1}{r_1}\right)^2 = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{\Gamma}},$$

welche leicht auf ihre Richtigkeit zu controliren sind.

Zufolge des Zusammenhanges der Variabeln p_1, q_1, r_1 mit den früheren Veränderlichen p, q, r folgt hieraus

$$\left(\frac{Ap}{Cr}\right)^2 \equiv \left[\frac{A\alpha(B-C)}{C\gamma(A-B)} \cdot \frac{r_1}{p_1}\right]^2 = \frac{A(B-C)}{C(A-B)},$$
$$\left(\frac{Bq}{Cr}\right)^2 \equiv \left[\frac{B\beta(C-A)}{C\gamma(A-B)} \cdot \frac{r_1}{q_1}\right]^2 = \frac{B(C-A)}{C(A-B)}.$$

Hiedurch würde aber das Quadrat ν der Grösse des anregenden Kräftepaars,

$$\nu \equiv A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = 0$$

werden, was abgesehen davon, dass dieser Fall analytisch unter die frühere Möglichkeit $r = r_0$ fiele, geometrisch sofort gegen die Idee eines rotirenden Körpers verstösst, indem die Gleichung für p, q, r nur die reellen Werthe

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0$$

zulässt.

Ohne also die zweite der Relationen (14) auch nur in Betracht zu ziehen, können wir behaupten: Trotzdem die Annahme $R = 0$ sich als Integralgleichung des Systems (8) der dynamischen Gleichungen erweist, ergiebt deren singuläre Lösung $\mathsf{P} = 0$ keine Integralgleichung des Systems (6) jener Gleichungen.

11.

Im Gegensatze zu der ausdrücklichen Annahme des vorstehenden Paragraphen, dessen Erörterungen nur für Körper allgemeinster Gestalt Giltigkeit besassen, sollen nun solche specielle Voraussetzungen zur Sprache kommen, welche die Gleichung $\mathsf{P} = 0$ derart modificiren, dass

die allgemeinen Schlussweisen der vorhergehenden Zeilen nicht mehr zur Anwendung kommen können.

Nach dem Gesagten ist dies der Fall, wenn irgend welche Grössen aus den drei Tripeln

$$\begin{array}{lll} p, & q, & r; \\ (A-B), & (B-C), & (C-A); \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{array}$$

zu Null werden. Nun zieht aber vermöge der eigenartigen Form des Ausdruckes von P irgend eine der Annahmen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ eine zweite solche nach sich, oder, wenn man diese ganz speciellen Möglichkeiten ausser Betracht lässt, das Verschwinden eines der Elemente aus den zwei letzten Tripeln, so dass sich die Untersuchung auf den Eintritt dieser letzteren Eventualitäten allein beschränken kann.

I. $A = B$, *der Körper besitze zwei gleiche Hauptträgheitsmomente.*

Dann nehmen die Gleichungen (26) die Form an

$$(29)\quad \begin{cases} \frac{dAp}{dt} = (A-C)qr + \frac{P}{N_1}\left[(Ap - \alpha\varrho_0)\sqrt{N} + N_\lambda(\beta Cr - \gamma Aq)\right], \\ \frac{dAq}{dt} = -(A-C)pr + \frac{P}{N_1}\left[(Aq - \beta\varrho_0)\sqrt{N} + N_\lambda(\gamma Ap - \alpha Cr)\right], \\ \frac{dCr}{dt} = \frac{P}{N_1}\left[(Cr - \gamma\varrho_0)\sqrt{N} + N_\lambda(\alpha Aq - \beta Ap)\right], \\ \varrho_0 = A(p\alpha + q\beta) + Cr\gamma, \\ \mathsf{P} = 0 = (A-C)r[\alpha q - \beta p]; \end{cases}$$

P wird aber Null, wenn

$$\begin{array}{ll} 1. & r = 0, \\ 2. & \alpha q - \beta p = 0 \end{array}$$

ist.

ad 1. Für die Voraussetzung $r = 0$ schreibt sich die dritte Gleichung (29)

$$0 = \frac{P}{N_1}\left\{-\gamma\varrho_0\sqrt{N} + N_\lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ Ap & Aq \end{vmatrix}\right\}.$$

Da das Directionsmoment der Schwerkräfte niemals Null ist, wenn nicht der Körper um seinen Schwerpunkt rotirt, so muss also der Ausdruck in der Klammer verschwinden. Setzt man für die N ihre Werthe aus dem § 2 ein, nämlich

$$\begin{aligned} N &= (\nu - \varrho_0^2)(1-\mu^2) - (\lambda - \mu\varrho_0)^2, \\ N_1 &= \nu - \varrho_0^2, \\ N_\lambda &= \lambda - \mu\varrho_0 \end{aligned}$$

und quadrirt unter Berücksichtigung der für $r = 0$ reducirten Abkürzungen (4), so kommt zunächst

$$\gamma^2\varrho_0^2[(\nu - \varrho_0^2)(1-\mu^2) - (\lambda - \mu\varrho_0)^2] = (\lambda - \mu\varrho_0)^2[\nu(1-\gamma^2) - \varrho_0^2].$$

Diese Gleichung kann nach Weghebung der von Null verschiedenen Differenz $\nu - \varrho_0^2$ nach μ aufgelöst werden und liefert

$$\mu\varrho_0 - \lambda(1-\gamma^2) = \gamma\sqrt{\varrho_0^2 - \lambda^2(1-\gamma^2)}.$$

Soll neben ϱ nicht auch μ constant werden, so ist entweder $\varrho_0 = 0$, $\lambda = 0$ oder $\varrho_0 = 0$, $\gamma = 1$ $(\alpha = \beta = 0)$ zu wählen. $A = B$, $r = 0$, $\varrho_0 = 0$, $\lambda = 0$ aber bedeutet eine specielle Annahme des später zu erwägenden allgemeineren Falles $\varrho_0 = 0$, $\lambda = 0$, während $A = B$, $\alpha = \beta = 0$, $\varrho_0 = 0$ eine specielle gyroscopische Bewegung darstellt.

ad 2. Wird der andere Factor von P gleich Null gesetzt,

$$\alpha q - \beta p = 0,$$

so wird $\frac{dP}{dt}$ gleichbedeutend mit

$$\alpha\frac{dAq}{dt} - \beta\frac{dAp}{dt} = -(A-C)r(\alpha p + \beta q) + \frac{P}{N_1}[(Aq\alpha - Ap\beta)\sqrt{N} + (\lambda - \mu\varrho_0)(\gamma\varrho_0 - Cr)].$$

Soll aber diese Gleichung mit der Differenz $\alpha q - \beta p$ gleichzeitig verschwinden, so ist dies nur möglich, wenn

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1 (\varrho_0 = Cr)$$

oder wenn

$$A = C, \qquad \lambda = \varrho_0 = 0$$

genommen wird. Die erstere Möglichkeit aber charakterisirt im Verein mit $A - B$ die Bewegung als diejenige eines Umdrehungskörpers um einen Punkt seiner Umdrehungsaxe d. h. den allgemeinen Fall der Bewegung eines Gyroscops, die letztere nur einen ganz speciellen Fall einer solchen, nämlich eine Pendelbewegung.

II. $\gamma = 0$, *der Schwerpunkt des Körpers liege in einer Hauptträgheitsebene durch den Unterstützungspunkt.*

Dann gewinnen die Gleichungen (26) folgende Gestalt:

$$(3^{(1)}) \quad \begin{cases} \frac{dAp}{dt} = (B-C)qr + \frac{P}{N_1}[(Ap - \alpha\varrho_0)\sqrt{N} + N_1\beta Cr], \\ \frac{dBq}{dt} = (C-A)rp + \frac{P}{N_1}[(Bq - \beta\varrho_0)\sqrt{N} - N_1\alpha Cr], \\ \frac{dCr}{dt} = (A-B)pq + \frac{P}{N_1}[Cr\sqrt{N} + N_1(\alpha Bq - \beta Ap)], \\ \varrho_0 = Ap\alpha + Bq\beta, \\ \mathsf{P} = 0 = r[\alpha(B-C)q - \beta(A-C)p]. \end{cases}$$

Es verschwindet also diesmal der Ausdruck P für

1. $r = 0$,
2. $\alpha(B-C)q - \beta(A-C)p = 0$.

ad 1. Die dritte Gleichung (30) liefert für $r = 0$ im Vereine mit

Als vierten Gleichung für ϱ_0, wie leicht zu erkennen ist, nur dann nicht p und q beide constant, wenn ($\alpha = \beta = 0$ ist wegen $\gamma = 0$ unmöglich)

$$A = B, \quad \varrho_0 = \lambda = 0$$

vorausgesetzt ist, was wieder eine besondere Annahme der allgemeineren Möglichkeit $\varrho_0 = 0$ bedeutet, die im Nachfolgenden besprochen ist.

ad. 2. Soll hingegen fortwährend

$$\alpha(B-C)q - \beta(A-C)p = 0$$

bleiben, so muss, damit aus dieser Gleichung und

$$Ap\alpha + Bq\beta = \varrho_0$$

nicht wieder p und q Constanten gleich werden, nothwendig die Determinante der Coefficienten verschwinden:

$$A\alpha^2(B-C) + B\beta^2(A-C) = 0.$$

Nach bekannten Sätzen aus der Lehre vom Trägheitsmoment erhält man aber das Trägheitsmoment G des körperlichen Systems um die Figuraxe, wenn man die Summe bildet aus den drei Hauptträgheitsmomenten, jedes multiplicirt mit dem Quadrate der Neigungscosinus zwischen den Hauptaxen und der Figuraxe. Da der Cosinus γ Null ist, so reducirt sich G auf

$$G = A\alpha^2 + B\beta^2,$$

es schreibt sich also die angegebene Coefficientenbedingung

$$CG - AB = 0 \tag{31}$$

d. h. es müsste das Trägheitsmoment des beweglichen Körpers um die Axe der Figur die vierte geometrische Proportionale bilden zwischen den zwei Trägheitsmomenten um die Hauptaxe der Ebene, in der der Schwerpunkt liegt, einerseits und dem dritten Hauptträgheitsmomente andererseits. Nun wird

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{\alpha(B-C)}{B} \cdot \frac{dBq}{dt} - \frac{\beta(A-C)}{A} \cdot \frac{dAp}{dt} \\ &= -\frac{(A-C)(B-C)}{AB}\varrho_0 r + \frac{P}{N_1}\Big[\{\alpha(B-C)q - \beta(A-C)p\}\sqrt{N} \\ &\qquad + \frac{\alpha\beta(A-B)C}{AB}\varrho_0\sqrt{N} - \\ &\qquad N_1 \cdot \frac{Cr}{AB}\{A\alpha^2(B-C) + BC^2(A-C)\}\Big].\end{aligned}$$

Soll die rechte Seite unter den oben getroffenen Annahmen zu Null werden, so ist hiezu, wenn man von bereits abgewiesenen Möglichkeiten absieht, einzig und allein nöthig

$$\varrho_0 = 0. \tag{32}$$

12.

Reduciren wir, zur Weiterbehandlung des Problems, die Gleichungen (30) auf Grund der Annahmen (31) und (32), so gehen dieselben über in

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{dAp}{dt} = (B-C)qr + \frac{P}{\nu}\left[Ap\sqrt{N} + \lambda\beta Cr\right], \\ \frac{dBq}{dt} = (C-A)rp + \frac{P}{\nu}\left[Bq\sqrt{N} - \lambda\alpha Cr\right], \\ \frac{dCr}{dt} = (A-B)pq + \frac{P}{\nu}\left[Cr\sqrt{N} - \lambda(\alpha Bq - \beta Ap)\right], \\ 0 = Ap\alpha + Bq\beta, \\ 0 = A\alpha^2(B-C) + B\beta^2(A-C) \equiv AB - CG. \end{cases}$$

Von den drei hier stehenden Differentialgleichungen kann nun zufolge der zwei nachfolgenden Festsetzungen eine direct wegbleiben. Eine zweite kann sodann in Wegfall kommen, wenn wir in das System die bekannte Combination einführen, die zur Entstehung der ersten Gleichung (8) Veranlassung gegeben hat, nämlich $\frac{d\nu}{dt}$. Wegen $\varrho_0 = 0$ schreibt sich dieselbe nunmehr einfacher als

$$\frac{d\nu}{2P\,dt} = \sqrt{N} = \sqrt{\nu(1-\mu^2) - \lambda^2}.$$

Es ist nun nach den Ausdrücken (4)

$$\mu_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2P\mu + h,$$
$$\nu = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2,$$

also

$$C(2P\mu + h) - \nu = Ap^2(C-A) + Bq^2(C-B),$$

was laut der zwei letzten Gleichungen (33) Null ergiebt, so dass

$$\mu = \frac{\nu - Ch}{2PC}$$

erscheint. Dadurch wird aber für t das elliptische Differential in ν erhalten

$$(34)\quad dt = \frac{d\nu}{2P\sqrt{\nu\left[1 - \left(\frac{\nu - Ch}{2PC}\right)^2\right] - \lambda^2}},$$

woraus durch Integration und Umkehrung ν als elliptische Function von t erhalten wird,

$$(34a)\quad \nu = F(t).$$

Setzt man aber aus den Gleichungen

$$\nu \equiv A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = F(t),$$
$$\varrho_0 = Ap\alpha + Bq\beta$$

die Werthe in r und t, welche hieraus für p und q erfolgen, in die einzige noch bleibende Differentialgleichung ein, z. B. in

$$\frac{dCr}{dt} = (A-B)pq + \frac{P}{\nu}\left[Cr\sqrt{N} - \lambda(\alpha Bq - \beta Ap)\right],$$

so entsteht aus ihr eine Differentialgleichung mit nur zwei Variabeln, ν und t. Die letztere schreibt sich, sobald man von den Festsetzungen

$$\begin{aligned} Ap &= \beta\sqrt{\nu}\cdot\sin\xi, \\ Bq &= -\alpha\sqrt{\nu}\cdot\sin\xi, \\ Cr &= \gamma\sqrt{\nu}\cdot\cos\xi \end{aligned} \tag{35}$$

Gebrauch macht, wie folgt:

$$\nu\frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha\beta(A-B)}{AB}\nu^{\frac{3}{2}}\sin\xi - P\lambda, \tag{36}$$

und stellt also nach Substitution von $\nu = F(t)$ eine Gleichung dar zwischen der Zeit t und einer Hilfsvariabeln ξ.

Offenbar kann deren Integration für $\lambda = 0$ sofort geleistet werden, indem hiefür

$$\frac{d\xi}{\sin\xi} = \frac{\alpha\beta(A-B)}{AB}\cdot\sqrt{\nu}\,dt = \frac{\alpha\beta(A-B)}{2ABP}\cdot\frac{d\nu}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\nu-Ch}{2PC}\right)^2\right]}} \tag{37}$$

erfolgt, welche Differentialgleichung auf Kreisintegrale führt.

Die Verfolgung des Problems von hier ab würde das Ziel, das sich diese Note gesteckt hat, überschreiten und mag also einer anderen Entwicklung vorbehalten bleiben.

13.

Fassen wir die Ergebnisse der Untersuchungen der Paragraphen 6 bis 12 nunmehr zusammen, so können wir Folgendes aussagen:

Führt man in die Euler'schen Differentialgleichungen für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt statt der 6 *darin vorkommenden abhängigen Veränderlichen: p, q, r der Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptaxen und a'', b'', c'' der Neigungscosinus der Hauptaxen gegen die Verticale — als abhängige Veränderliche ein:* 1) *das Quadrat ν der Intensität des angreifenden Momentenkräftepaars*, 2) *den Antheil ϱ dieses Paares um die Figuraxe, und* 3) *μ den Neigungscosinus zwischen den Axen der Figur und der Verticalen, so reduciren sich jene sechs Differentialgleichungen auf drei.*

Für dieses reducirte System giebt es zwei Annahmen allgemeinster Art, welche sich als singuläre Lösungen desselben erweisen: die Annahmen, es mögen während des ganzen Verlaufes der Bewegung I. die

Intensität des Kräftepaares, oder II. dessen Antheil um die Figuraxe constant bleiben.

Diese Lösungen führen jedoch, solange an der Allgemeinheit der Gestalt des Körpers festgehalten wird, nicht auch auf Lösungen der Euler'schen Gleichungen in der ursprünglichen Form. Die letzteren können überdies singuläre Lösungen überhaupt nicht besitzen.

Dagegen sind auch die Euler'schen Originalgleichungen lösbar für die specielle Voraussetzung II, dass erstens der constant bleibende Antheil des Kräftepaars längs der Figuraxe sowohl als längs der Verticalen stets Null sei, und dass zweitens der Schwerpunkt des Körpers sich in einer Hauptebene durch den Unterstützungspunkt befinde, während das Trägheitsmoment um die Axe der Figur die vierte geometrische Proportionale bildet zwischen den Hauptträgheitsmomenten um die Hauptaxen der ausgezeichneten Ebene einerseits und dem dritten Hauptträgheitsmomente andererseits. Die Lösung führt auf elliptische Functionen.

Bamberg, im Januar 1890.

Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.

Par

G. Peano à Turin.

Soit donné le système d'équations différentielles, ramené à la forme normale:

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n),$$

où les $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions continues aux environs de $t = b$, $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$. Dans cette Note on prouve que l'on peut déterminer un intervalle (b, b'), et, dans cet intervalle, n fonctions $x_1 \ldots x_n$ de t, qui satisfont aux équations données, et qui, pour $t = b$, prennent les valeurs $a_1 \ldots a_n$.*)

Toute la démonstration est réduite ici en formules de Logique, analogues aux formules d'Algèbre; car, bien qu'elle ne soit pas difficile, son développement complet avec le langage ordinaire serait d'une complication excessive.

Dans la première partie on explique les notations introduites, et l'on développe quelque théorie dont dans la suite on doit faire usage. La deuxième partie contient la démonstration du théorème.

---

*) La démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles, indépendente de la théorie des imaginaires, laquelle exige des conditions restrictives speciales, a été donnée par Cauchy, et (incomplétement) publiée par Moigno *Leçons de calcul diff. et de calcul intégral*, 1844, Vol. 2⁰, p. 385—454 et 513—534. Elle suppose l'existence et la continuité des dérivées partielles des φ par rapport aux x. Elle a été ensuite donnée par diverses auteurs, sous des conditions restrictives quelque peu différentes, et dont nous parlerons dans la suite.

Première partie.

§ a.

Explication des signes

K (*classe*), $\cap$ (*et*), $\cup$ (*ou*), $-$ (*non*), ε (*est*), $=$ (*est égal*), $\supset$ (*est contenu* ou *on déduit*), Λ (*rien* ou *absurde*).*)

1. Nous écrirons K au lieu du mot *classe* (variété, ensemble d'êtres quelconques, *Klasse*).

Si a, b, c sont des K, alors:

2. $a \cap b \cap c$ signifie «la classe commune à a, b, c».
3. abc „ «$a \cap b \cap c$» lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité à craindre.
4. $a \cup b \cup c$ „ «la plus petite classe contenante les a, b et c».
5. $-a$ „ «la classe des non a».
6. $x \varepsilon a$ „ «x est un a».
7. $x, y \varepsilon a$ „ «x et y sont des a».
8. $a = b$ „ «les classes a et b sont identiques».
9. $a \supset b$ „ «la a est contenue dans la b» ou «tout a est b».
10. Λ „ «rien» ou «la classe nulle». Ainsi $ab = \Lambda$ signifie «nul a est b».

Si a, b, c sont des propositions, alors

11. $a \cap b \cap c$ signifie «l'affirmation simultanée des propositions a, b, c».
12. abc „ «$a \cap b \cap c$».
13. $a \cup b \cup c$ „ «une au moins des a, b, c est vraie».
14. $-a$ „ «la négation de a». Si la proposition a contient un des signes de relation $\supset$, $=$, ε, etc. il est plus commode d'écrire le signe de négation $-$ avant le signe de relation. Ainsi nous écrirons $a - = b$ au lieu de $-(a = b)$, et $x - \varepsilon a$ au lieu de $-(x \varepsilon a)$ ou $x \varepsilon - a$. Ainsi, si a et b sont des K, $ab - = \Lambda$ signifie «quelque a est b».

---

*) On doit à Boole l'étude des opérations et relations de Logique. Ces questions ont été ensuite étudiées par plusieurs Auteurs. Voir l'intéressant ouvrage

E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exacte Logik*), Leipzig, 1890;

dont le premier volume vient de paraître.

J'ai déjà réduit en formules les propositions de quelques théories, dans mes *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Turin 1889;

Principii di Geometria, logicamente esposti, Turin 1889;

Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules, (Mathesis, t. X);

publications auxquelles je renvoie le Lecteur pour des plus amples explications. Le signe ε est la lettre initiale de *ἐστί*; les signes $\supset$ et Λ sont les initiales renversées des mots *contient* et *vrai*.

15. $a = b$ signifie «les propositions a et b sont équivalentes».

16. $a \supset b$ „ «de la a on déduit b» ou «si a, alors b».

17. Λ „ «absurde». Ainsi $a - b = \Lambda$ signifie $a \supset b$.

Si a, b sont des propositions contenantes des lettres indéterminées $x, y, \ldots$ alors:

18. $a \supset_x b$ signifie «quelque soit x, de a on déduit b».

19. $a \supset_{x,y} b$ „ «Si x, y satisfont à la a, ils satisfont aussi à la b».

20. $a =_x b$ „ «pour toutes les valeurs de x, les propositions a et b sont équivalentes».

21. $a -=_x \Lambda$ signifie «la condition a n'est pas, en regard de x, absurde» ou «il y a des x qui satisfont à la condition a».

Nous séparerons les différentes parties d'une formule au moyen des parenthèses, selon l'usage. Mais, pour séparer les propositions partielles d'un théorème, on adoptera les points . : ∴ :: etc. Pour lire une formule divisée par des points, on unira d'abord les signes qui ne sont pas séparés par des points, puis ceux qui le sont par un, puis ceux qui le sont par deux, etc. Ainsi

$ab \,.\, cd : ef \,.\, g \therefore h \,.\, kl$ signifie $\{[(ab)\,(cd)]\,[(ef)g]\}\,[h(kl)]$.

Lorsqu'une formule n'est pas contenue dans une seule ligne, elle se continue dans la suivante, un peu à droite.

Exemples.

1. 3ε «Nombre premier».
2. «Multiple de 6» $\supset$ «Multiple de 2».
3. «Multiple de 6» $=$ «Multiple de 2» $\cap$ «Multiple de 3».

Dans les exemples suivants, au lieu des mots «quantité réelle» nous écrirons q. (Voir le § b).

4. $a, b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, ab = ba$.

«Si a et b sont des quantités (réelles), on a $ab = ba$». Ici les points divisent la proposition en hypothèse, signe de deduction, et thèse.

5. $a, b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a^2 + b^2 = 0 : \supset : a = 0 \,.\, b = 0$.

6. $a, b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, ab = 0 : \supset : a = 0 \,.\cup.\, b = 0$.

7. $a, b, c \varepsilon \mathrm{q} \,.\, c - = 0 : \supset : ac = bc \,.=.\, a = b$.

Dans les ex. 5, 6, 7 les : divisent les propositions en trois parties; les hypothèses et thèses sont complexes; la thèse de 7 est l'égalité logique entre deux égalités algébriques.

Quelquefois il convient de considérer la formule ternaire $a \supset b$ comme un composé binaire de a et $\supset b$, ou de $a \supset$ et b.

8. $a, b, x, y \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \therefore x + y = a \,.\, x - y = b : = : 2x = a + b \,.\, 2y = a - b$.

Ici le signe $\therefore$ décompose la proposition en deux parties; la première est formée de l'hypothèse et du signe de deduction. La partie qui suit $\therefore$ est la thèse; elle est décomposée par les : en trois parties, les deux membres d'une égalité logique, et le signe d'égalité.

9. $a, b, c, a', b', c' \varepsilon \mathrm{q} : x \varepsilon \mathrm{q} . \supset_x . ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$
$\therefore \supset : a = a' . b = b' . c = c'.$

«Étant a, b, c, a', b', c' des nombres, si, quelque soit le nombre x, les deux trinômes $ax^2 + \cdots$ et $a'x^2 + \cdots$ sont égaux, alors . . .».

10. $a, b \varepsilon \mathrm{q} . \supset :: x \varepsilon \mathrm{q} . x^2 + ax + b = 0 : - =_x \Lambda . \therefore = . a^2 - 4b \geq 0.$

«Si a et b sont des nombres réels, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une racine réelle de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ est $a^2 - 4b \geq 0$».

11. $a, b, a', b' \varepsilon \mathrm{q} . \supset \therefore : x, y \varepsilon \mathrm{q} . ax + by = 0 . a'x + b'y = 0 : x = 0 . \cup . y = 0 . \therefore - =_{x,y} \Lambda : : = . ab' - a'b = 0.$

12. $a, b, c \varepsilon \mathrm{q} . a > 0 . l \varepsilon \mathrm{q} : \supset . \therefore : m \varepsilon \mathrm{q} . \therefore x \varepsilon \mathrm{q} . x > m : \supset_x . ax^2 + bx + c > l : : - =_m \Lambda.$

«Soient a, b, c des quantités, dont la première positive; soit l une nouvelle quantité. Alors il existe un nombre m tel que, pour toutes les valeurs de x supérieures à m, soit $ax^2 + bx + c > l$»; ou «$ax^2 + bx + c$ devient infini en même temps que x».

Les notations ci dessus expliquées suffisent pour exprimer toutes les relations de logique entre individus, classes et propositions, lesquelles dans le langage commun sont representés par un très grand nombre de mots. Toutes les propositions d'une science quelconque peuvent s'exprimer au moyen de ces notations, et des mots qui représentent les êtres de cette science. Elles seules suffisent pour exprimer les propositions de Logique pure. Nous en écrirons ici quelques unes, comme exercice:

1. $a \varepsilon \mathrm{K} . \supset . a \supset a$ {quod est, est},

2. $a, b, c \varepsilon \mathrm{K}. a \supset b. b \supset c : \supset . a \supset c$ {syllogisme},

3. $a \varepsilon \mathrm{K} . \supset : aa = a. a \cup a = a. - (-a) = a. a - a = \Lambda . a\Lambda = \Lambda . a \cup \Lambda = a.$

4. $a, b \varepsilon \mathrm{K}. \supset : ab = ba. a \cup b = b \cup a. ab \supset a. a \supset a \cup b. - (a \cap b) = (-a) \cup (-b). - (a \cup b) = (-a) \cap (-b).$

5. $a, b, c \varepsilon \mathrm{K}. \supset : (ab)c = a(bc) = abc. (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) = a \cup b \cup c. a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c). a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$

6. $a, b \varepsilon \mathrm{K}. \supset \therefore a \supset b. = : x \varepsilon a. \supset_x . x \varepsilon b.$

La correspondance entre les signes $\cap$, $\cup$, ε, ... et les mots *et*, *ou*, *est*, ... est seulement approchée; car les signes ont toujours la même signification, ce qui n'est pas des mots dans le langage commun.

§ b.

Signes Q, q, θ, $t_0{}^{-}t_1$, q_n, m.

Nous poserons:

1. Q = «quantité positive» ou «nombre positif».
2. q = «nombre réel fini».
3. θ = «les nombres x qui satisfont à la condition $0 \leq x \leq 1$».
4. $t_0{}^{-}t_1$, où t_0 et t_1 sont deux q, = «les nombres compris entre t_0 et t_1, où égaux à l'une des limites». P. ex. on a $\theta = 0{}^{-}1$.
5. q_n = «nombre complexe d'ordre n».*)

On appelle nombre complexe d'ordre n le système de n nombres réels. Nous désignerons par $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le complexe formé des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui s'appellent les élements du complexe. On définit l'égalite de deux complexes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, leur somme et différence, le produit du complexe x par un nombre réel a, le complexe 0, et le *module*, mod x ou mx, du complexe x, comme il suit:

6. $x = y. = : x_1 = y_1 . x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.
7. $x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n)$.
8. $ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$.
9. $0 = (0, 0, \ldots, 0)$.
10. $\mathrm{m}x = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.**)

Si $x \varepsilon$ q, mx réprésente sa valeur absolue.

Les plus importantes propriétés des nombres complexes sont données par les formules suivantes:

11. $x \varepsilon q_n . \supset . x = x$.
12. $x, y \varepsilon q_n . x = y : \supset . y = x$.
13. $x, y, z \varepsilon q_n . x = y . y = z : \supset . x = z$.
14. $x, y \varepsilon q_n . \supset . x + y \varepsilon q_n$.

---

*) Ici les nombres complexes sont introduits seulement pour simplifier les formules, car ils permettent d'écrire une lettre seule et une équation seule au lieu de n lettres ou de n équations. Des propriétés énoncées quelques unes sont évidentes; les autres sont démontrées dans ma Note *Intégration par séries des équations différentielles linéaires*, Math. Ann. XXXII, p. 450.

**) On pourrait aussi définir par mx, la plus grande des valeurs absolues des élements de x; alors les propriétes des modules sont presqu' évidentes.

15. $x, y \varepsilon q_n . \supset . x + y = y + x.$
16. $x, y, z \varepsilon q_n . \supset . (x+y) + z = x + (y+z) = x + y + z.$
17. $x, y, z \varepsilon q_n . x = y : \supset . x + z = y + z.$
18. $x \varepsilon q_n . a \varepsilon \dot{q} : \supset . ax \varepsilon q_n .$
19. $x, y \varepsilon q_n . a \varepsilon q : \supset . a(x+y) = ax + ay.$
20. $x \varepsilon q_n . a, b \varepsilon q : \supset . (a+b)x = ax + bx.$
21. $\quad\quad\quad\quad : \supset . b(ax) = (ba)x = bax.$
22. $x \varepsilon q_n . \supset : x - x = 0 . x + 0 = x . 1x = x.$
23. $x \varepsilon q_n . \supset : mx \varepsilon Q . \supset . mx = 0.$
24. $x, y \varepsilon q_n . \supset . m(x+y) \leq mx + my,$
25. $a \varepsilon q . x \varepsilon q_n : \supset m(ax) = (ma)(mx).$
26. $m0 = 0.$

On définit aussi la limite a d'un complexe variable x, et l'on a:

27. $\lim x = a . = . \lim m(x - a) = 0.$

On définit la dérivée d'un complexe x fonction d'un variable réelle t, et l'on a:

28. $\frac{d}{dt} mx \leq m \frac{dx}{dt}.$

§ c.

Fonctions; inversion.

1. Dans la formule $f(x)$, ou fx, pour désigner une fonction de x, la lettre f s'appelle *signe* (ou *caractéristique*) *de fonction.*

2. Si a et b sont des K, par b/a nous indiquerons «les signes de fonction qui à chaque a font correspondre un b», ou «les représentations (*Abbildungen*) des a dans les b».

3. Si a, b sont des K, et $f \varepsilon b/a$, nous indiquerons, avec M. Dedekind*) par $\bar{f}$ le signe de la *fonction inverse* (*umgekehrte Abbildung*) de f. Donc, si $y \varepsilon b$, $\bar{f} y$ désigne la classe des x qui satisfont à la condition $y = fx$. On a:

$$y = fx . = . x \varepsilon \bar{f} y.$$

Lorsqu'il y a un seul x qui satisfait à la relation $y = fx$, ce qui arrive pour les *représentations semblables* (*ähnliche Abbildungen*), on a

$$y = fx . = . x = \bar{f} y.$$

*) *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig 1888, p. 8. L'Auteur adopte l'inversion seulement pour les représentations semblables. Dans mes *Arith. principia* et *Principii di Geom.* par commodité typographique, au lieu de $\bar{f}$, j'écris $[f]$.

4. En appliquant l'inversion à l'opération indiquée par m (module), si p est une Q, $\overline{\text{m}}p$ indique les complexes d'ordre quelconque dont le module est p.

$$p \in \text{Q} . x \in \text{q}_n : \supset : \text{m}x = p \cdot = \cdot x \in \overline{\text{m}}p.$$

Pour indiquer «les complexes d'ordre n et de module p» il suffit d'écrire $\text{q}_n \cap \overline{\text{m}}p$; mais nous écrirons seulement $\overline{\text{m}}p$, car dans cette Note il s'agit toujours des complexes du même ordre.

5. Si p est une proposition contenante une lettre (variable) x, il résulte déterminée une classe s formée des individus x qui verifient la condition p; et l'on a

$$x \in s \cdot = \cdot p.$$

Considérons le signe «$x \in$» comme un signe de fonction; on peut résoudre cette égalité par rapport à s, et l'on a

$$s = \overline{x \in} p.$$

Donc, $\overline{x \in} p$ signifie «les x qui satisfont à la condition p» ou «les racines de l'équation p».

Par ex. la déf. 3. du § b s'énonce

$$\theta = \text{q} \cap \overline{x \in}(0 \leq x \leq 1).$$

La déf. 3 de ce § s'énonce:

$$a, b \in \text{K} . f \in b/a . y \in b : \supset . \breve{f}\, y = \overline{x \in}(y = fx).$$

6. Si $a, b \in \text{K}$, et $f \in b/a$, si s est une K contenue dans a, alors, suivant M. Dedekind*), fs indique la classe des b qui sont l'f de quelque s; en signes:

$$a, b, s \in \text{K} . f \in b/a . s \supset a : \supset . fs = \overline{y \in}[x \in s . y = fx : - =_x \Lambda].$$

Nous généralisons un peu cette notation; si dans une formule qui contient dans une seule place une lettre x, nous substituons à x le nom a d'une classe, on obtient l'ensemble des valeurs de cette formule, lorsque x prend toutes les valeurs de la classe a.

Exemples:

$a \in \text{q} . \supset . a + \text{Q} =$ «les nombres supérieurs à a»,

„ $a - \text{Q} =$ «les nombres inférieurs à a»,

„ $a \pm \text{Q} = \text{q} \cap \overline{x \in}[x > a . \cup . x < a]$,

$a, b \in \text{q} . a < b : \supset . (a + \text{Q}) \cap (b - \text{Q}) = \text{q} \cap \overline{x \in}(a < x < b)$.

Il faut distinguer $(a+\text{Q}) \cap (b-\text{Q})$ de $a^- b$, défini dans le § b, prop. 4:

$a, b \in \text{q} . \supset . a^- b = a + \theta(b - a)$.

Ces deux expressions représentent l'intervalle (a, b) l'une sans, l'autre avec les points extrêmes.

*) Ib. p. 6.

7. Si a est une classe, par la convention précédente, Ka, ou $K \cap a$ représente l'ensemble des classes xa, ou x est une K quelconque. Mais, en variant x, xa représente toute classe contenue dans a; donc

$a \varepsilon K . \supset . Ka =$ «classes contenues dans a» ou «classes de a».

Ainsi Kq signifie «classe de q»; et Kq_n signifie «ensemble de q_n» ou »Punktmenge».

Par la répétition du signe K on obtient KKq_n (dont nous nous servons seulement dans §e P 9 (4) et (5)) qui signifie «classe de classes de q_n» ou «nom commun de plusieurs ensembles de points» ou «propriété que des ensembles de points peuvent avoir».

8. Si le signe f fait correspondre, à chaque individu de la classe a, une classe de b, et si s est une classe contenue dans a, alors fs indique la classe des b qui sont un f de quelque s; en signes

$$a, b \varepsilon K . f \varepsilon (Kb)/a . s \varepsilon Ka : \supset . fs = \overline{y \varepsilon} [x \varepsilon s . y \varepsilon fx : - =_x \Lambda].$$

Ainsi, si $a \varepsilon KQ$, $\overline{m}a$ signifie «les q_n qui ont pour module quelque a».

$x \varepsilon q_n . p \varepsilon Q : \supset . x + \overline{m}\theta p = x + \theta \overline{m} p =$ «les q_n dont la différence à x a un module non supérieur à p».

$$x \varepsilon q_n . p, p' \varepsilon Q . y \varepsilon x + \theta \overline{m} p . z \varepsilon y + \theta \overline{m} p' : \supset . z \varepsilon x + \theta \overline{m}(p + p').$$

§ c'.

Observations sur le § c.

1. Dans le § précédent nous avons introduit quelques notations, et expliqué les cas particuliers, dont on fera usage dans cette Note. Mais il n'est pas inutile de donner quelques autres explications sur cette importante théorie.

L'idée de fonction (correspondance, opération) est primitive; on peut la considérer comme appartenante à la Logique. Comme exemple pris du langage commun, posons $h =$ «homme», $p =$ «le père de»; on a $p \varepsilon h/h$.

Dans l'Analyse on a $\log \varepsilon q/Q$, $\sin \varepsilon q/q$; mais on n'a pas $\operatorname{tang} \varepsilon q/q$, car $\operatorname{tang} \frac{\pi}{2}$ n'est pas une q.

2. Par «(b/a) continue» nous entendons les b/a qui ont la proprieté de la continuité. Cette proprieté est définie seulement pour les fonctions réelles d'une variable réelle, et pour les complexes d'ordre m fonctions des complexes d'ordre n. Le théorème de la continuité uniforme s'enonce:

$$x_0, x_1 \varepsilon q . f \varepsilon (q/x_0{}^{-}x_1) \text{ continue. } h \varepsilon Q : \supset \therefore k \varepsilon Q . \therefore x, x' \varepsilon x_0{}^{-}x_1 .$$
$$m(x - x') < k : \supset_{x,x'} . m(fx - fx') < h : : - =_k \Lambda.$$

La proprieté fondamentale des signes de fonction est

$$a, b \varepsilon \mathrm{K} . f \varepsilon b/a . x \varepsilon a : \supset . fx \varepsilon b.$$

Lorsqu'on dit que $f \varepsilon b/a$, on n'exclut pas que l'opération f soit aussi définie pour des êtres non appartenants à la classe a:

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{K} . f \varepsilon b/a . c \supset a : \supset . f \varepsilon b/c.$$

Lorsqu'on dit que $f \varepsilon b/a$, on ne suppose pas que tout b soit l'f de quelque a:

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{K} . f \varepsilon b/a . b \supset c : \supset . f \varepsilon c/a.$$

On a aussi:

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{K} . f \varepsilon c/a . f \varepsilon c/b : \supset . f \varepsilon c/(a \cup b).$$

3. Lorsque f est une ähnliche Abbildung, on a:

$$x = \overline{f}\, fx, \quad \text{et} \quad y = f\overline{f}\, y.$$

Ainsi p. ex. si $x \varepsilon \mathrm{Q}$, et $y \varepsilon \mathrm{q}$, on a:

$y = \log x . = . x = \overline{\log}\, y$; $\overline{\log}\, y = e^y$; $\overline{\log} \log x = x$; $\log \overline{\log}\, y = y$.

Dans toute formule algébrique ou logique finissant par une lettre x, on peut considerer l'ensemble des signes qui précédent x comme un signe de fonction. Ainsi, si x, a, b sont des q, de

$$b = a + x, \quad \text{on a} \quad x = \overline{a +}\, b, \quad \text{au lieu de} \quad x = b - a,$$

$$b = a \times x, \quad \text{on a} \quad x = \overline{a \times}\, b, \quad \text{au lieu de} \quad x = \frac{b}{a}.$$

(On ne peut pas appliquer cette notation aux puissances a^b, car les deux lettres ne se trouvent pas dans la même ligne. On peut imaginer des conventions analogues, lorsque une formule commence par une lettre x. Voir mes *Arith. principia* pag. XIII).

Ces conventions sont analogues à celle dont ont a fait usage pour établir la formule

$$x \varepsilon s \cdot = \cdot p : = : s = \overline{x \varepsilon}\, p.$$

On a ainsi

$$\overline{x \varepsilon}\, (x \varepsilon s) = s$$

(«qui est bonus» = «bonus»),

$$x \varepsilon (\overline{x \varepsilon}\, p) = p$$

(«x est une racine de l'equation tang $x = x$» signifie «tang $x = x$»).

4. Lorsque f n'est pas semblable, $\overline{f}y$ est une classe. On a alors $y = f\overline{f}\, y$, et $x \varepsilon \overline{f} fx$; il serait contraire à nos conventions d'écrire $x = \overline{f} fy$. Ainsi, si l'on pose, $h =$ «homme», $p =$ «le père de», on a $p \varepsilon h/h$ non semblable, et l'on a:

$$y = px \cdot = \cdot x \varepsilon \bar{p} y$$

«y est le père de x» = «x est un fils de y».

Analoguement

$$y = \sin x \cdot = \cdot x \varepsilon \overline{\sin} y,$$

au lieu de $x = \arcsin y$.

$$x \varepsilon \overline{\sin} \sin x$$

«x est un des arcs dont le sinus est $\sin x$».

5. Mais, si les conventions adoptées suffisent pour notre but, elles ne résolvent pas encore en général le problème de l'inversion. Soit en effet f le signe d'une fonction, qui à chaque individu x d'une certaine classe fait correspondre une classe fx. On aura à considerer les deux relations

$$y = fx \quad (y \text{ est la classe } fx;\ y \text{ est identique à } fx),$$
$$y \varepsilon fx \quad (y \text{ est un individu de la classe } fx).$$

En vertu de la convention adoptée, on peut invertir la première, et l'on a $x \varepsilon \overline{f} y$. Pour résoudre la seconde par rapport à x, il faut une convention nouvelle. Posons $x \varepsilon f' y$. Alors on a:

$$\overline{f} y = \overline{x \varepsilon} (y = fx) = \text{«les individus } x \text{ tels que la classe } fx \text{ est } y\text{»},$$
$$f' y = \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon fx) = \text{«les individus } x \text{ tels que } y \text{ est un } fx\text{»}.$$

Par exemple, x étant une classe de q, designons par $\mathrm{D}x$ la classe dérivée (suivant M. Cantor) de x, et dont nous parlerons au §d. Alors $y = \mathrm{D}x$ (y est la classe dérivée de x), s'invertit par $x \varepsilon \overline{\mathrm{D}} y$ (x est une classe dont la dérivée est y); on ne peut pas écrire $x = \overline{\mathrm{D}} y$, car, dans des hypothèses convenables, il y a une infinité de classes dont la dérivée est x. Et la relation $y \varepsilon \mathrm{D}x$ (y est un point de la dérivée de x), s'invertit par $x \varepsilon \mathrm{D}' y$ (x est une classe dont la dérivée contient y).

J'ai adopté ce second signe d'inversion dans mes *Principii di Geometria*, pag. 9. Soient a, b, c des points; désignons par ab l'ensemble des points du sègment rectiligne ab; alors $c \varepsilon ab$ signifie «c est un point de ab». On peut considérer, dans ab, le signe a, qui précéde b, comme un signe de fonction, qui à chaque point b fait correspondre une classe ab de points. En résolvant la relation $c \varepsilon ab$ par rapport à b on a $b \varepsilon a'c$; donc $a'c$ désigne celle des deux parties indéfinies de la droite ac, divisée en c, laquelle ne contient pas le point a. La formule $\bar{a}c$ provient de l'inversion de $c = ab$, et en supposant a et b des points, c est un segment dont une extremité est en a; et alors $\bar{a}c$ représente l'autre extremité du segment c.

Des deux signes d'inversion $\overline{f}$ et f', on ne peut pas exprimer le second par le premier, mais on peut exprimer le premier au moyen du second et d'une nouvelle convention nécessaire dans d'autres récherches. Décomposons en effet le signe $=$ en ses deux parties *est*

et *égal à*; le mot *est* est dejà répresenté par ε; répresentons aussi l'expression *égal à* par un signe, et soit ι (initial de $\tilde{\iota}\sigma o\varsigma$) ce signe; ainsi au lieu de $a = b$ on peut écrire $a \varepsilon \iota b$. Alors, si l'on inverte la $y \varepsilon f x$ par $x \varepsilon f' y$, ou invertira $y = fx$, c'est-à-dire $y \varepsilon \iota f x$ par $x \varepsilon (\iota f)' y$. Par ex., si y est un q, D'y signifie «les classes dont la dérivée contient le point y»; et $(\iota \mathrm{D})' y$ signifie «les classes dont la dérivée se réduit à y.»

6. Le signe ι permet aussi de résoudre une autre question. On peut considérer une classe comme étant un individu, et ainsi former des classes de classes (KK). P. ex. si a est un point, b une droite, et c un faisceau de droites, dans les propositions $a \varepsilon b$, «a est un individu (point) de b», et $b \varepsilon c$, «b est un individu (rayon) de c», la lettre b designe d'abord une classe, puis un individu de la classe c, la quelle est une KK de points.

Les formes du syllogisme

$$a \supset b \,.\, b \supset c : \supset \,.\, a \supset c,$$
$$a \varepsilon b \,.\, b \supset c : \supset \,.\, a \varepsilon c$$

sont exactes; mais des premisses $a \varepsilon b \,.\, b \varepsilon c$ on ne peut pas tirer de consequence. On voit aussi plus clairement qu'on doit bien distinguer les deux signes ε et $\supset$.

On peut aussi considérer les KK comme des individus; leurs classes sont des KKK; et ainsi à l'infini; mais l'on s'arrête bientôt dans le langage commun et dans les applications.

Pour indiquer la classe constituée des individus a et b on écrit quelquefois $a \cup b$ (ou $a + b$, en suivant la notation plus usitée). Mais il est plus correct d'écrire $\iota a \cup \iota b$; alors, par l'identité logique

$$x \varepsilon a \cup b : = : x \varepsilon a \,.\, \cup\, x \varepsilon b :$$

on a exactement:

$$x \varepsilon \iota a \cup \iota b : = : x \varepsilon \iota a \,.\, \cup \,.\, x \varepsilon \iota b : = : x = a \,.\, \cup \,.\, x = b.$$

Cette distinction est nécessaire lorsque a et b sont des classes; alors $a \cup b$, en vertu de la notation 4 du §a désigne la classe dont les individus sont les individus de a ou de b; $\iota a \cup \iota b$ désigne la classe dont les individus sont a et b. Si a et b sont des droites (ponctuelles), $a \cup b$ désigne l'ensemble des points qui se trouvent sur l'une ou sur l'autre des droites a et b; $\iota a \cup \iota b$ désigne la couple des droites a et b; les individus de $a \cup b$ sont des points; ceux de $\iota a \cup \iota b$ sont des droites.

La formule 23 du §b pourra aussi s'écrire

$$x \varepsilon \mathrm{q_n} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{m}x \varepsilon (\mathrm{Q} \cup \iota 0)$$

ou

$$\mathrm{m} \varepsilon (\mathrm{Q} \cup \iota 0) / \mathrm{q_n}.$$

7. Les deux définitions, données aux N. 6 et 8, de fs, où s est une classe, la première appliquable si f fait correspondre un individu à chaque individu, la deuxième si f fait correspondre une classe à chaque individu, sont bien distinctes. Ainsi, si $x \varepsilon \mathrm{Q}$, $\overline{\mathrm{m}}x$ désigne l'ensemble des $\mathrm{q_n}$, dont le module est x, ou, si l'on adopte le langage géometrique, la surface sphérique de centre l'origine et de rayon x. Alors, par la notation du N. 8, on a

$$\overline{\mathrm{m}}\theta = \overline{y\varepsilon}(x \varepsilon \theta \,.\, y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda),$$

ou, en opérant sur les deux membres par le signe $y\varepsilon$, on a:

$$y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}\theta \cdot = \therefore x \varepsilon \theta \,.\, y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda,$$

«affirmer que y est un $\overline{\mathrm{m}}\theta$ signifie qu'il y a un nombre x, appartenant à l'intervalle θ, tel que y ait pour module ce x». Donc $\overline{\mathrm{m}}\theta$ désigne l'ensemble des $\mathrm{q_n}$ dont le module n'est pas supérieur à l'unité, ou la sphère (volume) de rayon 1; elle est une $\mathrm{Kq_n}$.

Mais si l'on attribue à $\overline{\mathrm{m}}\theta$ la signification donnée au N. 6 on a:

$$\overline{\mathrm{m}}\theta = \overline{y\varepsilon}(x\varepsilon\theta \,.\, y = \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda)$$

ou

$$y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}\theta \cdot = \therefore x \varepsilon \theta \,.\, y = \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda$$

«affirmer que y est un $\overline{\mathrm{m}}\theta$ signifie qu'il existe un x, dans l'intervalle θ, tel que y soit identique à la surface sphérique de rayon x». Donc, par le convention du N. 6, $\overline{\mathrm{m}}\theta$ désigne l'ensemble des surfaces sphériques dont le rayon n'est pas supérieur à l'unité. Les individus de $\overline{\mathrm{m}}\theta$ sont maintenant des surfaces sphériques, et $\overline{\mathrm{m}}\theta$ est une $\mathrm{KKq_n}$.

8. Les notations du N. 6 et 8 ne donnent pas, dans cette Note, lieu à des difficultés, qui se pourraient présenter dans d'autres cas. Car, lorsque on donne à fs une signification, il faut d'abord s'assurer qu'elle n'a pas dejà reçu une signification différente. Ensuite, lorsque f fait correspondre une classe à des individus, il est nécessaire de distinguer si l'on entend par fs ce qu'on a défini au N. 8, ce qui se présente ordinairement, ou si l'on entend la classe des classes qui résulte du N. 6, et qu'on doit étudier dans quelques cas.

Pour éviter ces difficultés, désignons p. ex. par $\underset{\sim}{fs}$ la classe définie au N. 8; c'est-à-dire posons

$$\underset{\sim}{fs} = \overline{y\varepsilon}(x \varepsilon s \,.\, y \varepsilon fx : - =_x \Lambda).$$

Alors la classe considérée au N. 6 résulte indiquée par $\underset{\sim}{\iota fs}$; car, si dans la définition qui précede on écrit ιf au lieu de f, et $y = fx$ au lieu de $y \varepsilon \iota x$, on a:

$$\underset{\sim}{\iota fs} = \overline{y\varepsilon}(x \varepsilon s \,.\, y = fx : - =_x \Lambda).$$

On pourra supprimer les signes $\smile$ et ι, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité à craindre, et l'on retrouve les définitions des N. 6 et 8.

Par ex., si, étant x un q_n (un point dans la varieté à n dimensions), on désigne par px la droite qui projette x d'un point fixe alors, si y est une droite (ponctuelle) quelconque, on a:

$\underset{\smile}{p}y =$ «le plan qui projette la y». Il est une Kq_n.

$\iota\underset{\smile}{p}y =$ «le faisceau des rayons qui projettent les points de y». Il est une KKq_n, dont les individus sont des droites.

Si ε est un faisceau de droites,

$\underset{\frown}{p}\varepsilon =$ «la varieté à 3 dimensions qui projette le plan de ε». Elle est une Kq_n.

$\iota\underset{\frown}{p}\varepsilon =$ «l'ensemble (étoile) des droites qui projettent les points du plan de ε». Il est une KKq_n, dont les individus sont des droites.

$\iota\underset{\smile}{p}\varepsilon =$ «le faisceau des plans qui projettent les droites de ε». Il est une KKq_n, dont les individus sont des plans.

$\iota\iota\underset{\smile}{p}\varepsilon =$ «l'ensemble des faisceaux de droites qui projettent les droites de ε». Il est une $KKKq_n$, dont les individus sont des faisceaux de droites.

§ d.

Signes l′, l_1, max, min, C.

P, Hp, Ts; substitution.

Notations.

1. $a \varepsilon Kq \,.\, \supset .\, l'a =$ «la limite supérieure des a».
2. „ $\,.\supset .\, l_1 a =$ « „ inférieure „ ».
3. $a,b \varepsilon q \,.\, \supset .\, \max(a,b) =$ «le plus grand des deux nombres a et b».
4. „ $\,.\supset .\, \min(a,b) =$ « „ petit „ „ „ „ ».

Ainsi p. ex. $l'0 = 1$, $l_1 0 = 0$, $l_1 Q = 0$. Les théorèmes connus qui permettent de reconnaitre l'existence des limites l′ et l_1 s'énoncent:

5. $a \varepsilon Kq \,.\, a - = \Lambda \,.\, p \varepsilon q \,.\, a \cap (p + Q) = \Lambda : \supset .\, l'a \varepsilon q.$

«Si a est une classe de nombres réels, non nulle, et si il y a un nombre p, tel que des nombres de la classe a, et supérieurs à p n'existent point, alors la limite supérieure des a est un nombre réel et fini.»

5′. $a \varepsilon Kq \,.\, a - = \Lambda \,.\, p \varepsilon Q \,.\, a \cap (p - Q) = \Lambda : \supset .\, l_1 a \varepsilon q.$

6. $a, b \varepsilon Kq \,.\, a \supset b : \supset : l'a \leq l'b \,.\, l_1 a \geq l_1 b.$

7. $a \varepsilon Kq_n \,.\, x \varepsilon a : \supset .\, l_1 m\,(a - x) = 0.$

«Si a est une classe de complexes d'ordre n et si x est un de ces nombres, la limite inférieure des modules des différences entre x et les différents nombres a est 0». Car $0 \varepsilon \mathrm{m}(a - x)$, c'est-à-dire une des modules de ces différences est précisément 0.

$a \varepsilon \mathrm{K}q_n \cdot \supset : \mathrm{l'm}\, a \varepsilon \mathrm{q} \cdot = \cdot$ «la classe a est *finie*».

Définition.

8. $a \varepsilon \mathrm{K}q_n \cdot \supset \cdot \mathrm{C}a = q_n \cap \overline{x \varepsilon} [\mathrm{l}_1 \mathrm{m}(a - x) = 0]$.

«Si a est une classe de q_n, par $\mathrm{C}a$ nous entendons l'ensemble des q_n, qui sont des x tels que la limite inférieure des modules des différences entre cet x et les différents a soit nulle».

Si, par «distance du point x à l'ensemble a» on entend la limite inférieure des modules des différences entre x et les a, alors:

$\mathrm{C}a =$ «les points dont la distance à a est nulle».

On peut encore définir $\mathrm{C}a$, sans les mots «limite inférieure» comme suit:

$\mathrm{C}a = q_n \cap \overline{x \varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} \cdot \supset_h \cdot a \cap (x + \theta \overline{\mathrm{m}} h) - = \Lambda)$.

$\mathrm{C}a = q_n \cap \overline{x \varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} \cdot \supset_h \cdot \therefore y \varepsilon a \cdot \mathrm{m}(y - x) < h : - =_y \Lambda]$.

On peut lire $\mathrm{C}a$ par «la classe a completée».

Observations sur la définition 8.

Étant donnée une $\mathrm{K}q_n$, par la considération des infiniment proches, on peut en déduire une infinité d'autres classes. M. Cantor (Math. Ann. XV, p. 1, et XVII, p. 355) a étudié les propriétés du système dérivé. Soit $\mathrm{D}a$ la classe dérivée de a; on peut la définir:

$\mathrm{D}a = q_n \cap \overline{x \varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} \cdot \supset_h \cdot \therefore y \varepsilon a \cdot y - = x \cdot \mathrm{m}(y - x) < h : - =_y \Lambda$.

$\mathrm{D}a = q_n \cap \overline{x \varepsilon} \{\mathrm{l}_1 \mathrm{m}[(a - \iota x) - x] = 0\}$.

(Ici le signe ι a la signification expliquée au § c' N. 5 et 6).

Alors on a

$$\mathrm{C}a = a \cup \mathrm{D}a$$

«la classe $\mathrm{C}a$ est formée des points de a et des points de la classe dérivée de a». Mais la classe $\mathrm{C}a$ a une définition et des proprietés plus simples que celles de $\mathrm{D}a$, comme on voit des théorèmes qui suivent; et elle suffit dans notres applications. La classe $\mathrm{C}a$ est, suivant Cantor, le plus petit ensemble fermé (*clausus*, *abgeschlossene Punktmenge*) contenant a. La proposition $\mathrm{C}a = a$ signifie «l'ensemble a est fermé».

Si a est une classe de q_n, on peut décomposer, comme j'ai fait dans mes *Applicazioni geometriche* p. 153 et dans les *Arithmetices principia* § 10, l'ensemble des q_n en trois classes $\mathrm{I}a$ (intérieur à a), $\mathrm{E}a$ (exterieur à a) et $\mathrm{L}a$ (limite de a), définies par les équations:

$Ia = q_n \cap \overline{x \varepsilon} (p \varepsilon Q . x + \theta \overline{m} p \supset a : - =_p \Lambda) =$ «les complexes x tels qu'on puisse déterminer un nombre positif p de façon que tous les q_n dont la différence à x a un module non supérieur à p soient contenus dans la classe a».

$Ea = I - a =$ «les points intérieurs à la classe des non a».

$La = (- Ia)(- Ea) =$ «les points qui appartiennent ni à l'une ni à l'autre des classes Ia et Ea».

Alors on a:

$Ca = Ia \cup La = - Ea.$

Notations.

9. Nous renfermerons les démonstrations des théoremes dans des { }. Dans ces démonstrations nous adopterons aussi les abréviations suivantes.

10. P1, P2, ... désignent les propositions 1, 2, ... du même §, où elles sont rappellées. §2 P4 désigne la proposition 4 du § 2.

11. Hp et Ts signifient *l'Hypothèse* et la *Thèse* du théorème qu'on démontre. Pour indiquer l'hypothèse d'une autre proposition on fera suivre Hp du signe de la proposition.

12. Pour indiquer ce que dévient une proposition p, lorsque au lieu des lettres x, y (variables) qu'elle contient, on substitue a et b, on écrira $\begin{pmatrix} a, & b \\ x, & y \end{pmatrix} p$. Nous adoptons ainsi le signe connu de substitution, bien qu'on puisse exprimer ce résultat au moyen du signe d'inversion.

Théorèmes.

13. $a \varepsilon Kq_n . \supset . a \supset Ca.$ $\{P7 \supset P13\}.$

14. $a, b \varepsilon Kq_n . a \supset b : \supset . Ca \supset Cb.$
$\{Hp . x \varepsilon Ca : \supset : l_1 m(a - x) \geq l_1 m(b - x) . l_1 m(a - x) = 0 : \supset . x \varepsilon Cb\}.$

15. $a, b \varepsilon Kq_n . \supset . C(ab) \supset (Ca)(Cb).$
$\{Hp . \supset : ab \supset a . ab \supset b . P14 : \supset : C(ab) \supset Ca . C(ab) \supset Cb : \supset . Ts\}.$

16. $a, b \varepsilon Kq_n . Ca = a . Cb = b : \supset . C(ab) = ab.$
$\{Hp . P13 . P15 : \supset : ab \supset C(ab) . C(ab) \supset (Ca)(Cb) = ab : \supset . Ts\}.$

17. $a, b \varepsilon Kq_n . x \varepsilon q_n : \supset . l_1 m[(a \cup b) - x] = \min[l_1 m(a - x), l_1 m(b - x)].$

18. $a, b \varepsilon Kq_n . \supset . C(a \cup b) = Ca \cup Cb.$ $\{P17 \supset P18\}.$

19. $a \varepsilon Kq_n . x \varepsilon q_n : \supset . l_1 m(a - x) = l_1 m(Ca - x).$

20. $a \varepsilon Kq_n . \supset . CCa = Ca.$ $\{P19 \supset P20\}.$

21. $a \varepsilon Kq . l'a, l_1 a \varepsilon q : \supset . l'a, l_1 a \varepsilon Ca.$

22. $a \varepsilon Kq_n . Ca = a . l'ma \varepsilon q . f \varepsilon (q/a)$ continue: $\supset . Cfa = fa.$

§ e.

Limites de classes variables.

Définition.

1. $f \varepsilon (\mathrm{K}q_n)/Q \,.\, \supset . f0 = \lim_{h=0} fh = q_n \cap \overline{x \varepsilon} \left[\lim_{h=0} l_1 m(fh - x) = 0\right]$.

Conséquences immédiates.

2. $f \varepsilon (\mathrm{K}q_n) / Q \,.\, x \varepsilon q_n : h \varepsilon Q \,.\, \supset_h \,.\, x \varepsilon fh \,.\therefore \supset . x \varepsilon f0$.
$\{\mathrm{Hp} \,.\, \supset . l_1 m(fh - x) = 0 \,.\, \supset . \mathrm{Ts}\}$.

3. $f \varepsilon (\mathrm{K}q_n)/Q \,.\, \supset . q_n \cap \overline{x \varepsilon} [h \varepsilon Q \,.\, \supset_h \,.\, x \varepsilon fh] \supset f0$. $\{\mathrm{P2} = \mathrm{P3}\}$.

4. $f \varepsilon (\mathrm{K}q_n) / Q \,.\, a \varepsilon \mathrm{K}q_n \,.\, k \varepsilon Q : h \varepsilon \theta k \,.\, \supset_h \,.\, fh \supset a \,.\therefore \supset . f0 \supset \mathrm{C}a$.
$\{\mathrm{Hp} \,.\, x \varepsilon f0 \,.\, h \varepsilon \theta k : \supset : \lim_{h=0} l_1 m(fh - x) = 0 \,.\, l_1 m(fh - x) \geq l_1 m(a - x) : \supset : l_1 m(a - x) = 0 : \supset : x \varepsilon \mathrm{C}a\}$.

5. $f, g \varepsilon (\mathrm{K}q_n) / Q : h \varepsilon Q \,.\, \supset_h \,.\, fh \supset gh \,.\therefore \supset . f0 \supset g0$.
$\{\mathrm{Hp} \,.\, x \varepsilon f0 \,.\, h \varepsilon Q : \supset : l_1 m(fh - x) \geq l_1 m(gh - x) \,.\, \lim l_1 m(fh - x) = 0 : \supset : \lim l_1 m(gh - x) = 0 : \supset : x \varepsilon g0\}$.

6. $f, g \varepsilon (\mathrm{K}q_n) / Q \,.\, \supset . \lim (fh \cap gh) \supset f0 \cap g0$.
$\{\mathrm{Hp} \,.\, h \varepsilon Q : \supset : fh \cap gh \supset fh \,.\, fh \cap gh \supset gh : \mathrm{P5} : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

6′. $f, f_1, f_2 \varepsilon (\mathrm{K}q_n)/Q : h \varepsilon Q \,.\, \supset_h \,.\, f_1 h \supset fh \supset f_2 h : f_1 0 = f_2 0 \,.\therefore \supset . f0 = f_1 0 = f_2 0$. $\{\mathrm{P5} \supset \mathrm{P6}'\}$.

7. $f \varepsilon (\mathrm{K}q_n) / Q \,.\, \supset . \lim fh = \lim \mathrm{C}(fh)$. $\{\S\mathrm{d}\ \mathrm{P19} \supset \mathrm{P7}\}$.

Théorème.

8. $f \varepsilon (\mathrm{K}q_n) / Q \,.\, \supset . \mathrm{C}(f0) = f0$.

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} \,.\, x \varepsilon \mathrm{C}f0 \,.\, k \varepsilon Q : \supset . \left(x + \theta \overline{\mathrm{m}}\, \tfrac{1}{2} k\right) \cap f0 - = \Lambda$.

(2) $\mathrm{Hp} \,.\, x \varepsilon \mathrm{C}f0 \,.\, k \varepsilon Q \,.\, x' \varepsilon f0 \,.\, x' \varepsilon x + \theta \overline{\mathrm{m}}\, \tfrac{1}{2} k : \supset \,.\therefore h' \varepsilon Q : h \varepsilon \theta h' \,.\, \supset_h \,.\, fh \cap \left(x' + \theta \overline{\mathrm{m}}\, \tfrac{1}{2} k\right) \,.\therefore - =_{h'} \Lambda :: x' + \theta \overline{\mathrm{m}}\, \tfrac{1}{2} k \supset x + \theta \overline{\mathrm{m}} k \,.\therefore \supset :: h' \varepsilon Q : h \varepsilon \theta h' \,.\, \supset_h \,.\, fh \cap (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) - = \Lambda \,.\therefore - =_{h'} \Lambda$.

(3) $\mathrm{Hp} \,.\, x \varepsilon \mathrm{C}f0 \,.\, k \varepsilon Q \,.\, (1) \,.\, (2) : \supset :: h' \varepsilon Q : h \varepsilon \theta h' \,.\, \supset_h \,.\, fh \cap (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) - = \Lambda \,.\therefore - =_{h'} \Lambda$.

(4) $\mathrm{Hp} \,.\, x \varepsilon \mathrm{C}f0 \,.\, (3) : \supset . x \varepsilon f0$.

(5) $\mathrm{Hp} \,.\, (4) : \supset . \mathrm{C}f0 \supset f0$.

(6) $\mathrm{Hp} \,.\, (5)$. §d P13 $\supset$. Ts.$\}$

Théorème.

9. $f \varepsilon (\mathrm{Kq_n})/\mathrm{Q} . \therefore h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k : \supset_{h,k} . fh \supset fk . \therefore p \varepsilon \mathrm{Q} : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . fh \cap \theta \overline{\mathrm{m}} p - = \Lambda :: \supset . f0 - = \Lambda.$

Démonstration.

(1) $\mathrm{Hp} . c \varepsilon \mathrm{Kq_n} . h \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda . k \varepsilon \theta h : \supset . c \cap fk = \Lambda.$

(2) $\mathrm{Hp} . c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} . h, h' \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda . c' \cap fh' = \Lambda . h'' \varepsilon \mathrm{Q} \cap \theta h \cap \theta h' : \supset . (c \cup c') \cap fh'' = \Lambda.$ $\{(1) \supset (2)\}.$

(3) $\mathrm{Hp} . c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} : \supset . \therefore h \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda : - =_h \Lambda . \therefore h' \varepsilon \mathrm{Q} . c' \cap fh' = \Lambda : - =_{h'} \Lambda :: = . \therefore h'' \varepsilon \mathrm{Q} . (c \cup c') \cap fh'' = \Lambda : - =_{h''} \Lambda.$ $\{(2) \supset (3)\}.$

(4) $\mathrm{Hp} . u = \mathrm{Kq_n} \cap \overline{c\varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda : =_h \Lambda] . (3) : \supset . \therefore u \varepsilon \mathrm{KKq_n} :: c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} . \supset_{c,c'} . \therefore c \cup c' \varepsilon u . = : c \varepsilon u . \cup . c' \varepsilon u :: \theta \overline{\mathrm{m}} p \varepsilon u.$

(5) $u \varepsilon \mathrm{KKq_n} :: c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} . \supset_{c,c'} . \therefore c \cup c' \varepsilon u . = : c \varepsilon u . \cup . c' \varepsilon u :: s \varepsilon u . \mathrm{l'm} s \varepsilon \mathrm{q} . \therefore \supset :: x \varepsilon \mathrm{C}s : k \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_k . x + \theta \overline{\mathrm{m}} k \varepsilon u . \therefore - =_x \Lambda.$

{Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Ann. XXIII, p. 454}.

(6) $\mathrm{Hp} . u = \mathrm{Kq_n} \cap \overline{c\varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . c \cap fh - = \Lambda] . (4) . (5) : \supset :: x \varepsilon \theta \overline{\mathrm{m}} p : k \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_k . x + \theta \overline{\mathrm{m}} k \varepsilon u . \therefore - =_x \Lambda.$

(7) $\mathrm{Hp} . (6) : \supset . \therefore x \varepsilon \theta \overline{\mathrm{m}} p . \therefore k \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_k : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) \cap fh - = \Lambda :: - =_x \Lambda.$

(8) $\mathrm{Hp} . (7) : \supset :: x \varepsilon \theta \overline{\mathrm{m}} p : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . \mathrm{l_1 m}(fh - x) = 0 . \therefore - =_x \Lambda.$

(9) $\mathrm{Hp} . (8) : \supset : x \varepsilon f0 . - =_x \Lambda.$

$\mathrm{Hp} . (9) : \supset . \mathrm{Ts}.$

Théorèmes.

10. $f \varepsilon (\mathrm{Kq_n})/\mathrm{Q} . \therefore h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k : \supset_{h,k} fh \supset fk . \therefore h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . fh - = \Lambda . \therefore h \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{l'm} fh \varepsilon \mathrm{q} : - =_h \Lambda :: \supset . f0 - = \Lambda.$ $\{\mathrm{P9} \supset \mathrm{P10}\}.$

11. $f \varepsilon (\mathrm{Kq_n})/\mathrm{Q} . \therefore h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k : \supset_{h,k} . \mathrm{C}fh \supset fk :: \supset . f0 = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . x \varepsilon fh].$

{(1) $\mathrm{Hp} . h \varepsilon \mathrm{Q} . h' \varepsilon \mathrm{Q} . h' < h : \supset . \therefore k \varepsilon \theta h' . \supset_k . fk \supset fh' : \mathrm{P4} . \therefore \supset . \therefore f0 \supset \mathrm{C}fh' . \mathrm{C}fh' \supset fh . \therefore \supset . \therefore f0 \supset fh.$

(2) $\mathrm{Hp}\,.\,(1) : \supset . f0 \supset \mathrm{q_n} \cap \overline{x\varepsilon}[h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h \,.\, x \varepsilon fh]$.
$\mathrm{Hp}\,.\,(2)\,.\,\mathrm{P3} : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

12. $a \varepsilon \mathrm{K\,q}\,.\, a - = \Lambda \,.\, f \varepsilon (\mathrm{K\,q_n}) / a \,.\, \therefore t \varepsilon a \,.\, \supset_t : ft - = \Lambda \,.\, \mathrm{C}ft = ft$
$.\ \mathrm{l'm}ft \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \therefore t, t' \varepsilon a \,.\, t' > t : \supset_{t,t'} \,.\, ft' \supset ft :: \supset \,.\, \overline{x\varepsilon}(t \varepsilon a$
$\cdot \supset_t \,.\, x \varepsilon ft) - = \Lambda \cdot \qquad \{\mathrm{P10} \cap \mathrm{P11} \supset \mathrm{P12}\}$.

§ e'.

Observations sur le § e.

Dans le § e on étudie les classes variables fh, qui dépendent d'une variable positive h et l'on définit leur limite pour $h = 0$.

P 1. «Si f fait correspondre une classe de $\mathrm{q_n}$ à chaque nombre positif h, par $f0$, ou par limite de fh lorsque h tend vers 0, on entend l'ensemble des complexes x qui ont la propriété que la limite inférieure des modules des différences entre les individus de fh et x, lorsque h tend vers 0, a pour limite 0».

Ces limites jouent un rôle important dans cette Note; mais elles se présentent aussi dans une foule d'autres récherches. Ainsi dans les applications du calcul infinitésimal à la géometrie on parle toujours de la limite d'une figure variable, p. ex. de la ligne commune à deux surfaces d'une même série (caractéristique), sans la définir. La définition qu'on propose ici est évidemment la plus simple. Je l'ai dejà donnée, avec quelques théorèmes, dans mes *Applicazioni geometriche* p. 302.

On voit tout de suite que:

P 2 et P 3. «L'ensemble des points communs à toutes les classes fh appartient à $f0$».

P 4. «Si la classe variable fh, pour une valeur de h et pour toutes les plus petites, est toujours contenue dans une classe determinée a, alors la limite de fh est contenue dans $\mathrm{C}a$».

P 5. «Si de deux classes variables fh et gh, la première est toujours contenue dans la seconde, la limite de la première est aussi contenue dans la limite de la seconde».

P 6. «La limite de la classe commune à deux classes variables *est contenue* dans la classe commune à leurs limites».

P 6'. «Si f, f_1, f_2 font correspondre, à chaque nombre positif, des classes de $\mathrm{q_n}$, et si, quelque soit le nombre positif h, la classe $f_1 h$ est toujours contenue dans fh, et celle-ci dans $f_2 h$; et si les limites de $f_1 h$ et $f_2 h$ coincident, alors la limite de fh est la valeur commune de ces deux limites».

P 8. «La plus petite classe fermée, qui contient $f0$ est $f0$», ou «$f0$ est une classe fermée».

Comme exercice nous expliquerons ici toutes les formules de la P 9 et de sa démonstration. Les mots entre [ ] ne sont pas contenus dans les formules.

Théorème.

P 9. Soit f le signe d'une fonction qui à chaque quantité positive fait correspondre une classe de q_n. Supposons que, lorsqu'on attribue à la variable deux valeurs quelconques h et k, dont la plus petite est h, la classe fh soit toujours contenue dans fk. Supposons enfin qu'il y ait un nombre positif p, tel que, quelque soit le nombre positif h, il existent toujours des nombres de la classe fh dont le module n'est pas supérieur à p. Alors la classe $f0$ n'est pas nulle [c'est-à-dire, il y a des q_n qui appartiennent à la classe $f0$; la classe fh, lorsque h tend vers 0, tend effectivement vers une limite].

Démonstration.

(1) Dans les hypothèses du théorème, si c est une $\mathrm{K}q_n$, si h est une quantité positive, [si nul c est un fh, c'est-a-dire] si les classes c et fh n'ont rien de commun, et si k est un nombre non supérieur à h, alors nul c est fk. [Cette proposition est évidente; mais si l'on désire la démontrer à l'aide des axiomes logiques, on aura:

$\mathrm{Hp}\,(1) . \supset . fk \supset fh$. «Dans les Hp. de la (1), la fk est contenue dans fh».

$fk \supset fh . \supset . c \cap fk \supset c \cap fh$. «Si fk est contenue en fh, la classe commune à c et fk, est aussi contenue dans $c \cap fh$», par l'axiome désigné par P16 dans *Arithmetices principia* pag. IX.

$\mathrm{Hp}\,(1) . \supset . c \cap fh = \Lambda . \supset . c \cap fk = \Lambda$.» Mais on a supposé que $c \cap fh$ soit nulle; donc, par les P7 et P38 des *Arith. pr.*, on déduit la thèse»].

(2) Dans les même Hp, étant c et c' deux $\mathrm{K}q_n$, et h et h' deux nombres positifs, si nul c est fh, et nul c' est fh'; et si l'on désigne par h'' un nombre positif non supérieur ni à h ni à h', alors la classe formée des deux classes c et c' et la classe fh'' n'ont aucun point commun.

Cela résulte de la proposition précedente. [On peut la prouver comme il suit:

$\mathrm{Hp}(2) . (1) : \supset : c \cap fh'' = \Lambda . c' \cap fh'' = \Lambda$. (Arith. pr. P41 . P30) $: \supset . (c \cup c') fh'' = \Lambda$. «Des Hp de la (2), et de la proposition (1), on deduit que . . ., et par deux principes de logique on déduit la Ts».]

(3) Et si c et c' sont deux $\mathrm{K}q_n$, alors affirmer qu'il existe une quantité positive h telle que nul c soit fh, et une autre h' telle que nul c' soit fh', est équivalent à affirmer l'existence d'une quantité po-

sitive h'' telle que nul individu ni de la c ni de la c' appartienne à la classe fh''.

La (3) est conséquence de la (2).

(4) Toujours dans la même Hp., appelons u les classes de q_n qui sont des c telles qu'il n'existe aucun nombre positif h tel que nul c soit fh [c'est-à-dire appelons u la propriété des ensembles de points c tels que, quel que soit le nombre positif h, quel que c soit fh]; alors, par la prop. (3) on a:

u est une classe de classes de complexes, ou une propriété dont les ensembles de points sont susceptibles ou non;

si c et c' sont des ensembles de points quelconques, toutes les fois que la plus petite classe contenant c et c' a la propriété u, une au moins des c et c' a la propriété u, et réciproquement, si l'une d'entre elles a cette propriété, leur ensemble $c \cup c'$ a aussi cette propriété. [Cette proposition est la (3), dans laquelle on a pris les négations des deux membres de l'égalité qui constitue la thèse];

l'ensemble des q_n dont le module n'est pas supérieur à p a la propriété u.

(5) Mais, par un théorème de Cantor, si u est une propriété des ensembles de points;

et si c et c' sont deux ensembles quelconques, affirmer que $c \cup c'$ a la propriété u équivaut à affirmer que l'une des classes c et c' a cette propriété;

et s'il y a une classe s qui a la qualité u, et si [elle est finie, c'est-à-dire si] la limite supérieure des modules de s est une quantité finie;

alors il existe un x, qui est un point de la classe Cs [c'est-à-dire ou un point de s ou un point de sa dérivée], et tel que, quel que soit le nombre positif k [arbitrairement petit], la sphère (solide) dont le centre est x et le rayon est k a la propriété u [autrement dit, il existe un point de Cs tel que tout ensemble de points qui le contient dans son intérieur à la propriété u].

[L'utilité des notations de Logique est ici évidente. On peut avec elles, écrire en deux lignes l'enoncé d'un théorème qui dans l'original occupe une page. La forme des théorèmes est maintenant d'une précision rémarquable; on voit clairement toutes les conditions restrictives qu'on doit supposer; et il est peu probable dans les développements d'en oublier quelqu' une, plus ou moins cachée dans un énoncé ordinaire. On transforme les théorèmes comme on transforme les formules d'Algèbre, et cela avec une facilité et une sûreté qu'on ne peut pas atteindre avec le langage commun. La prop. (5) dans la publication mentionnée de M. Cantor est appellée Théorème I. Les lettres

$$\Upsilon,\ P_1,\ P_2,\ P,\ G_n,\ g$$

de M. Cantor correspondent ici à

$$u,\ c,\ c',\ s,\ q_n,\ x.$$

Il y a quelque peu de différence entre le théorème de M. Cantor et la proposition (5) dont nous ferons usage].

(6) Dans les Hp. du théorème à démontrer, si u [a la même signification que dans la (4), c'est-à-dire, si u] désigne les classes qui ont quelque point commun avec toutes les classes fh, par les prop. (4) et (5), on déduit l'existence d'un point x, dont le module n'est pas supérieur à p, et tel que, quelque soit le nombre positif k, l'ensemble des q_n dont la différence à x a un module non supérieur à k, a toujours la propriété u.

(7) Cela signifie qu'il existe un point x, de module θp, tel que, quelque soit le nombre positif k, on a que, quelque soit le nombre positif h, il existe des fh dont la différence à x a un module non supérieur à k. [La (7) s'obtient de la (6) en substituant dans le second membre à la lettre u sa définition].

(8) Donc il existe un point x, de module θp, tel que, quelque soit h, la limite inférieure des modules des différences à x des points de fh est 0, [il existe un point x commun à toutes les $C(fh)$, quelque soit le nombre positif h].

[Remarquons la transformation par laquelle de (7) on passe à sa équivalente (8). En général, si h, k sont deux variables, et si p, q, r sont trois propositions, dont la première p contient la seule lettre k, la deuxième q la seule h, et la troisième r toutes les deux h et k; alors la proposition:

$p\ \supset_k . q\ \supset_h r$ «quelque soit k, pourvu qu'il satisfasse à la condition p, on déduit que quelque soit la valeur de h satisfaisante à la q, on aura la verité de r»

peut aussi s'écrire

$p q\ \supset_{h,k} r$ «toutes les fois que h et k satisfont aux conditions p et q, sera aussi satisfaite la r»

et, par conséquence, on peut encore lui donner la forme

$q\ \supset_h . p\ \supset_k r$ «de la condition q on déduit que: de la condition p on déduit la r».

Or une proposition partielle de (7) est:

$$k\ \varepsilon\ Q\ .\ \supset_k : h\ \varepsilon\ Q\ .\ \supset_h .\ (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) \cap fh - = \Lambda.$$

Intervertissons les h et k, en suivant la régle énoncée. On obtient

$$h\ \varepsilon\ Q\ .\ \supset_h : k\ \varepsilon\ Q\ .\ \supset_k .\ (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) \cap fh - = \Lambda.$$

Or par la définition de la limite inférieure, on a:

$$k\ \varepsilon\ Q\ .\ \supset_k .\ (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) \cap fh - = \Lambda : = \cdot \mathrm{l_1 m}(fh - x) = 0.$$

Et au moyen de ces deux transformations on passe de la (7) à la (8)].

(9) Donc il existe un x appartenant à la classe $f0$.

Ainsi est démontré le théorème.

Deuxième partie.

Réduction du théorème.

1. Pour n'avoir plus à revenir sur les conditions de continuité des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $t, x_1, \ldots, x_n$, on les supposera continues pour toutes les valeurs des variables. Si elles sont seulement continues pour les valeurs appartenant à la variété V définie par les conditions

$$b-k<t<b+k,\ a_1-h_1<x_1<a_1+h_1,\ldots,a_n-h_n<x_n<a_n+h_n,$$

il suffit de poser

$$t' = \operatorname{tang}\frac{2}{\pi}\frac{t-b}{k},\quad x_1' = \operatorname{tang}\frac{2}{\pi}\frac{x_1-a_1}{h_1},\ \ldots$$

pour représenter la variété V dans une autre, dans laquelle les variables $t', x_1', \ldots$ ne sont plus assujetties à aucune condition.

2. Introduisons les nombres complexes, et posons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(t, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. Alors le système donné d'équations se réduit à une seule :

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x),$$

entre la fonction complexe x, et la variable réelle t; la $\varphi(t, x)$ est fonction continue des deux variables. Le théorème qu'il s'agit de démontrer dans cette Note s'énonce alors:

$$a \varepsilon q_n \cdot b \varepsilon q : \Omega :: b' \varepsilon b + Q \cdot f \varepsilon q_n / b^- b' \cdot f b = a : t \varepsilon b^- b' \cdot \Omega_t \cdot \frac{d f t}{dt} = \varphi(t, ft) \cdot \therefore - = {}_{b'} f \Lambda \cdot$$

«Si a est un complexe d'ordre n, et b un nombre réel, alors on peut déterminer b' et f, où b' est une quantité plus grande que b, et f est un signe de fonction qui à chaque nombre de l'intervalle de b à b' fait correspondre un complexe [en d'autres mots, ft est un complexe fonction de la variable réelle t, définie pour toutes les valeurs de l'intervalle $b^- b'$]; la valeur de ft pour $t = b$ est a; et dans tout l'intervalle $b^- b'$ cette fonction ft satisfait à l'équation différentielle donnée».

3. On peut supposer les valeurs initiales b et a nulles, car il suffit de poser $t = b + t'$, $x = a + x'$; et alors, pour $t = b$ et $x = a$ on a $t' = 0$, $x' = 0$.

On peut aussi supposer $\varphi(0,0) = 0$; car si l'on pose $x = t\varphi(0,0) + x'$,

le second membre de l'équation différentielle en x' et t s'annulle avec les variables.

Enfin, puisque $\varphi(t, x)$ est continue, et $\varphi(0, 0) = 0$, on peut déterminer deux nombres positifs p et t_1 tels que $\mathrm{l'm}\,\varphi(\theta t_1, \theta \overline{\mathrm{m}} p) < 1$. Si k est le plus petit des nombres p et t_1, et que l'on pose $x = kx'$, $t = kt'$, on obtient l'équation différentielle $\frac{dx'}{dt'} = \varphi'(t', x')$, où $\varphi'(t', x') = \varphi(kt', kx')$, et l'on a $\mathrm{l'm}\,\varphi'(\theta, \overline{\mathrm{m}}\,\theta) < 1$. Si, au lieu de x', t', φ', on écrit x, t, φ, on a l'équation $\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x)$, où $\varphi(0, 0) = 0$, et $\mathrm{l'm}\,\varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}}\,\theta) < 1$.

Donc, sans ôter de généralité à la question, on peut supposer

1°) $\varphi(t, x)$ toujours continue,

2°) $\varphi(0, 0) = 0$,

3°) $\mathrm{l'm}\,\varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}}\,\theta) < 1$.

Nous supposerons toujours ces conditions satisfaites, bien que plusieurs propositions, comme on voit facilement, en soient indépendantes. Nous voulons démontrer:

Théorème.

$$f \varepsilon \mathrm{q_n}/\theta \cdot f0 = 0 : t \varepsilon \theta \cdot \supset_t \cdot \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft) \therefore - = {}_f\Lambda .$$

«On peut déterminer dans l'intervalle de 0 à 1 une fonction complexe ft de la variable réelle t, qui s'annule pour $t = 0$, et qui dans tout cet intervalle satisfait à l'équation différentielle donnée».

Résumé de la démonstration.

La démonstration du théorème, réduite en formules de logique, est contenue dans les § 1—§ 7. Bien que les développements complets soient assez longs, les principes de cette démonstration sont simples et naturels; on peut affirmer qu'on doit nécessairement retrouver les mêmes propositions toutes les fois qu'il s'agit de traiter complètement l'intégrabilité des équations différentielles, sans d'autres hypothèses que celles de la continuité.

§ 1.

On étudie d'abord les fonctions ft qui satisfont à une inégalité de la forme

β) $$\mathrm{m}\left(\frac{dft}{dt} - \varphi(t, ft)\right) < h,$$

où h est un nombre positif; on pourrait dire que ces fonctions satisfont *par approximation* à l'équation différentielle donnée.

P1. «Si t_0 et t_1 sont des nombres réels distincts, et si h est une quantité positive, on appelle $\beta(t_0, t_1, h)$ les signes, ou caractéristiques,

des fonctions complexes définies dans l'intervalle $t_0^-t_1$, et qui dans tout cet intervalle satisfont à la condition β».

On voit facilement que (P15), étant t_0 un q, x_0 un q_n, et h un Q, la fonction $ft = x_0 + (t - t_0)\varphi(t_0, x_0)$ satisfait à la condition β dans un certain intervalle t'^-t'', qui contient à son intérieur t_0. Et plus généralement (P16), la fonction $x_0 + (t - t_0)\varepsilon$, où ε est un complexe dont la différence à $\varphi(t_0, x_0)$ a un module moindre que h, satisfait à la même condition, aux environs de $t = t_0$.

P2. «Étant t_0 et t_1 des q, h un Q, et x_0 un q_n, on appelle $B(x_0, t_0, t_1, h)$ les complexes x tels qu'on puisse déterminer une fonction ft, satisfaisant dans l'intervalle $t_0^-t_1$ à la condition β, et qui pour $t = t_0$ et $t = t_1$ a les valeurs x_0 et x».

Donc $B(x_0, t_0, t_1, h)$ désigne l'ensemble des valeurs que prennent pour $t = t_1$ les fonctions ft, qui pour $t = t_0$ ont la valeur x_0, et qui dans l'intervalle $t_0^-t_1$ satisfont à la β. Évidemment, si l'on donne arbitrairement x_0, t_0, t_1, h, on ne peut pas toujours affirmer l'existence de la classe B correspondante.

De la définition résulte immédiatement que:

P9. Si x_1 est un $B(x_0, t_0, t_1, h)$, alors x_0 est un $B(x_1, t_1, t_0, h)$.

P10. Si $h < k$, $B(x_0, t_0, t_1, h)$ est contenue dans $B(x_0, t_0, t_1, k)$.

P14. Si t_0, t_1, t_2 sont des q, disposés par ordre de grandeur, si x_0, x_2 sont des q_n, et si les classes $B(x_0, t_0, t_1, h)$ et $B(x_2, t_2, t_1, h)$ ont des points communs, alors x_2 est un $B(x_0, t_0, t_2, h)$.

Lorsque $n = 1$, et que par conséquence les q_n se réduisent aux nombres réels q, les classes B sont en général l'ensemble des points qui satisfont à une double inégalité $a < x < b$; quelquefois ces classes s'étendent à l'infini, ou manquent.

§ 2.

P1. «Soient t_0, t_1 deux q, $t_0 < t_1$, x_0 un q_n, et p un Q. Appelons l la limite supérieure des modules des valeurs de $\varphi(t, x)$, lorsque t varie dans l'intervalle $t_0^-t_1$, et x dans la sphère de centre x_0 et de rayon p. Supposons $t_1 - t_0 < \frac{p}{l}$. Alors, h étant une quantité positive, quel que soit t dans l'intervalle $t_0^-t_1$, il y a des points de la classe $B(x_0, t_0, t, h)$, dont la différence à x_0 a un module non supérieur à $(t - t_0)l$».

P2. «Et, par conséquent, dont la différence à x_0 a un module non supérieur à p».

P3. «Si, dans la P2, à t_0, t_1, x_0, p on substitue 0, 1, 0, 1, on obtient que, quel que soit le nombre positif h, et quel que soit t dans l'intervalle θ, il y a des $B(0, 0, t, h)$ dont le module est inférieur à l'unité».

P4. «Donc quels que soient la quantité positive h, et t dans θ, la classe $B(0, 0, t, h)$ existe effectivement».

§ 3.

Pour étudier les autres propriétés des B, on démontre d'abord le lemme:

P1. «Si dans un intervalle de t_0 à $t_1 > t_0$ deux fonctions réelles $f_1 t$ et $f_2 t$ satisfont aux inégalités $f_1' t < \psi(t, f_1 t)$, et $f_2' t > \psi(t, f_2 t)$, où $\psi(t, z)$ est une fonction réelle des deux variables réelles t et z; et si les $f_1 t$ et $f_2 t$ ont la même valeur pour $t = t_0$, on aura $f_1 t_1 < f_2 t_1$».

On déduit des théorèmes qui limitent les classes B.

P7. «On peut déterminer une quantité positive h telle que, quel que soit t dans l'intervalle θ, les modules des points de $B(0, 0, t, h)$ soient tous moindres que t», et en conséquence, P8, «moindres que l'unité».

P9. «h et k étant deux quantités positives, alors non seulement $B(x_0, t_0, t_1, h)$ est contenue dans $B(x_0, t_0, t_1, h + k)$, comme dit § 1 P10, mais les points limites de la première classe sont aussi contenus dans la seconde».

Les §§1—3 contiennent les proprietés des classes B, qui se présentent dans la suite. On peut encore noter que les classes B sont *intérieures à elles mêmes* et *continues*.

§ 4.

P1. «Appelons maintenant $A(x_0, t_0, t_1)$ la limite de $B(x_0, t_0, t_1, h)$, pour $h = 0$».

Alors on a:

P4. «Si la fonction ft satisfait dans l'intervalle de t_0 à t_1 à l'équation différentielle donnée, et si sa valeur pour $t = t_0$ est x_0, alors sa valeur pour $t = t_1$ est un des nombres de la classe $A(x_0, t_0, t_1)$». Nous en démontrerons la réciproque dans le § 7.

P7. «Quel que soit t dans l'intervalle θ, la classe $A(0, 0, t)$ existe effectivement». C'est une conséquence du théorème sur les limites des classes, démontré au §e P9.

P9. «La classe $A(x_0, t_0, t)$ est la classe commune à toutes les classes $B(x_0, t_0, t, h)$, lorsque h prend toutes les valeurs positives».

P15. «Quel que soit t dans l'intervalle θ, le module de tout nombre de la classe $A(0, 0, t)$ est inférieur à l'unité».

P19. «Étant x_0 un q_n et t_0 un q, si l'on fixe une quantité positive k [arbitrairement petite], on peut déterminer deux nombres t' et t'', l'un inférieur, l'autre supérieur à t_0, tels que, quel que soit t dans

l'intervalle $t'^{-}t''$, mais différent de t_0, et quel que soit le complexe x de la classe $A(x_0, t_0, t)$, on ait toujours:

$$\mod\left[\frac{x-x_0}{t-t_0} - \varphi(t_0, x_0)\right] < k\text{»},$$

P20. «Si t_0 et t_0' sont des q; et si ft est une fonction complexe définie dans tout l'intervalle $t_0^{-}t_0'$; si, étant t et t_1 deux valeurs quelconques dans l'intervalle $t_0^{-}t_0'$, la f a la propriété que ft_1 est un $A(ft, t, t_1)$; alors dans cet intervalle la fonction ft satisfait à l'équation différentielle donnée».

§ 5.

La démonstration, en général, du théorème, est donnée au § 7. Mais dans ce § et dans le suivant nous examinerons deux cas particuliers. Ici nous examinons le cas dans lequel la classe $A(0, 0, t)$, laquelle, lorsque t est un θ, existe effectivement, se réduit à un seul nombre.

P4. «Si, quel que soit t dans l'intervalle θ, $A(0, 0, t)$ est un complexe d'ordre n, et si l'on pose $ft = A(0, 0, t)$; alors ft est une fonction complexe de la variable t, définie dans l'intervalle θ, qui s'annule avec t, et qui dans le même intervalle satisfait à l'équation différentielle donnée».

P5. «Et elle est la seule qui satisfasse à ces conditions».

Pour reconnaître des cas, dans lesquels $A(0, 0, t)$ est un q_n, on a la

P3. «S'il existe un nombre positif p, tel que, quelque soit t dans l'intervalle θ, et quelques soient les complexes x et x', de module non supérieur à l'unité, le rapport $\frac{m[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)]}{m(x' - x)}$ soit toujours moindre que p, alors, quel que soit t dans θ, la classe $A(0, 0, t)$ se réduit à un nombre».

Mais, pour que $A(0, 0, t)$ se réduise à un q_n, il n'est pas nécessaire que le rapport considéré ait toujours une valeur moindre qu'une quantité finie p.

La condition $\frac{m[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)]}{m(x' - x)} < p$ est équivalente à l'existence de n^2 quantités positives $c_{i,j}$, telles que, quels que soient t, x et x' dans la variété considérée, on ait toujours*)

$$\mod[\varphi_i(t, x_1', x_2', \ldots, x_n') - \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)] < c_{i1} \mod(x_1' - x_1) + c_{i2} \mod(x_2' - x_2) + \cdots + c_{in} \mod(x_n' - x_n);$$

car il suffit de poser $p = n \times$ (le maximum des $c_{i,j}$).

*) C'est la condition supposée par M. Lipschitz (*Bulletin de Darboux* X, p. 149; *Annali di Matematica*, serie II, t. II, p. 288; *Differential- und Integralrechnung*, p. 500).

La même condition est une conséquence de l'existence et de la continuité des dérivées partielles des fonctions réelles $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$; car il suffit de poser $c_{ij} = \max \operatorname{mod} \frac{d\varphi_i}{dx_j}$. Réciproquement, si le rapport considéré a toujours une valeur moindre qu'une quantité finie p, on ne peut pas déduire l'existence des dérivées partielles $\frac{d\varphi_i}{dx_j}$, mais on déduit que les extrêmes oscillatoires de ces fonctions sont toujours finis.*)

On a ainsi démontré les théorèmes de Cauchy et de Lipschitz.

§ 6.

Lorsque $n = 1$, la question se simplifie. Dans ce cas on pourrait démontrer que $A(0, 0, t)$ est un intervalle, c'est-à-dire l'ensemble des points compris entre les limites inférieure et supérieure de $A(0, 0, t)$, y compris ces limites. On démontre:

P8. «Si ft est la limite supérieure de $A(0, 0, t)$, alors ft est une quantité fonction de t, définie dans l'intervalle θ, qui s'annule avec la variable, et qui dans le même intervalle satisfait à l'équation différentielle donnée».

P9. «La limite inférieure de $A(0, 0, t)$ a aussi les mêmes propriétés».

Mais lorsque ces limites ne coïncident pas (le cas de la coïncidence a été étudié au § 5), il y a une infinité d'autres fonctions qui satisfont aux mêmes conditions, et dont l'existence résulte du § suivant.

J'ai donné le théorème, qui est l'objet du § 6 dans ma Note *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine* (Atti Acc. Torino, 1886, t. XXI), avec une démonstration quelque peu différente.

§ 7.

Pour démontrer le théorème en général, formons la fonction ft définie par les conditions suivantes:

P9. «Posons $f0 = 0$».

P10. «Posons $f1$ égal à un nombre arbitraire de la classe $A(0, 0, 1)$».

Alors, quelque soit t dans θ, il y a une classe commune à $A(0, 0, t)$ et à $A(f1, 1, t)$ (§4P18). Il peut arriver que cette classe commune se réduise à un seul individu; appellons le ft; alors, en suivant les démonstrations du § 5, on peut prouver que ft satisfait à l'équation différentielle donnée; et elle est la seule solution qui s'annule

*) V. Volterra, *Sui principii di calcolo integrale,* Giornale di matematiche, t. XIX.

pour $t=0$, et qui pour $t=1$ prend la valeur f1, arbitrairement choisie dans la classe A(0, 0, 1). Dans ce cas la solution de l'équation différentielle est définie par sa valeur initiale, et par sa valeur finale qu'on doit prendre en A(0, 0, 1).

Mais si cela n'arrive pas, on peut diviser l'intervalle 0—1 en deux parties égales et prendre pour $f\left(\frac{1}{2}\right)$ un individu arbitraire de la classe $A\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \cap A\left(f1, 1, \frac{1}{2}\right)$, et ainsi de suite.

P11. «En général, si ft est définie pour tous les nombres $0, \frac{1}{2^r}, \frac{2}{2^r}, \ldots, \frac{2^r-1}{2^r}, 1$, qu'on obtient en divisant r fois l'intervalle θ, alors, si t est la moyenne arithmétique de deux nombres successifs t_1 et t_2 de cette suite, prenons pour ft un individu arbitraire de la classe commune à $A(ft_1, t_1, t)$ et $A(ft_2, t_2, t)$».

P12. «Enfin, si t est un nombre de l'intervalle θ, mais non de la forme $\frac{s}{2^r}$, où r et s sont des entiers, prenons ft égal à l'individu commun à toutes les classes $A(ft', t', t)$, où t' est un nombre quelconque dans θ, de la forme $\frac{s}{2^r}$».

Il n'est pas évident *à priori* que les définitions données soient compatibles. On le prouve dans les

P13. «La fonction f ainsi définie fait effectivement correspondre à chaque nombre θ un q_n».

P14. «Quels que soient t et t' dans θ, ft' est un individu de la classe $A(ft, t, t')$».

Voici quelques explications sur la démonstration de ces deux théorèmes:

(1) (2) (3). «Ils sont vrais pour $r=0$».

(4) (5) (6) (7) (8) (9). «S'ils sont vrais pour une valeur de r, ils le sont aussi pour la valeur $r+1$».

(10) (11) (12). «Donc il sont vrais pour toutes les valeurs de t de la forme $\frac{s}{2^r}$».

(15). «Si t_0 est un nombre de l'intervalle θ, mais non de la forme $\frac{s}{2^r}$, il existe effectivement des individus communs à toutes les classes $A(ft, t, t_0)$, où t est un nombre quelconque de l'intervalle θ, inférieur à t_0 et de la forme $\frac{s}{2^r}$».

(16). «Et il n'y a qu'un seul».

(17) (18). «Appelons-le x_0; alors il est aussi commun à toutes les

classes $A(ft', t', t_0)$, où t' est un nombre quelconque de l'intervalle θ, supérieur à t_0, et de la forme $\frac{s}{2^r}$».

(19). «Donc il y a un et un seul individu commun aux classes de la P 12».

(21). «Ainsi est prouvée la P13».

(22) (23) (24). «La prop. 14, déjà démontrée (12) lorsque t et t' ont la forme $\frac{s}{2^r}$, est aussi vraie lorsque un seul a cette forme, ou qu'aucun des deux n'a une telle forme; elle est donc démontrée en général».

P15. «La fonction ft ainsi définie, satisfait dans l'intervalle θ à l'équation donnée, comme il résulte de la P14 et de la 20 du §4».

Nous avons traduit l'expression ωa, où a est une $\mathrm{K q_n}$, qui se présente dans les P10 et P11, par «un individu arbitraire de la classe a». Mais comme on ne peut pas appliquer une infinité de fois une loi *arbitraire* avec laquelle à une classe a on fait correspondre un individu de cette classe, on a formé ici une loi *déterminée* avec laquelle à chaque classe a, sous des hypothèses convenables, on fait correspondre un individu de cette classe:

P1. «Si a est une $\mathrm{K q_n}$, nous appellons ωa le complexe $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ dont le premier élément x_1 est la limite supérieure des premiers éléments des complexes de la classe a;

le deuxième élément x_2 est la limite supérieure des deuxièmes éléments des complexes qui appartiennent à la classe a, et dont le premier élément est x_1;

le troisième élément x_3 est la limite supérieure des troisièmes éléments des complexes qui sont des a, et qui ont pour premier élément x_1, et pour deuxième x_2;

et ainsi de suite».

P2. «Si a est une $\mathrm{K q_n}$, non nulle, finie, et fermée, alors ωa est un individu de la classe a».

§ 1.

Sur les classes B.

Définitions.

1. $$t_0 \varepsilon \mathrm{q} \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm \mathrm{Q} \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} : \mathrm{O} \,.\, \beta(t_0, t_1, h) = (\mathrm{q_n}/t_0{}^{-} t_1) \frown \overline{f\,\varepsilon}$$
$$\left\{ t \varepsilon t_0{}^{-} t_1 \,.\, \mathrm{O}_t \,.\, \mathrm{m}\left[\frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} - \varphi(t, ft)\right] < h \right\} \text{*)}.$$

*) En supposant que la dérivée d'une fonction ft satisfasse à une inégalité, on suppose ici l'existence de la dérivée ordinaire, ou au moins des deux dérivées à droite et à gauche, qui satisfassent à la même inégalité. Naturellement, aux extrêmes de l'intervalle, on considère l'une seulement des dérivées.

2. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm Q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, x_0 \varepsilon q_n : \supset \,.\, B(x_0, t_0, t_1, h) = q_n \cap \overline{x\,\varepsilon}$
$[f \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) \,.\, ft_0 = x_0 \,.\, ft_1 = x : - =_f \Lambda]$.

3. $t_0 \varepsilon q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, x_0 \varepsilon q_n : \supset \,.\, B(x_0, t_0, t_0, h) = x_0$.

Conséquences immédiates.

4. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm Q \,.\, h \varepsilon Q : \supset \,.\, \beta(t_0, t_1, h) = \beta(t_1, t_0, h)$.
5. „ „ $\,.\, h, k \varepsilon Q \,.\, h < k : \supset \,.\, \beta(t_0, t_1, h) \supset \beta(t_0, t_1, k)$.
6. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, t_2 \varepsilon t_1 + Q \,.\, h \varepsilon Q : \supset \,.\, \beta(t_0, t_2, h) \supset \beta(t_0, t_1, h)$.
7. $t_0, t_1, t_2 \varepsilon q \,.\, t_0 < t_1 < t_2 \,.\, h \varepsilon Q \,.\, f \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) \,.\, f \varepsilon \beta(t_1, t_2, h)$
$: \supset \,.\, f \varepsilon \beta(t_0, t_2, h)$.
8. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm Q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, f \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) : \supset \,.\, ft_1 \varepsilon B(ft_0, t_0, t_1, h)$.
9. $x_0 \varepsilon q_n .\ t_0, t_1 \varepsilon q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, x_1 \varepsilon B(x_0, t_0, t_1, h) : \supset \,.\, x_0 \varepsilon B(x_1, t_1, t_0, h)$
$\{P4 \supset P9\}$.
10. $t_0, t_1 \varepsilon q \,.\, h, k \varepsilon Q \,.\, h < k \,.\, x_0 \varepsilon q_n : \supset \,.\, B(x_0, t_0, t_1, h) \supset B(x_0, t_0, t_1, k)$
$\{P5 \supset P10\}$.
11. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, t_2 \varepsilon t_1 + Q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, x_0 \varepsilon q_n \,.\, x_2 \varepsilon B(x_0, t_0, t_2, h)$
$: \supset \,.\, B(x_0, t_0, t_1, h) \cap B(x_2, t_2, t_1, h) - = \Lambda$ $\{P6 \supset P11\}$.
12. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, t_2 \varepsilon t_1 + Q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, x_0 \varepsilon q_n \,.\, x_1 \varepsilon B(x_0, t_0, t_1, h)$
$\,.\, x_2 \varepsilon B(x_1, t_1, t_2, h) : \supset \,.\, x_2 \varepsilon B(x_0, t_0, t_2, h)$ $\{P7 \supset P12\}$.
13. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, t_2 \varepsilon t_1 + Q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, x_0 \varepsilon q_n \,.\, x_1 \varepsilon B(x_0, t_0, t_1, h)$
$: \supset \,.\, B(x_1, t_1, t_2, h) \supset B(x_0, t_0, t_2, h)$ $\{P12 = P13\}$.
14. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, t_2 \varepsilon t_1 + Q \,.\, h \varepsilon Q \,.\, x_0, x_2 \varepsilon q_n \,.\, B(x_0, t_0, t_1, h)$
$\cap B(x_2, t_2, t_1, h) - = \Lambda : \supset \,.\, x_2 \varepsilon B(x_0, t_0, t_2, h)$
$\{P12 = P14\}$.

Théorèmes dont dans la suite on ne fera pas d'usage.

15. $t_0 \varepsilon q \,.\, x_0 \varepsilon q_n \,.\, ft = x_0 + (t - t_0)\, \varphi(t_0, x_0) \,.\, h \varepsilon Q : \supset \,.\, \therefore t' \varepsilon t_0 - Q$
$\,.\, t'' \varepsilon t_0 + Q \,.\, f \varepsilon \beta(t', t'', h) : - =_{t,t'} \Lambda$.
16. $t_0 \varepsilon q \,.\, x_0 \varepsilon q_n \,.\, h \varepsilon Q \,.\, s \varepsilon q_n \,.\, \mathrm{m}\,[s - \varphi(x_0, t_0)] < h \,.\, ft = x_0 + (t - t_0)s$
$: \supset \,.\, \therefore t' \varepsilon t_0 - Q \,.\, t'' \varepsilon t_0 + Q \,.\, f \varepsilon \beta(t', t'', h) : - =_{t,t'} \Lambda$.

§ 2.

Existence des classes B.

Théorème.

1. $t_0 \varepsilon q \cdot t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, x_0 \varepsilon q_n \,.\, p \varepsilon Q \,.\, l = \mathrm{l'm}\,\varphi(t_0 - t_1,\ x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p)$
$\,.\, (t_1 - t_0) l < p \,.\, h \varepsilon Q : \supset : t \varepsilon t_0 - t_1 \,.\, \supset_t \,.\, B(x_0, t_0, t, h) \cap [x_0$
$+ (t - t_0)\theta \overline{\mathrm{m}} l] - = \Lambda$.

Démonstration.

(1) $\mathrm{Hp}\ .\ k', k'' \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t, t' \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1\ .\ \mathrm{m}(t - t') < k' \ .\ x, x' \varepsilon x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p\ .\ \mathrm{m}(x - x') < k'' : \supset_{t,t',x,x'}\ .\ \mathrm{m}[\varphi(t, x) - \varphi(t', x')] < h :: - = _{k',k''} \Lambda .$

{C'est le théorème connu sous le nom de la continuité équable, gleichmässige Stetigkeit}.

(2) $\mathrm{Hp}\ .\ k \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t, t' \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1\ .\ \mathrm{m}(t - t') < k\ .\ x, x' \varepsilon x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p\ .\ \mathrm{m}(x - x') < kl : \supset_{t,t',x,x'}\ .\ \mathrm{m}[\varphi(t, x) - \varphi(t', x')] < h :: - = _k \Lambda .$

$\{\mathrm{Hp}(1)\ .\ k = \min\left(k', \frac{k''}{l}\right) : \supset (2)\}$.

(3) $\mathrm{Hp}(2)\ .\ t' \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1\ .\ x' \varepsilon x_0 + (t' - t_0) \overline{\mathrm{m}} \theta l\ .\ t'' \varepsilon t' \overline{\ } t_1\ .\ t'' < t' + k\ .\ ft = x' + (t - t') \varphi(t', x') : \supset : ft'' \varepsilon \mathrm{B}(x', t', t'', h)\ .\ ft'' \varepsilon x_0 + (t'' - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l .$

$\{\mathrm{Hp}\ .\ t \varepsilon t' \overline{\ } t'' : \supset : t, t' \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1\ .\ t - t' < k \cdot \mathrm{m}(ft - x') \leq (t - t') l < kl\ .\ ft \varepsilon x' + \theta \overline{\mathrm{m}} p : \supset : \mathrm{m}[\varphi(t, ft) - \varphi(t', x')] < h \cdot \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t', x') : \supset : \mathrm{m}\left[\frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} - \varphi(t, ft)\right] < h .$

$\mathrm{Hp}\ .\ \supset : f \varepsilon \beta(t', t'', h)\ .\ ft' = x' .\ \ \S 1\,\mathrm{P}8 : \supset .\ \mathrm{Ts}\}$.

(4) $\mathrm{Hp}(2)\ .\ t' \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1\ .\ x' \varepsilon x_0 + (t' - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l\ .\ t'' \varepsilon t' \overline{\ } t_1\ .\ t'' < t' + k : \supset\ .\ \mathrm{B}(x', t', t'', h) \cap [x_0 + (t'' - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l] - = \Lambda \qquad \{(3) \supset (4)\}$.

(5) $\mathrm{Hp}(2)\ .\ t' \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1\ .\ x' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t', h) \cap [x_0 + (t' - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l]\ .\ t'' \varepsilon t' \overline{\ } t_1\ .\ t'' < t' + k : \supset\ .\ \mathrm{B}(x_0, t_0, t'', h) \cap [x_0 + (t'' - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l] - = \Lambda$
$\{(4)\ .\ \S 1\,\mathrm{P}13 : \supset .\ (5)\}$.

(6) $\mathrm{Hp}(2) . z = \overline{t \varepsilon} \{t \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1\ .\ \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \cap [x_0 + (t - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l] - = \Lambda\} : \supset :: t_0 \varepsilon z \therefore t' \varepsilon z\ .\ t'' \varepsilon t' \overline{\ } t_1\ .\ t'' < t' + k : \supset_{t,t'}\ .\ t'' \varepsilon z \quad \{(5) \supset (6)\}$.

(7) $t_0 \varepsilon \mathrm{q}\ .\ t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q}\ .\ z \varepsilon \mathrm{K}\mathrm{q} \cdot z \supset t_0 \overline{\ } t_1\ .\ t_0 \varepsilon z\ .\ k \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t' \varepsilon z\ .\ t'' \varepsilon t' \overline{\ } t_1\ .\ t'' < t' + k : \supset_{t,t'}\ .\ t'' \varepsilon z :: \supset\ .\ z = t_0 \overline{\ } t_1$
{Proposition évidente}.

(8) $\mathrm{Hp}(6)\ .\ \supset\ .\ z = t_0 \overline{\ } t_1 .$ $\{(6)\ (7) \supset (8)\}$.

(9) $\mathrm{Hp}(2)\ .\ t \varepsilon t_0 \overline{\ } t_1 : \supset\ .\ \mathrm{B}(x_0, t_0, t, h) \cap [x_0 + (t - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l] - = \Lambda$
$\{(8) = (9)\}$.

(10) $\mathrm{Hp} \supset \mathrm{Ts}$ $\{(2)\ (9) \supset (10) = \mathrm{P}1\}$.

Théorèmes.

2. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, x_0 \varepsilon q_n \,.\, p \varepsilon Q \,.\, l = l' m \varphi(t_0 - t_1,\ x_0 + \theta \overline{m} p) \,.\, (t_1 - t_0) l < p \,.\, h \varepsilon Q \,.\, t \varepsilon t_0 - t_1 : \supset \,.\, B(x_0, t_0, t, h) \cap (x_0 + \theta \overline{m} p) - = \Lambda$ $\{P1 \supset P2\}$.

3. $h \varepsilon Q \,.\, t \varepsilon \theta : \supset \,.\, B(0, 0, t, h) \cap \overline{m} \theta - = \Lambda$ $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ t_0 & t_1 & x_0 & p \end{pmatrix} P2 = P3\right\}$.

4. $h \varepsilon Q \,.\, t \varepsilon \theta : \supset \,.\, B(0, 0, t, h) - = \Lambda$ $\{P3 \supset P4\}$.

§ 3.

Propriétés des classes B.

Lemmes.

{Dans les lemmes suivants, $\psi(t, \varepsilon)$ désigne une fonction réelle des deux variables réelles t et ε}.

1. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + Q \,.\, f_1, f_2 \varepsilon q / t_0 - t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 \,.\, \therefore t \varepsilon t_0 - t_1 \,.\, \supset_t : f_1' t < \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t > \psi(t, f_2 t) : : \supset \,.\, f_1 t_1 < f_2 t_1$. *)

{(1) $Hp \,.\, \supset : : f_1' t_0 < f_2' t_0 \,.\, \supset : : t' \varepsilon t_0 + Q : t \varepsilon (t_0 + Q) \cap (t' - Q) \,.\, \supset_t \,.\, f_1 t < f_2 t \,.\, \therefore - =_{t'} \Lambda$.

(2) $Hp \,.\, t_2 = l' \overline{t' \varepsilon} [t' \varepsilon t_0 - t_1 : t \varepsilon (t_0 + Q) \cap (t' - Q) \,.\, \supset_t \,.\, f_1 t < f_2 t] \,.\, (1) : \supset : t_2 \varepsilon t_0 + Q \,.\, t_2 \leq t_1 \,.\, f_1 t_2 \leq f_2 t_2$.

(3) $Hp(2) \,.\, f_1 t_2 = f_2 t_2 : \supset \,.\, \therefore f_1' t_2 < f_2' t_2 : t \varepsilon (t_0 + Q) \cap (t_2 - Q) \,.\, \supset_t \,.\, f_1 t < f_2 t \,.\, \therefore \supset \,.\, \Lambda$.

(4) $Hp(2) \,.\, (2) \,.\, (3) : \supset : t_2 \varepsilon t_0 + Q \,.\, t_2 \leq t_1 \,.\, f_1 t_2 < f_2 t_2$.

(5) $Hp(2) \,.\, t_2 < t_1 \,.\, f_1 t_2 < f_2 t_2 : \supset : : t_3 \varepsilon t_2 - t_1 \,.\, t_3 > t_2 : t \varepsilon t_1 - t_3 \,.\, \supset_t \,.\, f_1 t < f_2 t \,.\, \therefore - =_t \Lambda : : \supset : : t_3 \varepsilon t_0 - t_1 \,.\, t_3 > t_2 : t \varepsilon (t_0 + Q) \cap (t_3 - Q) \,.\, \supset_t \,.\, f_1 t < f_2 t \,.\, \therefore - =_t \Lambda : : \supset \,.\, \Lambda$.

(6) $Hp(2) \,.\, (4) \,.\, (5) : \supset : t_2 = t_1 \,.\, f_1 t_1 < f_2 t_1$.
$Hp \,.\, (6) : \supset \,.\, Ts.$}

2. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 - Q \,.\, f_1, f_2 \varepsilon q / t_0 - t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 \,.\, \therefore t \varepsilon t_0 - t_1 \,.\, \supset_t : f_1' t < \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t > \psi(t, f_2 t) : : \supset \,.\, f_1 t_1 > f_2 t_1$.

{Dém. analogue. Il suffit aussi de changer t en $-t$ dans le lemme 1}.

*) Ici f_1' et f_2' désignent les dérivées des f_1 et f_2. Sur leur existence on fait les mêmes suppositions que dans la note au § 1. Les fonctions f_1 et f_2 sont donc nécessairement continues.

3. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm Q \,.\, f_1, f_2 \varepsilon q/t_0{}^- t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 \,.\therefore\, t \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, \supset_t : f_1' t < \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t > \psi(t, f_2 t) :: \supset \,.\, \frac{f_2 t_1 - f_1 t_1}{t_1 - t_0} > 0$

$\{P1 \cap P2 = P3\}$.

Théorèmes.

4. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm Q \,.\, h, k \varepsilon Q \,.\, x_0, a \varepsilon q_n : t \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, \supset_t \,.\, l'm\{\varphi[t, x_0 + (t - t_0)a + (t - t_0)\overline{m}(h + k)] - a\} < k : f \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) \,.\, f t_0 = x_0 \,.\therefore\, \supset \,.\, m\left(\frac{f t_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < h + k.$

$\{Hp \,.\, f_1 t = m[f t - x_0 - (t - t_0)a] \,.\, f_2 t = (t - t_0)(h + k) \,.\, \psi(t, \varepsilon) = h + l'm\{\varphi[t, x_0 + (t - t_0)a + \overline{m}\varepsilon] - a\} : \supset :: f_1, f_2 \varepsilon q / t_0{}^- t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 = 0 \,.\therefore\, t \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, \supset_t \,.\, f_1' t \leq m(f' t - a) \leq m[f' t - \varphi(t, f t)] + m[\varphi(t, f t) - a] < h + l'm\{\varphi[t, x_0 + (t - t_0)a + \overline{m} f_1 t] - a\} = \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t = h + k > \psi(t, f_2 t) \,.\therefore\, P3 :: \supset :: \frac{f_2 t_1 - f_1 t_1}{t_1 - t_0} > 0 :: \supset \,.\, Ts\}$.

5. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm Q \,.\, h, k \varepsilon Q \,.\, x_0, a \varepsilon q_n \,.\, p \varepsilon Q \,.\, m(t_1 - t_0) < \frac{p}{\overline{m}a + h + k} \,.\, l'm[\varphi(t_0{}^- t_1, x_0 + \theta\overline{m}p) - a] < k \,.\, x_1 \varepsilon B (x_0, t_0, t_1, h) : \supset \,.\, m\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < h + k.$

$\{(1)\ Hp \,.\, t \varepsilon t_0{}^- t_1 : \supset : x_0 + (t - t_0)a + (t - t_0)\overline{m}(h + k) \supset x_0 + \theta(t_1 - t_0)\overline{m}(ma + h + k) \supset x_0 + \theta\overline{m}p \,.\, l'm\{\varphi[t, x_0 + (t - t_0)a + (t - t_0)\overline{m}(h + k)] - a\} \leq l'm[\varphi(t_0{}^- t_1, x_0 + \theta\overline{m}p) - a] < k.$

(2) $Hp \,.\, f \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) \,.\, f t_0 = x_0 \,.\, f t_1 = x_1 \,.\, (1) \,.\, P4 : \supset \,.\, Ts.$

$Hp \,.\, (2) : \supset \,.\, Ts\}$.

6. $t_0 \varepsilon q \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm Q \,.\, h, k \varepsilon Q \,.\, x_0, a \varepsilon q_n \,.\, p \varepsilon Q \,.\, m(t_1 - t_0) \prec (ma + h + k) < p \,.\, l'm[\varphi(t_0{}^- t_1, x_0 + \theta\overline{m}p) - a] < k : \supset : B(x_0, t_0, t_1, h) \supset x_0 + (t_1 - t_0)[a + \theta\overline{m}(h + k)]$. $\{P5 = P6\}$.

7. $h \varepsilon Q : t \varepsilon \theta \,.\, \supset_t \,.\, B(0, 0, t, h) \supset \overline{m}\theta t \,.\therefore\, - =_h \Lambda$.

$\{(1)\ h \varepsilon Q \,.\, h < 1 - l'm\varphi(\theta, \overline{m}\theta) : - =_h \Lambda$.

(2) $h \varepsilon Q \,.\, h < 1 - l'm\varphi(\theta, \overline{m}\theta) : \supset \,.\therefore\, k \varepsilon Q \,.\, l'm\varphi(\theta, \overline{m}\theta) < k < 1 - h : - =_k \Lambda$.

(3) $h \varepsilon Q \,.\, h < 1 - l'm\varphi(\theta, \overline{m}\theta) \,.\, k \varepsilon Q \,.\, l'm\varphi(\theta, \overline{m}\theta) < k < 1 - h \,.\, t \varepsilon \theta \,.\, \begin{pmatrix} 0, & t, & 0, & 0, & 1 \\ t_0, & t_1, & x_0, & a, & p \end{pmatrix} P6 : \supset \,.\, B(0, 0, t, h) \supset \overline{m}\theta t.$

(1) (2) (3) $\supset$ P7$\}$.

8. $h \varepsilon Q : t \varepsilon \theta \,.\, \supset_t \,.\, B(0, 0, t, h) \supset \overline{m}\theta \,.\therefore\, - =_h \Lambda$ $\{P7 \supset P8\}$.

Théorème.

9. $x_0 \varepsilon q_n . t_0 \varepsilon q . t_1 \varepsilon t_0 + Q . h, k \varepsilon Q : \supset . CB(x_0, t_0, t_1, h) \supset B(x_0, t_0, t_1, h+k)$.

*Démonstration.**)

(1) $Hp . x_1 \varepsilon C B(x_0, t_0, t_1, h) . a = \varphi(t_1, x_1) : \supset \therefore t_2 \varepsilon (t_0 + Q) \cap (t_1 - Q) . p \varepsilon Q . l'm[\varphi(t_2^- t_1, x_1 + \theta \overline{m} p) - a] < \frac{1}{3} k : = =_{t_2, p} \Lambda$.

---

*) Nous traduirons en langage ordinaire cette longue démonstration:

(1). Dans les Hp. du Théor., soit x_1 un point de la classe $CB(x_0, t_0, t_1, h)$. [Le cas nous interesse, où x_1 n'appartient pas à la classe $B(x_0, t_0, t_1, h)$, mais où il est un point limite de cette classe]. Posons, pour simplifier, $a = \varphi(t_1, x_1)$. Alors [par la définition de la continuité] on peut déterminer un nombre t_2 plus grand que t_0 et plus petit que t_1, et une quantité positive p, de façon que, lorsque t varie dans l'intervalle $t_2^- t_1$, et que x acquiert toutes les valeurs qui différent de x_1 d'une quantité dont le module n'est pas supérieur à p, les valeurs de $\varphi(t, x)$ différent de $a = \varphi(t_1, x_1)$ d'une quantité dont le module soit toujours inférieur à $\frac{1}{3} k$.

(2). x_1 et a ayant la même signification que dans (1), si t_2 et p sont des nombres qui ont les proprietés qu'on vient d'expliquer, et si l'on appelle t_3 le plus grand des nombres t_2 et $t_1 - \frac{p}{ma+h+k}$; alors t_3 est plus grand que t_0 et plus petit que t_1; lorsque t varie dans l'intervalle $t_3^- t_1$, et x dans la sphère de centre x_1 et de rayon p, les différences entre les valeurs de $\varphi(t, x)$ et a ont des modules toujours moindres que $\frac{1}{3} k$; et le produit de $t_1 - t_3$ par $ma+h+k$ n'est pas supérieur à p.

(3). Dans les mêmes notations de (1), si p est un nombre positif, et t_3 une quantité entre t_0 et t_1, qui a les proprietés qu'on vient d'énoncer, toute la sphère de centre $x_1 + (t_3 - t_1)a$, et de rayon $(t_1 - t_3)\left(h + \frac{2}{3} k\right)$ est contenue dans $B(x_1, t_1, t_3, h+k)$.

En effet soit x_3 un point de cette sphère; posons $ft = x_1 + \frac{t - t_1}{t_3 - t_1}(x_3 - x_1)$. Alors les valeurs de la fonction ft pour $t = t_1$ et $t = t_3$ sont respectivement x_1 et x_3; quel que soit t dans l'intervalle $t_3^- t_1$, la différence entre ft et x_1 a un module inférieur à p [car dans cette différence $\frac{t - t_1}{t_3 - t_1}(x_3 - x_1)$, le premier facteur n'est pas supérieur à l'unité, et puisque x_3 est un point de la sphère, on a:

$$m[x_3 - x_1 - (t_3 - t_1)a] \leq (t_1 - t_3)\left(h + \frac{2}{3} k\right)$$

d'où

$$m(x_3 - x_1) \leq (t_1 - t_3)\left(ma + h + \frac{2}{3} k\right) < (t_1 - t_3)(ma + h + k) \leq p\Big].$$

Par conséquence la différence entre $\varphi(t, ft)$ et a a un module inférieur à $\frac{k}{3}$. D'autre part $f't = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1}$; et $m[f't - \varphi(t, ft)]$ n'est pas supérieur à la somme

(2) $\mathrm{Hp}(1) . t_2 \varepsilon (t_0 + \mathrm{Q}) \cap (t_1 - \mathrm{Q}) . p \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{l'm}[\varphi(t_2 - t_1, x_1 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a]$
$< \frac{1}{3} k . t_3 = \max\left(t_2, t_1 - \frac{p}{\mathrm{m}a + h + k}\right) : \mathrm{O} : t_3 \varepsilon (t_0 + \mathrm{Q}) \cap (t_1$
$- \mathrm{Q}) . \mathrm{l'm}[\varphi(t_3 - t_1, x_1 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] < \frac{1}{3} k \cdot (t_1 - t_3) (\mathrm{m}a$
$+ h + k) < p.$

---

de $\mathrm{m}\left[\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - a\right]$, qui est inférieur ou égal à $h + \frac{2}{3} k$, et de $\mathrm{m}[\varphi(t, ft) - a]$, inférieur à $\frac{1}{3} k$. Donc, quelque soit t dans $t_2 - t_1$, on a $\mathrm{m}[f't - \varphi(t, ft)] < h + k$. Cela signifie que la fonction f est une de celles qu'on a appellées $\beta(t_1, t_2, h+k)$; et sa valeur x_2 pour $t = t_2$ est effectivement un point de $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h + k)$.

(4). Maintenant [puisque x_1 est un point limite de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$], on peut déterminer un point x_1' de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$ dont la distance à x_1 soit plus petite que le nombre positif $\frac{1}{3} k (t_1 - t_2)$.

(5). x_1, a, p, t_2 ayant toujours la même signification, si x_1' est un point qui a les propriétés qu'on vient de dire, alors toute la classe $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h)$ est contenue dans la sphère de centre $x_1 + (t_2 - t_1) a$ et de rayon $(t_1 - t_2)\left(h + \frac{2}{3} k\right)$, dont on a parlé dans (3).

En effet si dans la P6, à t_0, t_1, k, x_0 on substitue t_1, t_2, $\frac{1}{3} k$, x_1', on voit que toutes les hypothèses sont satisfaites; on déduit que $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h)$ est contenue dans la sphère de centre $x_1' + (t_2 - t_1) a$, et de rayon $(t_1 - t_2)\left(h + \frac{1}{3} k\right)$; de là $\left[\text{puisque } \mathrm{m}(x_1' - x_1) < \frac{1}{3} k (t_1 - t_2)\right]$ on déduit la prop. à démontrer.

(6). Donc, par les (3) et (5), la classe $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h)$ est contenue dans $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h + k)$.

(7). Dans les Hyp. du Théor., si x_1 est un $\mathrm{CB}(x_0, t_0, t_1, h)$; si p est un nombre positif, et t_2 un nombre plus grand que t_0 et plus petit que t_1, tels que lorsque t varie dans $t_2 - t_1$ et x dans la sphère de centre x_1 et de rayon p les valeurs des modules des différences entre les valeurs de $\varphi(t, x)$ et $\varphi(t_1, x_1)$ soient toutes moindres que $\frac{1}{3} k$; si $(t_1 - t_2)[\mathrm{m}\varphi(t_1, x_1) + h + k] < p$; et si x_1' est un point de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$, dont la distance à x_1 est plus petite que $\frac{1}{3} k (t_1 - t_2)$;

alors, par la §1P11, il y a des points communs aux deux classes $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h)$ et $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h)$;

donc il y a aussi des points communs aux deux classes $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h)$ et $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h + k)$, car, par la (6), la dernière classe de cette couple contient la deuxième classe de la couple précédente;

donc, il y a aussi des points communs aux deux classes $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h + k)$ et $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h + k)$, car par la §1P10, la première de cette couple contient la première de la couple précédente;

et enfin, par la §1P14, x_1 est un point de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h + k)$.

(8). Dans la conclusion de (7) n'entrent plus p, t_2, et x_1'; mais comme dans les (1), (2) et (4) on a démontré leur existence, on a:

Des Hyp. du Théor., si x_1 est un point limite de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$, il est un point de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h + k)$.

Ainsi est démontré le théorème.

(3) $\mathrm{Hp}(1) . p \varepsilon \mathrm{Q} . t_3 \varepsilon (t_0 + \mathrm{Q}) \cap (t_1 - \mathrm{Q}) . \mathrm{l'm}[\varphi(t_3 - t_1, x_1 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a]$
$< \frac{1}{3} k . (t_1 - t_3) (\mathrm{m}a + h + k) < p : \mathrm{O} : x_1 + (t_3 - t_1)\left[a + \theta \overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{2}{3} k\right)\right] \mathrm{O}\, \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h + k).$

$\left\{\mathrm{Hp} . x_3 \varepsilon x_1 + (t_3 - t_1)\left[a + \theta \overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{2}{3} k\right)\right] . ft = x_1 + \right.$
$\frac{t - t_1}{t_3 - t_1} (x_3 - x_1) :: \mathrm{O} :: ft_1 = x_1 . ft_3 = x_3 \therefore t \varepsilon t_3 - t_1 : \mathrm{O}$
$: ft \varepsilon x_1 + \theta \overline{\mathrm{m}} p . \mathrm{m}[\varphi(t, ft) - a] < \frac{k}{3} \cdot \mathrm{m}[f't - \varphi(t, ft)]$
$\leq \mathrm{m}\left[\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} - a\right] + \mathrm{m}[\varphi(t, ft) - a] \leq \left(h + \frac{2}{3} k\right) + \frac{1}{3} k =$
$h + k :: \mathrm{O} :: f \varepsilon \beta(t_1, t_3, h + k) . x_3 \varepsilon \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h + k)\}$.

(4) $\mathrm{Hp}(3) . \mathrm{O} \therefore x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . \mathrm{m}(x_1' - x_1) < \frac{1}{3} k (t_1 - t_3) : - = _{x_1'} \Lambda .$

(5) $\mathrm{Hp}(3) . x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . \mathrm{m}(x_1' - x_1) < \frac{1}{3} k (t_1 - t_3) : \mathrm{O} . \mathrm{B}(x_1',$
$t_1, t_3, h) \mathrm{O}\, x_1 + (t_3 - t_1)\left[a + \theta \overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{2}{3} k\right)\right]$
$\left\{\begin{pmatrix} t_1 & t_3 & \frac{1}{3} k & x_1' \\ t_0 & t_1 & k & x_0 \end{pmatrix} \mathrm{P6} . \mathrm{O} . \mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h) \mathrm{O}\, x_1' + (t_3 - t_1) \times \right.$
$\left.\left[a + \theta \overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{1}{3} k\right)\right] . \mathrm{O} . (5)\right\}.$

(6) $\mathrm{Hp}(5) . (3) . (5) : \mathrm{O} . \mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h) \mathrm{O}\, \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h + k).$

(7) $\mathrm{Hp}(5) . \S 1 \mathrm{P}11 : \mathrm{O} : \mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h) \cap \mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h) - = \Lambda . (6) : \mathrm{O}$
$: \mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h) \cap \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h + k) - = \Lambda . \S 1 \mathrm{P}10 : \mathrm{O}$
$\mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h + k) \cap \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h + k) - = \Lambda . \S 1 \mathrm{P}14 : \mathrm{O} : x_1$
$\varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h + k).$

(8) $\mathrm{Hp} . x_1 \varepsilon \mathrm{CB}(x_0, t_0, t_1, h) . (1) . (2) . (4) . (7) : \mathrm{O} . x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0,$
$t_1, h + k).$
$\mathrm{Hp} . (8) : \mathrm{O} . \mathrm{Ts}.$

§ 4.

Sur les classes A.

Définitions.

1. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 \pm \mathrm{Q} . x_0 \varepsilon \mathrm{q_n} : \mathrm{O} . \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) = \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, 0) = \lim \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h).$

2. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . x_0 \varepsilon \mathrm{q_n} : \mathrm{O} . \mathrm{A}(x_0, t_0, t_0) = x_0.$

Théorèmes.

3. $x_0 \varepsilon q_n . t_0, t_1 \varepsilon q . x_1 \varepsilon q_n : h \varepsilon Q . \supset_h . x_1 \varepsilon B(x_0, t_0, t_1, h) \therefore \supset . x_1 \varepsilon A(x_0, t_0, t_1)$ $\{\S e P2 \supset P3\}$.

4. $x_0 \varepsilon q_n . t_0, t_1 \varepsilon q . f \varepsilon q_n / t_0 - t_1 . ft_0 = x_0 : t \varepsilon t_0 - t_1 . \supset_t . \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft) \therefore \supset . ft_1 \varepsilon A(x_0, t_0, t_1)$.

$\{Hp . \supset : h \varepsilon Q . \supset_h . f \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) . \supset_h . ft_1 \varepsilon B(x_0, t_0, t_1, h) : \supset . Ts\}$.

5. $x_0 \varepsilon q_n . t_0, t_1 \varepsilon q : \supset . CA(x_0, t_0, t_1) = A(x_0, t_0, t_1)$. $\{\S e P8 \supset P5\}$.

6. $t_0 \varepsilon q . t_1 \varepsilon t_0 \pm Q . x_0 \varepsilon q_n . p \varepsilon Q . l = l' m \varphi(t_0 - t_1, x_0 + \theta \overline{m} p) . m(t_1 - t_0) < \frac{p}{l} . t \varepsilon t_0 - t_1 : \supset . A(x_0, t_0, t) - = \Lambda$.

$\{(1) Hp . \S1 P10 : \supset \therefore h, k \varepsilon Q . h < k : \supset_{h,k} . B(x_0, t_0, t, h) \supset B(x_0, t_0, t, k)$.

(2) $Hp . \S2 P2 : \supset : h \varepsilon Q . \supset_h . B(x_0, t_0, t, h) \cap (x_0 + \theta \overline{m} p) - = \Lambda$.
$Hp . (1) . (2) . \S e P9 : \supset . Ts\}$.

7. $t \varepsilon \theta : \supset . A(0, 0, t) - = \Lambda$. $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ t_0 & t_1 & x_0 & p \end{pmatrix} P6 = P7\right\}$.

8. $t_0, t \varepsilon \theta . t_0 < t . x_0 \varepsilon q_n . m x_0 < t_0 : \supset . A(x_0, t_0, t) - = \Lambda$.
$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 - t_0 \\ t_1 & p \end{pmatrix} P6 = P8\right\}$.

9. $x_0 \varepsilon q_n . t_0, t \varepsilon q : \supset . A(x_0, t_0, t) = q_n \cap \overline{x \varepsilon} [h \varepsilon Q . \supset_h . x \varepsilon B(x_0, t_0, t, h)]$.
$\{\S3 P8 . \S e P11 : \supset . P9\}$.

10. $x_0 \varepsilon q_n . t_0, t \varepsilon q . h \varepsilon Q : \supset . A(x_0, t_0, t) \supset B(x_0, t_0, t, h)$ $\{P9 \supset P10\}$.

11. $x_0 \varepsilon q_n . t_0, t_1 \varepsilon q . x_1 \varepsilon A(x_0, t_0, t_1) : \supset . x_0 \varepsilon A(x_1, t_1, t_0)$.
$\{Hp . P10 : \supset : : h \varepsilon Q : \supset_h : x_1 \varepsilon B(x_0, t_0, t_1, h) . \S1 P9 : \supset_h : x_0 \varepsilon B(x_1, t_1, t_0, h) \therefore P3 : : \supset Ts\}$.

12. $t_0 \varepsilon q . t_1 \varepsilon t_0 + Q . t_2 \varepsilon t_1 + Q . x_0 \varepsilon q_n . x_1 \varepsilon A(x_0, t_0, t_1) . x_2 \varepsilon A(x_1, t_1, t_2) : \supset . x_2 \varepsilon A(x_0, t_0, t_2)$.
$\{Hp . P10 : \supset : : h \varepsilon Q : \supset_h : x_1 \varepsilon B(x_0, t_0, t_1, h) . x_2 \varepsilon B(x_1, t_1, t_2, h) . \S1 P12 : \supset_h . x_2 \varepsilon B(x_0, t_0, t_2, h) \therefore P3 : : \supset . Ts\}$.

13. $t_0 \varepsilon q . t_1 \varepsilon t_0 + Q . t_2 \varepsilon t_1 + Q . x_0 \varepsilon q_n . x_1 \varepsilon A(x_0, t_0, t_1) : \supset . A(x_1, t_1, t_2) \supset A(x_0, t_0, t_2)$. $\{P12 \supset P13\}$.

14. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} \,.\, t_1 \varepsilon t_0 \pm \mathrm{Q} \,.\, k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, x_0, a \varepsilon \mathrm{q}_n \,.\, p \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, l = \mathrm{l'm}\,\varphi(t_0 - t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) \,.\, \mathrm{m}(t_1 - t_0) < \frac{p}{l} \,.\, \mathrm{l'm}[\varphi(t_0 - t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] < k \,.\, x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{m}\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < k.$

$\{\mathrm{Hp} \,.\, h = k - \mathrm{l'm}[\varphi(t_0 - t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] : \mathrm{O} : h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l'm}[\varphi(t_0 - t_1, x + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] < k - \frac{h}{2} \cdot \S 3\,\mathrm{P5} : \mathrm{O} : x_1 \varepsilon \mathrm{B}\left(x_0, t_0, t_1, \frac{h}{2}\right) \cdot \mathrm{m}\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < \left(k - \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

15. $t \varepsilon \theta \,.\, x \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{m}x \leq t.$

$\left\{\begin{pmatrix} 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ t_0 & t_1 & k & x_0 & a & p & x_1 \end{pmatrix} \mathrm{P14} = \mathrm{P15}\right\}$; ou $\{\S 3\,\mathrm{P7} \,.\, \mathrm{P10} : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{P15}\}$.

16. $t_0, t \varepsilon \theta \,.\, t_0 < t \,.\, x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_0) : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{A}(x_0, t_0, t) = = \Lambda$

$\{\mathrm{Hp.\ P15} : \mathrm{O} : \mathrm{m}x_0 \leq t_0 \,.\, \mathrm{P8} : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

17. $t_0, t \varepsilon \theta \,.\, t_0 < t \,.\, x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_0) \,.\, x \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t) : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{m}(x - x_0) < t - t_0 \,.$

$\left\{\begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 1 - t_0 & x \\ t_1 & k & a & p & x_1 \end{pmatrix} \mathrm{P14} = \mathrm{P17}\right\}.$

17'. $t_0, t \varepsilon \theta \,.\, t_0 < t \,.\, x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_0) : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{A}(x_0, t_0, t)\ \mathrm{O}\ x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}}(t - t_0)$

$\{\mathrm{P17} = \mathrm{P17'}\}.$

18. $t_0, t_1, t_2 \varepsilon \theta \,.\, t_0 < t_1 < t_2 \,.\, x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_0) \,.\, x_2 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_2) : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \cap \mathrm{A}(x_2, t_2, t_1) = = \Lambda.$

$\{(1)\ \mathrm{Hp} \,.\, fh = \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \cap \mathrm{B}(x_2, t_2, t_1, h) : \mathrm{O} \,.\, f \varepsilon \mathrm{Kq}_n/\mathrm{Q}.$

(2) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{P10} : \mathrm{O} : x_2 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h) \,.\, \S 1\,\mathrm{P11} : \mathrm{O} \,.\, fh = = \Lambda.$

(3) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, h, k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, h < k \,.\, \S 1\,\mathrm{P10} : \mathrm{O} \,.\, fh\ \mathrm{O}\ fk.$

(4) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \S 1\,\mathrm{P13} : \mathrm{O} \,.\, fh\ \mathrm{O}\ \mathrm{B}(0, 0, t_1, h).$

(5) $\mathrm{Hp} \,.\, \S 3\,\mathrm{P8} : \mathrm{O} \,.\, \therefore h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l'm}\,\mathrm{B}(0, 0, t_1, h) \leq 1 : = =_h \Lambda.$

(6) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\, (4) \,.\, (5) \,.\, \S \mathrm{e}\,\mathrm{P10} : \mathrm{O} \,.\, f0 = = \Lambda.$

(7) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, \S \mathrm{e}\,\mathrm{P6} \,.\, \mathrm{O} \,.\, f0\ \mathrm{O}\ \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \cap \mathrm{A}(x_2, t_2, t_1).$

$\mathrm{Hp} \,.\, (6) \,.\, (7) : \mathrm{O} \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

19. $x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n \,.\, t_0 \varepsilon \mathrm{q} \,.\, k \varepsilon \mathrm{Q} : \mathrm{O} \,.\, \therefore t' \varepsilon t_0 - \mathrm{Q} \,.\, t'' \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \,.\, \therefore t \varepsilon t' - t'' \,.\, t = = t_0 \,.\, x \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t) : \mathrm{O}_{t,x} \,.\, \mathrm{m}\left[\frac{x - x_0}{t - t_0} - \varphi(t_0, x_0)\right] < k$

$: : = =_{t,t'} \Lambda.$

$\{(1)\ \mathrm{Hp.}\ t_1 \varepsilon t_0 - \mathrm{Q} \,.\, t_2 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \,.\, p \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l'm}[\varphi(t_1 - t_2, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - \varphi(t_0, x_0)] < k : = =_{t_1, t_2, p} \Lambda.$

(2) $\mathrm{Hp}(1) . t' = \max\left(t_1, t_0 - \frac{p}{\mathrm{m}\varphi(t_0, x_0)+k}\right) . t''$

$= \min\left(t_2, t_0 + \frac{p}{\mathrm{m}\varphi(t_0, x_0)+k}\right) . t \varepsilon t' - t'' . x \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t) . l$

$= l' \mathrm{m}\varphi(t_0 - t, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) : \supset : l < \mathrm{m}\varphi(t_0, x_0) + k . \mathrm{m}(t - t_0)$

$< \frac{p}{l} . \begin{pmatrix} t, & \varphi(t_0, x_0), & x \\ t_1, & a & x_1 \end{pmatrix}$ P14 : $\supset$. Ts.

Hp . (1) . (2) : $\supset$. Ts $\}$.

20. $t_0, t_0' \varepsilon \mathrm{q} . f \varepsilon \mathrm{q}_n / t_0 - t_0' : t, t_1 \varepsilon t_0 - t_0' . \supset_{t, t_1} . f t_1 \varepsilon \mathrm{A}(ft, t, t_1) \therefore$

$\supset : t \varepsilon t_0 - t_1 . \supset_t . \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft)$.

$\{$(1) Hp . $t \varepsilon t_0 - t_0' . k \varepsilon \mathrm{Q}$. P19 : $\supset \therefore t' \varepsilon t - \mathrm{Q} . t'' \varepsilon t + \mathrm{Q} \therefore t_1 \varepsilon$

$t' - t'' . \supset_{t_1} . \mathrm{m}\left[\frac{ft_1 - ft}{t_1 - t} - \varphi(t, ft)\right] < k : : - =_{t, t''} \Lambda .$

Hp . $t \varepsilon t_0 - t_0' .$ (1) : $\supset . \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft)\}$.

§ 5.

Existence de l'intégrale, lorsque A(0, 0, t) se réduit à un seul nombre complexe.

Lemme.

1. $a, b \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon \mathrm{Q} . f \varepsilon \mathrm{q}/0 - t_1 : t \varepsilon 0 - t_1 . \supset_t . \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} < a + bft : f0 =$

$0 \therefore \supset . ft_1 < \frac{a}{b}(e^{bt_1} - 1)$.

$\{\mathrm{Hp} . gt = e^{-bt}\left[ft - \frac{a}{b}(e^{bt} - 1)\right] : \supset \therefore g0 = 0 : t \varepsilon \theta t_1 . \supset_t . \frac{\mathrm{d}gt}{\mathrm{d}t}$

$= e^{-bt}\left(\frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} - a - bft\right) < 0 \therefore \supset \therefore gt_1 < 0 \therefore \supset \mathrm{Ts}\}$.

Théorèmes.

2. $p \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t \varepsilon \theta . x, x' \varepsilon \overline{\mathrm{m}}\theta : \supset_{t, x, x'} . \mathrm{m}[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)] < p \times$

$\mathrm{m}(x' - x) \therefore h' \varepsilon \mathrm{Q} : t \varepsilon \theta . \supset_t . \mathrm{B}(0, 0, t, h') \supset \overline{\mathrm{m}}\theta \therefore h \varepsilon \theta h' . t_1 \varepsilon \theta$

$. x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{B}(0, 0, t_1, h) : : \supset . \mathrm{m}(x_2 - x_1) < \frac{2h}{p}(e^{pt_1} - 1)$.

$\{\mathrm{Hp} . f_1, f_2 \varepsilon \beta(0, t_1, h) . f_1 0 = f_2 0 = 0 . f_1 t_1 = x_1 . f_2 t_1 = x_2 : \supset$

$\therefore t \varepsilon \theta t_1 . \supset_t : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) \leq \mathrm{m}(f_2' t - f_1' t) \leq \mathrm{m}[f_2' t$

$- \varphi(t, f_2 t)] + \mathrm{m}[f_1' t - \varphi(t, f_1 t)] + \mathrm{m}[\varphi(t, f_2 t) - \varphi(t, f_1 t)]$

$. \mathrm{m}[f_2' t - \varphi(t_2, f_2 t)] < h . \mathrm{m}[f_1' t - \varphi(t, f_1 t)] < h . f_1 t, f_2 t \varepsilon \overline{\mathrm{m}}\theta$

$$. \mathrm{m}[\varphi(t, f_2 t) - \varphi(t, f_1 t)] < p \times \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) \therefore \mathrm{O} \therefore t \varepsilon \theta t_1$$
$$\cdot \mathrm{O}_t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) < 2h + p \times \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) : \mathrm{P1} \therefore \mathrm{O} . \mathrm{Ts}\}.$$

3. $p \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t \varepsilon \theta . x, x' \varepsilon \overline{\mathrm{m}} \theta : \mathrm{O}_{t,x,x'} . \mathrm{m}[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)] < p \times \mathrm{m}(x' - x)$
$\therefore t \varepsilon \theta :: \mathrm{O} . \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q_n}$.

{(1) Hp . §4P7 : $\mathrm{O} . \mathrm{A}(0, 0, t) - = \Lambda$.

(2) Hp . §3P8 : $\mathrm{O} \therefore h' \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{B}(0, 0, t, h') \mathrm{O} \overline{\mathrm{m}} \theta : - =_{h'} \Lambda$.

(3) Hp . $h' \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{B}(0, 0, t, h') \mathrm{O} \overline{\mathrm{m}} \theta . x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t)$. §4P10. P2 : O
$: h \varepsilon \theta h' . \mathrm{O}_h . x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{B}(0, 0, t, h) . \mathrm{O}_h . \mathrm{m}(x_2 - x_1) < \frac{2h}{p}$
$(e^{pt_1} - 1) : \mathrm{O} : \mathrm{m}(x_2 - x_1) \leq l_1 \frac{2\theta h'}{p} (e^{pt_1} - 1) = 0$.

(4) Hp . $x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t)$. (2) . (3) : $\mathrm{O} . x_1 = x_2$.
Hp . (1) . (4) : O . Ts.}.

4. $t \varepsilon \theta . \mathrm{O}_t . \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q_n} : ft = \mathrm{A}(0, 0, t) \therefore \mathrm{O} \therefore f \varepsilon \mathrm{q_n}/\theta . f0 = 0$
$: t \varepsilon \theta \cdot \mathrm{O}_t \cdot \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft)$.

{(1) Hp . $t, t_1 \varepsilon \theta . t_1 > t$. §4P18 : $\mathrm{O} : \mathrm{A}(0, 0, t) \cap \mathrm{A}(ft_1, t_1, t) - = \Lambda$
$. ft \varepsilon \mathrm{q_n} : \mathrm{O} : ft \varepsilon \mathrm{A}(ft_1, t_1, t)$. §4P11 : $\mathrm{O} : ft_1 \varepsilon \mathrm{A}(ft, t, t_1)$.

(2) Hp . $t, t_1 \varepsilon \theta$. (1) : $\mathrm{O} . ft_1 \varepsilon \mathrm{A}(ft, t, t_1)$.
Hp . (2) . §4P20 : O . Ts.}.

5. $t \varepsilon \theta \cdot \mathrm{O}_t . \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q_n} : f \varepsilon \mathrm{q_n}/\theta \cdot f0 = 0 : t \varepsilon \theta \cdot \mathrm{O}_t \cdot \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t,$
$ft) \therefore \mathrm{O} : t \varepsilon \theta . \mathrm{O}_t . ft = \mathrm{A}(0, 0, t)$. {§4P4 . O . P5}.

§ 6.

Intégrabilité dans le cas de $n = 1$.

Dans ce § on suppose $n = 1$. Alors les complexes $\mathrm{q_n}$ se réduisent aux nombres réels q.

Théorèmes.

1. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . x_0, x_0' \varepsilon \mathrm{q} . x_0' < x_0 . h \varepsilon \mathrm{Q} . x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$.
$x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0', t_0, t_1, h) . x_1' > x_1 : \mathrm{O} : x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . x_1$
$\varepsilon \mathrm{B}(x_0', t_0, t_1, h)$.

{(1) Hp . $f, g \varepsilon (\mathrm{q}/t_0 - t_1)$ continues. $ft_0 > gt_0 . ft_1 < gt_1 : \mathrm{O} \therefore t_2 \varepsilon t_0 - t_1$
$. ft_2 = gt_2 : - =_{t_2} \Lambda$.

(2) Hp . $f, g \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) . ft_0 = x_0 . ft_1 = x_1 . gt_0 = x_0' . gt_1 = x_1'$
$. (1) : \mathrm{O} \therefore t_2 \varepsilon t_0 - t_1 . ft_2 = gt_2 : - =_{t_2} \Lambda$.

(3) $\mathrm{Hp}(2) . t_2 \varepsilon t_0 - t_1 . f t_2 = g t_2 . \S 1 \mathrm{P}8 : \supset : f t_2 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h) \cap \mathrm{B}(x_0', t_0, t_2, h) \cap \mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h) \cap \mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h) : \supset : \mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h) \cap \mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h) = = \Lambda . \mathrm{B}(x_0', t_0, t_2, h) \cap \mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h) = = \Lambda . \S 1 \mathrm{P}14 : \supset . \mathrm{Ts}.$

$\mathrm{Hp} . (2) . (3) : \supset . \mathrm{Ts.}\}$.

2. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . x_0, x_0' \varepsilon \mathrm{q} . x_0' < x_0 . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) . x_1' \varepsilon \mathrm{A}(x_0', t_0, t_1) . x_1' > x_1 : \supset : x_1' \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0', t_0, t_1).$

$\{\mathrm{Hp} . \S 4 \mathrm{P}10. \mathrm{P}1 : \supset : : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h : x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0', t_0, t_1, h) \therefore \S 4 \mathrm{P}3 : : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

3. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . x_0, x_0' \varepsilon \mathrm{q} . x_0' < x_0 : \supset : \mathrm{l}' \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \geq \mathrm{l}' \mathrm{A}(x_0', t_0, t_1) . \mathrm{l}_1 \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \geq \mathrm{l}_1 \mathrm{A}(x_0', t_0, t_1).$

$\{\mathrm{P}2 \supset \mathrm{P}3\}$.

4. $t \varepsilon \theta . \supset : \mathrm{l}' \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . \mathrm{l}_1 \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t).$

$\{\mathrm{Hp.} \S 4 \mathrm{P}7. \S 4 \mathrm{P}15. \S \mathrm{d}\, \mathrm{P}5 \mathrm{P}5' : \supset : \mathrm{l}' \mathrm{A}(0, 0, t), \mathrm{l}_1 \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q}. \S \mathrm{d}\, \mathrm{P}21. \S 4 \mathrm{P}5 : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

5. $t, t_1 \varepsilon \theta . t_1 > t . x = \mathrm{l}' \mathrm{A}(0, 0, t) . x_1 = \mathrm{l}' \mathrm{A}(0, 0, t_1) : \supset . x_1 = \mathrm{l}' \mathrm{A}(x, t, t_1).$

$\{(1) \mathrm{Hp} . \mathrm{P}4 : \supset : x \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . \S 4 \mathrm{P}13 : \supset : \mathrm{A}(x, t, t_1) \supset \mathrm{A}(0, 0, t_1) : \supset : \mathrm{l}' \mathrm{A}(x, t, t_1) \leq x_1.$

(2) $\mathrm{Hp} . \S 4 \mathrm{P}18 : \supset . \mathrm{A}(0, 0, t) \cap \mathrm{A}(x_1, t_1, t) = = \Lambda.$

(3) $\mathrm{Hp} . x' \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . x' \varepsilon \mathrm{A}(x_1, t_1, t) . \mathrm{P}3 : \supset : x' \leq x . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x', t, t_1) . \mathrm{l}' \mathrm{A}(x', t, t_1) \leq \mathrm{l}' \mathrm{A}(x, t, t_1) : \supset . x_1 \leq \mathrm{l}' \mathrm{A}(x, t, t_1).$

(4) $\mathrm{Hp} . (2) . (3) : \supset . x_1 \leq \mathrm{l}' \mathrm{A}(x, t, t_1).$

$\mathrm{Hp} . (1) . (4) : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

6. $t, t_1 \varepsilon \theta . t_1 > t . x = \mathrm{l}_1 \mathrm{A}(0, 0, t) . x_1 = \mathrm{l}_1 \mathrm{A}(0, 0, t_1) : \supset . x_1 = \mathrm{l}_1 \mathrm{A}(x, t, t_1).$ {Dém. analogue à la précédente}.

7. $f t = \mathrm{l}' \mathrm{A}(0, 0, t) . t, t_1 \varepsilon \theta : \supset . f t_1 \varepsilon \mathrm{A}(f t, t, t_1).$

$\{(1) \mathrm{Hp} . t_1 > t . \mathrm{P}5 : \supset : f t_1 = \mathrm{l}' \mathrm{A}(f t, t, t_1) : \supset . \mathrm{Ts}.$

(2) $\mathrm{Hp} . t > t_1 . (1) : \supset : f t \varepsilon \mathrm{A}(f t_1, t_1, t). \S 4 \mathrm{P}11 : \supset . \mathrm{Ts}.$

(3) $\mathrm{Hp} . t = t_1 . \S 4 \mathrm{P}2 : \supset . \mathrm{Ts}.$

$\mathrm{Hp} . (1) . (2) . (3) : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

8. $f t = \mathrm{l}' \mathrm{A}(0, 0, t) . \supset \therefore f \varepsilon \mathrm{q}/\theta . f 0 = 0 : t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{\mathrm{d} f t}{\mathrm{d} t} = \varphi(t, f t).$

$\{\mathrm{Hp.}\ \mathrm{P}7. \S 4 \mathrm{P}20 : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

9. $ft = l_1 A(0,0,t) . \supset \therefore f \varepsilon q/\theta . f0 = 0 : t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft)$.
{Dém. analogue à la précédente}.

10. $f \varepsilon q/\theta . f0 = 0 : t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft) \therefore \supset : t \varepsilon \theta . \supset_t$
$. l_1 A(0,0,t) \leq ft \leq l' A(0,0,t)$.
{§4 P4 . ⊃ . P10}.

§ 7.

Démonstration de l'intégrabilité en général.

Notations pour les P1 *et* 2.

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un q_n, par $E_1 x$, $E_2 x$, . . ., $E_n x$ nous désignerons ici le premier, le deuxième, . . ., l'$n^{ième}$ élément de x:

$$E_1 x = x_1, \quad E_2 x = x_2, \quad \ldots, \quad E_n x = x_n.$$

Les signes $E_1, E_2, \ldots$ sont donc des q/q_n. Ces fonctions sont continues et distributives.

Si $x_1 \varepsilon q$, par la convention de l'inversion (§ c), $\overline{E_1} x_1$ signifie «les q_n dont le premier élément est x_1».

Pour simplifier l'écriture, dans la déf. 1, et dans la démonstration du théorème 2 on suppose $n = 3$.

Définition de l'opération ω.

1. $a \varepsilon K q_3 . x_1 = l' E_1 a . x_2 = l' E_2 (a \cap \overline{E_1} x_1) . x_3 = l' E_3 (a \cap \overline{E_1} x_1 \cap \overline{E_2} x_2)$
$: \supset . \omega a = (x_1, x_2, x_3)$.

Théorème.

2. $a \varepsilon K q_n . a - = \Lambda . l' m a \varepsilon q . Ca = a : \supset . \omega a \varepsilon a$.
{Hp . §d P22 : ⊃ : $x_1 \varepsilon E_1 a . a \cap \overline{E_1} x_1 - = \Lambda . C(a \cap \overline{E_1} x_1)$
$= a \cap \overline{E_1} x_1 : \supset : x_2 \varepsilon E_2 (a \cap \overline{E_1} x_1) . a \cap \overline{E_1} x_1 \cap \overline{E_2} x_2$
$- = \Lambda : \supset : x_3 \varepsilon E_3 (a \cap \overline{E_1} x_1 \cap \overline{E_2} x_2) . a \cap \overline{E_1} x_1 \cap \overline{E_2} x_2$
$\cap \overline{E_3} x_3 - = \Lambda : \supset : x_1, x_2, x_3 \varepsilon q . (x_1, x_2, x_3) \varepsilon a : \supset . Ts$}.

Théorèmes.

3. $t \varepsilon \theta . \supset . \omega A(0,0,t) \varepsilon A(0,0,t)$. {§4 P7 . §4 P15 . §4 P5 . P2 : ⊃ . P3}.

4. $t_1, t_2 \varepsilon \theta . t_2 > t_1 . x_1 \varepsilon A(0,0,t_1) . x_2 \varepsilon A(x_1, t_1, t_2) . t \varepsilon t_1 - t_2 : \supset$
$. \omega[A(x_1, t_1, t) \cap A(x_2, t_2, t)] \varepsilon A(x_1, t_1, t) \cap A(x_2, t_2, t)$.
{§4 P18 . §4 P17 . §d P16 . P2 : ⊃ . P4}.

Notations.

$\mathrm{N} =$ «nombre entier positif ou nul».

$r \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{Z}_r = \theta \cap \frac{\mathrm{N}}{2^r} =$ «l'ensemble des nombres $0, \frac{1}{2^r}, \frac{2}{2^r}, \ldots, \frac{2^{r-1}}{2^r}, 1$».

$\mathrm{Z} = \overline{x\varepsilon}(r \varepsilon \mathrm{N} . x \varepsilon \mathrm{Z}_r : - =_r \Lambda) =$ «les nombres de l'intervalle θ, de la forme $\frac{s}{2^r}$, où r et s sont des N».

Conséquences immédiates.

5. $\mathrm{Z}_0 \supset \mathrm{Z}_1 \supset \mathrm{Z}_2 \supset \ldots \supset \mathrm{Z} \supset \theta$.
6. $r \varepsilon \mathrm{N} . t \varepsilon \mathrm{Z}_r : \supset . 2^r t \varepsilon \mathrm{N}$.
7. $r \varepsilon \mathrm{N} . t \varepsilon \mathrm{Z}_{r+1} - \mathrm{Z}_r : \supset . t - \frac{1}{2^{r+1}}, \ t + \frac{1}{2^{r+1}} \varepsilon \mathrm{Z}_r$.
8. $\mathrm{CZ} = \theta$.

Définitions de la fonction f.

9. $\mathrm{f}0 = 0$.
10. $\mathrm{f}1 = \omega \mathrm{A}(0, 0, 1)$.
11. $r \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q_n} / \mathrm{Z}_r . t \varepsilon \mathrm{Z}_{r+1} - \mathrm{Z}_r . t_1 = t - \frac{1}{2^{r+1}} \cdot t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}} : \supset . \mathrm{f}t = \omega[\mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t) \cap \mathrm{A}(\mathrm{f}t_2, t_2, t)]$.
12. $t \varepsilon \theta - \mathrm{Z} . \supset . \mathrm{f}t = \overline{x\varepsilon}[t' \varepsilon \mathrm{Z} . \supset_{t'} . x \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t)]$.

Théorèmes.

13. $\mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q_n} / \theta$.
14. $t, t' \varepsilon \theta . \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.

Démonstration des théorèmes 13 *et* 14.

(1) $\mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q_n} / \mathrm{Z}_0$ $\{\mathrm{P9} . \mathrm{P10} . \mathrm{P3} : \supset . (1)\}$.

(2) $t, t' \varepsilon \mathrm{Z}_0 . t' > t : \supset : t = 0 . t' = 1 . \mathrm{P10} . \mathrm{P9} . \mathrm{P3} : \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.

(3) $t, t' \varepsilon \mathrm{Z}_0 . (2) . \S 4 \mathrm{P11} : \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.

(4) $r \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q_n} / \mathrm{Z}_r : t, t' \varepsilon \mathrm{Z}_r . \supset_{t,t'} . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t') \therefore \supset . \mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q_n} / \mathrm{Z}_{r+1}$.

$\{(\alpha)$ $\mathrm{Hp} . t \varepsilon \mathrm{Z}_{r+1} \cap \mathrm{Z}_r : \supset . \mathrm{f}t \varepsilon \mathrm{q_n}$.

(β) $\mathrm{Hp} . t \varepsilon \mathrm{Z}_{r+1} - \mathrm{Z}_r . t_1 = t - \frac{1}{2^{r+1}} \cdot t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}} . \mathrm{P7} : \supset : t_1, t_2 \varepsilon \mathrm{Z}_r . \mathrm{f}t_1 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_1) . \mathrm{f}t_2 \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t_2) . \mathrm{P4} : \supset . \mathrm{f}t \varepsilon \mathrm{q_n}$.

(γ) $\mathrm{Hp} . t \varepsilon Z_{r+1} . (\alpha) . (\beta) : \supset . \mathrm{f}t \varepsilon \mathrm{q}_n .$
$\mathrm{Hp} . (\gamma) : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

(5) $\mathrm{Hp}(4) . t \varepsilon Z_r . t' \varepsilon Z_{r+1} - Z_r . t' > t : \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.
$\{\mathrm{Hp} . t_1 = t' - \frac{1}{2^{r+1}} : \supset : t_1 \varepsilon Z_r . t_1 \geq t . \mathrm{f}t_1 \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_1) . \mathrm{f}t' \varepsilon$
$\mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t') . \S 4\mathrm{P}12 : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

(6) $\mathrm{Hp}(4) . t \varepsilon Z_{r+1} - Z_r . t' \varepsilon Z_r . t' > t : \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.
$\{\mathrm{Hp} . t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}} : \supset : t < t_2 \leq t' . t_2 \varepsilon Z_r . \mathrm{f}t_2 \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_2)$
$. \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t_2, t_2, t') : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

(7) $\mathrm{Hp}(4) . t, t' \varepsilon Z_{r+1} - Z_r . t' > t : \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.
$\{\mathrm{Hp} . t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}} . t_1 = t' - \frac{1}{2^{r+1}} : \supset : t < t_2 \leq t_1 < t' . t_2, t_1$
$\varepsilon Z_r . \mathrm{f}t_2 \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_2) . \mathrm{f}t_1 \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t_2, t_2, t_1) . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t')$
$: \supset . \mathrm{Ts}\}$.

(8) $\mathrm{Hp}(4) . t, t' \varepsilon Z_{r+1} . (5) . (6) . (7) : \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.

(9) $r \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q}_n / Z_r : t, t' \varepsilon Z_r . \supset_{t,t'} . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t') \therefore \supset \therefore \mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q}$
$/ Z_{r+1} : t, t' \varepsilon Z_{r+1} . \supset_{t,t'} . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.
$\{(4)\,(8) \supset (9)\}$.

(10) $r \varepsilon \mathrm{N} . \supset \therefore \mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q}_n / Z_r : t, t' \varepsilon Z_r . \supset_{t,t'} . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$.
$\{(1)\,(3)\,(9) \supset (10)\}$.

(11) $\mathrm{f} \varepsilon \mathrm{q}_n / Z$.
(12) $t, t' \varepsilon Z . \supset . \mathrm{f}t' \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$ $\}$ $\{(10) = (11)\,(12)\}$.

(13) $t \varepsilon Z . \supset . \mathrm{f}t \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t)$. $\{(12) \supset (13)\}$.

(14) $t_0 \varepsilon \theta - Z . gt = \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0) . \dot{a} = Z \cap (t_0 - \mathrm{Q}) . \S 4\mathrm{P}5 . \S 4\mathrm{P}16$
$. \S 4\mathrm{P}15 . \S 4\mathrm{P}13 : \supset :: g \varepsilon \mathrm{K}\mathrm{q}_n / a \therefore t \varepsilon a . \supset_t : \mathrm{C}gt = gt$
$. gt - = \Lambda . \mathrm{l'm}\, gt \leq 1 \therefore t, t' \varepsilon a . t' > t : \supset . gt' \supset gt \therefore$
$\S 8\mathrm{P}12 :: \supset . \overline{x\varepsilon} (t \varepsilon a . \supset_t . x \varepsilon gt) - = \Lambda$.

(15) $t_0 \varepsilon \theta - Z . \supset . \overline{x\varepsilon} [t \varepsilon Z \cap (t_0 - \mathrm{Q}) . \supset_t . x \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0)] - = \Lambda$.
$\{(14) \supset (15)\}$.

(16) $t_0 \varepsilon \theta - Z . x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{q}_n : t \varepsilon Z \cap (t_0 - \mathrm{Q}) . \supset_t . x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0) \therefore \supset$
$. x_1 = x_2$.
$\{\mathrm{Hp} . t \varepsilon Z \cap (t_0 - \mathrm{Q}) . \S 4\mathrm{P}17 : \supset : \mathrm{m}(\mathrm{f}t - x_1) < t_0 - t . \mathrm{m}(\mathrm{f}t - x_2)$
$< t_0 - t : \supset . \mathrm{m}(x_2 - x_1) < 2(t_0 - t)$.
$\mathrm{Hp} . \supset : t \varepsilon Z \cap (t_0 - \mathrm{Q}) . \supset_t . \mathrm{m}(x_2 - x_1) < 2(t_0 - t) : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

(17) $t_0 \varepsilon \theta - Z . x_0 = \overline{x\varepsilon} [t \varepsilon Z \cap (t_0 - Q) . \supset_t . x \varepsilon A(ft, t, t_0)] : \supset . x_0 \varepsilon q_n$.
$\{(15)(16) \supset (17)\}$.

(18) $Hp(17) . t' \varepsilon Z \cap (t_0 + Q) : \supset . x_0 \varepsilon A(ft', t', t_0)$.

$\{(\alpha)\ Hp . k \varepsilon Q . t_1 \varepsilon Z \cap (t_0 - Q) . t_0 - t_1 < \frac{k}{2} . \S 4 P17' : \supset : A(ft_1, t_1, t_0)$
$\supset ft_1 + \theta \overline{m} \frac{k}{2} . m(ft_1 - x_0) < \frac{k}{2} . \S 4 P18 : \supset : A(ft_1, t_1, t_0)$
$\supset x_0 + \theta \overline{m} k . A(ft_1, t_1, t_0) \cap A(ft', t', t_0) - = \Lambda : \supset : (x_0 + \theta \overline{m} k)$
$\cap A(ft', t', t_0) - = \Lambda$.

$Hp . (\alpha) : \supset : x_0 \varepsilon CA(ft', t', t_0) . \S 4 P5 : \supset . Ts\}$.

(19) $t \varepsilon \theta - Z . \supset . \overline{x\varepsilon} [t' \varepsilon Z . \supset_{t'} . x \varepsilon A(ft', t', t)] \varepsilon q_n$.
$\{(17)(18) \supset (19)\}$.

(20) $f \varepsilon q_n / (\theta - Z)$. $\{(19) \supset (20)\}$.

(21) $f \varepsilon q_n / \theta$. $\{(11)(20) \supset (21) = P13\}$.

(22) $t \varepsilon \theta - Z . t' \varepsilon Z : \supset : ft \varepsilon A(ft', t', t) : \supset : ft' \varepsilon A(ft, t, t')$.

(23) $t, t' \varepsilon \theta - Z . \supset . ft' \varepsilon A(ft, t, t')$.
$\{Hp . t'' \varepsilon Z \cap (t - t') : \supset : ft'' \varepsilon A(ft, t, t'') . ft' \varepsilon A(ft'', t'', t')$
$: \supset . Ts\}$.

(24) $t, t' \varepsilon \theta . \supset . ft' \varepsilon A(ft, t, t')$.
$\{(12)(22)(23) \supset (24) = P14\}$.

Théorème.

15. $t \varepsilon \theta . \supset . \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft)$. $\{P14 . \S 4 P20 : \supset . P15\}$.

§ 8.

Observations.

On a ainsi prouvé que, étant donnée l'équation

$$\frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft),$$

où le second membre est une fonction continue, il existe au moins une fonction ft, définie dans les environs de $t = b$, qui pour $t = b$ acquiert la valeur arbitraire a, et qui satisfait à l'équation donnée. La condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit unique est que $A(a, b, t)$ se réduise à un seul individu.

En supposant seulement la continuité de la fonction φ, la classe $A(a, b, t)$ peut effectivement contenir plusieurs nombres. Nous en donnerons ici quelques exemples, pour $n = 1$.

Soit l'équation entre les variables réelles x et t

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}$$

où le second membre est fonction continue. Les fonctions qui satisfont à cette équation, et s'annulent avec t sont (pour $t > 0$)

1°. $x = t^3 = l' A(0, 0, t)$,

2°. $x = 0 = l_1 A(0, 0, t)$,

3°. les fonctions qui dans un intervalle $0 - t_1$ sont nulles, et qui de t_1 à $+\infty$ ont la valeur $(t - t_1)^3$.

Ces dernières fonctions coïncident entre elles dans un intervalle fini. On arrive à des résultats analogues en considérant des équations qui ont des solutions singulières.

Voici une autre exemple, ou il n'y a pas de solutions singulières, bien que la solution qui s'annule avec t soit indéterminée.

Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4xt^3}{x^2 + t^4}.$$

Si l'on fait tendre x et t à 0, le second membre a pour limite 0, car on peut le réduire à la forme

$$t \cdot \frac{4xt^2}{x^2 + t^4},$$

où le premier facteur a pour limite 0, et le second est toujours compris entre -2 et 2. Si donc on suppose le second membre nul avec x et t, il sera fonction continue des deux variables. Les solutions de cette équation, qui s'annulent avec t, sont

1°. $x = t^2 = l' A(0, 0, t)$,

2°. $x = -t^2 = l_1 A(0, 0, t)$,

3°. $x = 0$,

4°. $x = c - \sqrt{c^2 + t^4}$ et $x = \sqrt{c^2 + t^4} - c$, où c est une constante positive.

Ces fonctions, égales pour $t = 0$, sont différentes pour toutes les autres valeurs de t. Les autres intégrales de l'équation proposée sont

$$x = \pm (c + \sqrt{c^2 + t^4}).$$

La condition de l'existence et continuité de la dérivée de $\varphi(t, x)$ par rapport à x, ou au moins d'une limite supérieure finie pour le rapport $\frac{\varphi(t, x') - \varphi(t, x)}{x' - x}$, suffisante pour déduire l'existence d'une solution unique qui a une valeur initiale donnée, comme on a vu dans le §5, n'est pas nécessaire. Considérons en effet l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est continue et jamais nulle pour les valeurs de x dans l'intervalle $a-b$. Alors, si x_0 est une valeur dans cet intervalle, et que l'on pose

$$t_0 - \int_a^{x_0} \frac{dx}{\varphi(x)} = a' \quad \text{et} \quad t_0 + \int_{x_0}^{b} \frac{dx}{\varphi(x)} = b',$$

il existe une et une seule fonction x de t, définie dans l'intervalle $a'-b'$ qui satisfait à l'équation donnée, et qui pour $t = t_0$ a la valeur x_0; comme cela résulte de l'intégration de cette équation. Et sur la dérivée de $\varphi(x)$, on n'a pas fait d'hypothèses.

Lorsque $\varphi(t, x)$ a une dérivée $\varphi_1(t, x)$ par rapport à x finie et continue, alors, en supposant t_0 et t_1 suffisamment proches, $A(x_0, t_0, t_1)$ est la valeur, pour $t = t_1$, de la fonction qui satisfait à l'équation différentielle, et qui pour $t = t_0$ a la valeur x_0. Sa dérivée par rapport à x_0 est

$$\frac{dA(x_0, t_0, t_1)}{dx_0} = e^{\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1[t, A(x_0, t_0, t)]\, dt}.$$

Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle a./S.

III. Theil.

Covarianten einer Form 5. Ordnung mit zwei Reihen Variabler.

§ 1.

In diesem dritten Theile werde ich, wie dies schon in der Einleitung in Aussicht gestellt wurde, die Zerlegung von $f(x)$ in einen linearen Factor und einen Factor fünften Grades:

$$f(x) = g(x)\, g_1(x),$$

wo

$$g(x) = \sum_{\varkappa=0}^{5} \binom{5}{\varkappa} \mathfrak{A}_\varkappa x_1^{\varkappa} x_2^{5-\varkappa},$$

$$g_1(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

in Betracht ziehen. Die Differentiation bei dem Aronhold'schen Processe, der in der Operation $\delta_{v=u}$ enthalten ist, findet alsdann nach den Coefficienten von g und g_1 statt, und zwar in der folgenden Weise

$$(1) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{5} \mathfrak{G}_\varkappa \frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}_\varkappa} + \mathfrak{T}_1 \frac{\partial}{\partial c_1} + \mathfrak{T}_2 \frac{\partial}{\partial c_2},$$

wobei

$$(2) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{5} \binom{5}{\varkappa} \mathfrak{G}_\varkappa x_1^{\varkappa} x_2^{5-\varkappa} = \mathfrak{G},$$

$$\mathfrak{T}_1 x_1 + \mathfrak{T}_2 x_2 = \mathfrak{T}$$

gewisse simultane Covarianten von g und g_1 sind. Dass auch in diesem Fall durch die Operation $\delta_{v=u}$ eine besondere Art von simultanen Covarianten von g und g_1 gekennzeichnet wird, ist fast unmittelbar klar. Man erhält z. B. ein Fundamentalsystem von neun Covarianten, durch welche sich alle Covarianten einer besondern Art ausdrücken lassen, wenn man die neun Formen f, H, k, A, ... von f (vergl. § 1 im ersten Theil) in simultane Covarianten von g und g_1 verwandelt,

und solche Functionen für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{T}$ wählt, dass man den Ausdruck (1) in $\sum_{\lambda=0}^{6} F_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda}$ überführen kann. Dies ist übrigens nicht der einzige und nicht der allgemeinste Fall. Hier in diesem Aufsatze werde ich mich aber nur mit dem System derjenigen Covarianten beschäftigen, welche bei der Entwicklung der ungeraden Thetafunctionen zweier Argumente in Potenzreihen auftreten.

Ehe ich aber die Behauptung, die ich zu beweisen beabsichtige, genau formulire, will ich, um die simultanen Covarianten einfacher schreiben zu können, t_2 an Stelle von c_1, $-t_1$ an Stelle von c_2 setzen, so dass jetzt

$$f(x) = g(x)\,(xt) \tag{3}$$

wird und der Aronhold'sche Process die Form

$$\sum_{x=0}^{5} \mathfrak{G}_x \frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}_x} + \mathfrak{T}_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - \mathfrak{T}_2 \frac{\partial}{\partial t_1} \tag{4}$$

annimmt. Es gehen nämlich durch diese Schreibweise die simultanen Covarianten von g und g_1 über in Polare, beziehungsweise in „Theile" von Polaren der Form g allein. Ausserdem will ich für die erste und zweite Polare von

$$g(u) = a_u^5 = b_u^5 = \cdots$$

noch eigne Bezeichnungen einführen:

$$\gamma = a_u^4\, a_t,$$
$$\mathfrak{g} = a_u^3\, a_t^2.$$

Alsdann kann ich den Satz, den ich hier in diesem dritten Theile durchzuführen habe, folgendermassen aussprechen: *Jedes Aggregat, das aus der identischen Covariante*

$$(ut)$$

und den neun Covarianten

$$\mathfrak{g},$$

$$\mathfrak{H} = (\gamma, \gamma)_2, \quad \mathfrak{i} = (g, g)_4, \quad \mathfrak{t} = (\gamma, \mathfrak{H})_1, \quad \mathfrak{A} = (\mathfrak{i}, \mathfrak{i})_2\, g, \tag{5}$$
$$\mathfrak{q} = (\gamma, \mathfrak{i})_1, \quad \mathfrak{j} = (g, \mathfrak{i})_2, \quad \mathfrak{m} = (\gamma, \mathfrak{j})_1, \quad \mathfrak{h} = (g, \mathfrak{j})_2$$

rational und ganz zusammengesetzt ist und bei dem der Grad die Ordnung in den Variablen t_1, t_2 höchstens um zwei übersteigt, ist dadurch gekennzeichnet, dass man zu einem Ausdruck gelangt, der aus denselben Covarianten gebildet ist und bei dem der Grad höchstens um zwei grösser ist als die Ordnung in t_1, t_2, wenn man auf das betreff. Aggregat die Operation δ anwendet, wo der Aronhold'sche Process in der Form $\delta = \sum_{x=0}^{u}$ (4) *ausgeführt wird und* (entsprechend der Beschaffenheit der Formen

$\overline{\mathfrak{G}}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ in der Einleitung) *einerseits die Covariante* $\mathfrak{G}$ *zweiten Grades und bezüglich* x_1, x_2 *von der fünften, bezüglich* v_1, v_2 *von der zweiten, bezüglich* t_1, t_2 *von der ersten Ordnung ist, andererseits die Covariante* $\mathfrak{T}$ *ersten Grades und bezüglich* x_1, x_2 *von der ersten, bezüglich* v_1, v_2 *und* t_1, t_2 *je von der zweiten Ordnung ist.* —

Die Covarianten (5) gehören aber nicht sämmtlich, wie dies im ersten und zweiten Theil, bei den Covarianten von f und den simultanen Covarianten von φ und ψ der Fall war, unmittelbar zu den durch die Operation $\delta_{v=u}$ gekennzeichneten Covarianten. Es trifft dies vielmehr nur bei

(6) $$(ut),\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{H},\ \mathfrak{i},\ \mathfrak{t},\ \mathfrak{q}$$

zu, während

(7) $$\mathfrak{j},\ \mathfrak{m},\ \mathfrak{h},\ \mathfrak{A}$$

vorher erst mit Potenzen von

(8) $$(ut) \text{ und } \mathfrak{g}$$

multiplicirt werden müssen, denn der Grad von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{m}$, bez. von $\mathfrak{h}$, bez. von $\mathfrak{A}$ übersteigt die Ordnung in t_1, t_2 um drei, bez. vier, bez. fünf, während (ut) und $\mathfrak{g}$ die einzigen Covarianten sind, bei denen das Umgekehrte stattfindet, indem bei ihnen je der Grad um Eins hinter der Ordnung in t_1, t_2 zurückbleibt. —

Die Ausdrücke für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{T}$ lassen sich aus ihren Eigenschaften bezüglich Grad und Ordnung, wie dieselben bei der Formulirung des Satzes eben ausgesprochen wurden, leicht der Form nach angeben: $\mathfrak{T}$ kann sich als Covariante ersten Grades von der betreffenden Polare von g nur um eine multiplicative Constante unterscheiden:

(9) $$\mathfrak{T} = \text{const. } a_v^2\, a_t^2\, a_x .$$

Von der Beschaffenheit von $\mathfrak{G}$ aber giebt es, wie aus der Repräsentantentafel auf der nächsten Seite hervorgeht, die folgenden vier Covarianten

$$H_v^2\, H_x^4\,(xt),\quad H_v\, H_x^5\,(vt),\quad H_v\, H_t\, H_x^4\,(xv),\quad i_x^2\,(xv)^2\,(xt),$$

wo

$$H_u^6 = (g, g)_2,\quad i_u^2 = (g, g)_4$$

ist. Da aber zwischen den drei ersten die Beziehung

$$H_v^2\, H_x^4(xt) - H_v H_x^5(vt) - H_v H_t\, H_x^4(xv) = 0$$

besteht, so ist demgemäss

(10) $$\mathfrak{G} = cH_v^2\, H_x^4(xt) + c' H_v\, H_x^5(vt) + c'' i_x^2 (xv)^2 (xt)$$

(c, c', c'' sind numerische Constanten) die allgemeinste Form, die $\mathfrak{G}$ annehmen kann.

§ 2.

Der Beweis des im vorhergehenden Paragraphen ausgesprochenen Satzes wird analog wie der entsprechende im ersten Theile geführt, nur muss noch der Umstand mit in Betracht gezogen werden, dass die Formen $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{A}$ nicht unmittelbar selbst schon zu den Covarianten dieser besondern Art gehören. Ausserdem wird der Beweis noch dadurch complicirter, dass die betreffenden Covarianten zwei Reihen Veränderlicher, u_1, u_2 und t_1, t_2, enthalten und die Fundamentalcovarianten (5) in § 1 nicht die Polaren sind.

Mit Rücksicht auf diese Umstände will ich daher den Beweis thatsächlich durchführen. Ich brauche dazu die Covarianten der Form fünfter Ordnung bis zum fünften Grade und neunter Ordnung inclusive. Dieselben sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt*):

Grad	Ordnung								
	0	1	2	3	4	5	6	7	9
1						g			
2			$(g,g)_4 = i$				$(g,g)_2 = H$		
3				$(g,i)_2 = -j$		$(g,i)_1 = q$			$(g,H)_1 =$
4	$(i,i)_2 = A$				$(g,j)_2 = h$		$(g,j)_1 = -m$		
5		$(i,j)_2 = -\alpha$		$(i,j)_1 = -\varepsilon$				$(g,h)_1 = r$	

Bei Vergleichung der Formen dieser Tabelle mit den Covarianten (5) in § 1 ersieht man unmittelbar, dass

$$(1) \qquad \mathfrak{i} = i, \quad \mathfrak{j} = -j, \quad \mathfrak{h} = -h, \quad \mathfrak{A} = Ag$$

ist. Da ferner einerseits

$$\mathfrak{q} = (\gamma, \mathfrak{i})_1 = (a\mathfrak{i})\, a_u^3\, a_t\, \mathfrak{i}_u = (ai)\, a_u^3\, a_t\, i_u,$$

andererseits

$$q = q_u^5 = (ai)\, a_u^4\, i_u$$

und also

$$q_u^4\, q_t = \frac{1}{5}\,(ai)\,(4 a_u^3\, a_t\, i_u + a_u^4\, i_t),$$

so ergiebt sich hieraus mit Hilfe der Identität

$$a_u\, i_t - a_t\, i_u = (ai)\,(ut),$$

dass

*) Vergl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, S. 277. Ich habe nur zum Theil andere Ueberschiebungen als Repräsentanten genommen.

$$\mathfrak{q} = q_u^4 q_t - \frac{1}{5}(ai)^2 a_u^3 (ut),$$

d. i.

$$\mathfrak{q} = q_u^4 q_t - \frac{1}{5}\mathfrak{j}(ut). \tag{2}$$

Durch die gleiche Betrachtung erhält man die analogen Beziehungen für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{m} = m_u^5 m_t - \frac{1}{3}\mathfrak{h}(ut), \tag{3}$$

$$\mathfrak{H} = H_u^4 H_t^2 - \frac{1}{5}\mathfrak{i}(ut)^2, \tag{4}$$

wobei $m = m_u^6$ und $H = H_u^6$ gesetzt ist. Sodann folgt aus dem Ausdrucke von $\mathfrak{H}$, wenn ich $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_u^4$ bezeichne, dass

$$\mathfrak{H}_u^3 \mathfrak{H}_x = H_u^3 H_t^2 H_x - \frac{1}{10}\mathfrak{i}_u^2 (ut)(xt) - \frac{1}{10}\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_x (ut)^2,$$

und hieraus resultirt, indem ich a_1 für x_2, $-a_2$ für x_1 substituire und die Gleichung mit $a_u^3 a_t$ multiplicire:

$$\mathfrak{t} = (\gamma, H_u^4 H_t^2)_1 + \frac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut) - \frac{1}{10}\mathfrak{q}(ut)^2, \tag{5}$$

worin $(\gamma, H_u^4 H_t^2)_1$ die erste Ueberschiebung von γ und $H_u^4 H_t^2$:

$$(\gamma, H_u^4 H_t^2)_1 = (aH) a_u^3 a_t H_u^3 H_t^2,$$

bedeutet. — Diese Gleichungen (2), (3), (4) und (5) zeigen an, dass $\mathfrak{q}$, bez. $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{t}$ „Theile" der Polaren von q, bez. m, H und t sind. Ich habe aber diese „Theile" der Polaren $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{t}$ und nicht die Polaren selbst unter das System der Fundamentalcovarianten, durch die sich die sämmtlichen Covarianten der besondern Art ausdrücken lassen, aufgenommen, weil einerseits dadurch die Rechnung bei der spätern thatsächlichen Ausführung der Operation $\delta_{v=u}$ sehr erleichtert wird und andererseits die dabei auftretenden numerischen Coefficienten viel einfachere Werthe annehmen. Aus gleichem Grunde will ich auch für einen „Theil" der ersten Polare von $r = r_u^7 = (g,h)_1 = -(g,\mathfrak{h})_1$, nämlich für $(\gamma, \mathfrak{h})_1 = (a\mathfrak{h}) a_u^3 a_t \mathfrak{h}_u^3$, wo $\mathfrak{h}_u^4 = \mathfrak{h}$ bedeutet, die Bezeichnung R einführen; es ist dann, wenn ich schon hier von der Gleichung $(\gamma, \mathfrak{h})_2 = \frac{1}{6}\mathfrak{i}\mathfrak{j}$ (siehe (12)), die ich im Zusammenhang mit andern erst im folgenden Paragraphen angeben werde, Gebrauch mache:

$$R = (\gamma, \mathfrak{h})_1 = -r_u^6 r_t - \frac{1}{14}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut). - \tag{6}$$

Der Beweis selbst gestaltet sich nun folgendermassen.

Nach den Bestimmungen über Grad und Ordnung der Functionen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{T}$ hat die Operation $\delta_{v=u}$ zur Folge, dass sich der Grad der

Covariante, an welcher die Operation ausgeführt wird, um Eins, die Ordnung in den Variablen u_1, u_2, bez. t_1, t_2 um zwei, bez. um Eins erhöht. Ferner kann bekanntlich jede Covariante mit den beiden Reihen Veränderlichen u_1, u_2 und t_1, t_2, welche in den ersten von der Ordnung m, in den zweiten von der Ordnung n ist, auf die Form

$$\Phi = D_t^n \Phi_{m+n} + (ut) D_t^{n-1} \Phi_{m+n-2} + (ut)^2 D_t^{n-2} \Phi_{m+n-4} + \cdots$$

gebracht werden, in der $\Phi_{m+n-2\lambda}$ eine Covariante von gleichem Grade wie Φ und von der $(m+n-2\lambda)$ten Ordnung in den Variablen u_1, u_2 ist, und wo $D_t^{n-\lambda}$ die Bildung der $(n-\lambda)$ten Polare unter Einführung von t_1, t_2 bedeutet. Die Covarianten $\Phi_{m+n-2\lambda}$ selbst lassen sich wieder durch die Formen des vollständigen Formensystems (wozu hier bei dieser Entwicklung die in obiger Tabelle stehenden ausreichen,) rational und ganz ausdrücken. Bei Berücksichtigung dieser Umstände erkennt man, dass diese Operation bei den Covarianten (ut), $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{i}$, ... ein Gleichungssystem von der folgenden Form liefert:

$$\begin{aligned}
\underset{v=u}{\delta}\,(ut) &= C_{01} D_t^2 g,\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{g} &= (ut)\, C_{11} D_t^2 H + (ut)^3 C_{12} i,\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{H} &= C_{21} D_t^3 t + (ut)\, C_{22} D_t^2 ig + (ut)^2 C_{23} D_t q + (ut)^3 C_{24} j,\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{i} &= C_{31} D_t q + (ut)\, C_{32} j,\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{t} &= D_t^4 \{C_{41} ig^2 + C_{42} H^2\} + (ut)\, C_{43} D_t^3 qg\\
&\quad + (ut)^2 D_t^2 \{C_{44} jg + C_{45} iH\} + (ut)^3 C_{46} D_t m\\
&\quad + (ut)^4 \{C_{47} h + C_{48} i^2\},\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{q} &= D_t^2 \{C_{51} jg + C_{52} iH\} + (ut) C_{53} D_t m + (ut)^2 \{C_{54} h + C_{55} i^2\},\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{j} &= C_{61} D_t m + (ut) \{C_{62} h + C_{63} i^2\},\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m} &= D_t^2 \{C_{71} hg + C_{72} i^2 g + C_{73} jH\}\\
&\quad + (ut) D_t \{C_{74} iq + C_{75} r\} + (ut)^2 \{C_{76} Ag + C_{77} ij\},\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h} &= D_t \{C_{81} iq + C_{82} r\} + (ut) \{C_{83} Ag + C_{84} ij\},\\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A} &= D_t \{C_{91} \varepsilon g + C_{92} im + C_{93} jq\}\\
&\quad + (ut) \{C_{94} \alpha g + C_{95} ih + C_{96} i^3 + C_{97} j^2 + C_{98} AH\},
\end{aligned}$$

wo die $C_{\varkappa\lambda}$ numerische Constanten sind. In dem Ausdrucke für $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A}$ kommen noch die Covarianten ε und α vor; diese lassen sich aber durch die beiden Syzyganten*)

*) Vergl. Stroh, Ueber eine fundamentale Eigenschaft..., Math. Annalen, Bd. 33, S. 105.

$$\begin{aligned} &\varepsilon g - im - jq = 0, \\ &\alpha g + 2ih + \tfrac{1}{2} i^3 - j^2 + AH = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

entfernen. Sodann kann man die rechten Seiten dieser Gleichungen noch dadurch umformen, dass man an Stelle der Polaren „Theile" derselben einführt. In Folge davon ändert sich die Form der Gleichungen nicht, nur die Constanten $C_{\varkappa\lambda}$ nehmen andere Werthe an, denn ein „Theil" einer Polare unterscheidet sich von der Polare nur um additive Glieder, die Potenzen von (ut) als Factoren haben. Insbesondere kann man also $D_t^2 H$ durch $\mathfrak{H}$, $D_t^3 t$ durch $\mathfrak{t}$, $D_t^2 ig$ durch $\mathfrak{ig}$, u. s. w. ersetzen, und auf diese Weise die rechten Seiten der Gleichungen in Functionen der Covarianten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{t}$, ... umwandeln:

$$\begin{aligned}
\underset{v=u}{\delta}\,(ut) &= C'_{01}\mathfrak{g}, \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{g} &= C'_{11}\mathfrak{H}(ut) + C'_{12}\mathfrak{i}(ut)^3, \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{H} &= C'_{21}\mathfrak{t} + C'_{22}\mathfrak{ig}(ut) + C'_{23}\mathfrak{q}(ut)^2 + C'_{24}\mathfrak{j}(ut)^3, \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{i} &= C'_{31}\mathfrak{q} + C'_{32}\mathfrak{j}(ut), \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{t} &= \{C'_{41}\mathfrak{ig}^2 + C'_{42}\mathfrak{H}^2\} + C'_{43}\mathfrak{qg}(ut) + \{C'_{44}\mathfrak{jg} + C'_{45}\mathfrak{i}\mathfrak{H}\}(ut)^2 \\
&\quad + C'_{46}\mathfrak{m}(ut)^3 + \{C'_{47}\mathfrak{h} + C'_{48}\mathfrak{i}^2\}(ut)^4, \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{q} &= \{C'_{51}\mathfrak{jg} + C'_{52}\mathfrak{i}\mathfrak{H}\} + C'_{53}\mathfrak{m}(ut) + \{C'_{54}\mathfrak{h} + C'_{55}\mathfrak{i}^2\}(ut)^2, \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{j} &= C'_{61}\mathfrak{m} + \{C'_{62}\mathfrak{h} + C'_{63}\mathfrak{i}^2\}(ut), \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m} &= \{C'_{71}\mathfrak{hg} + C'_{72}\mathfrak{i}^2\mathfrak{g} + C'_{73}\mathfrak{j}\mathfrak{H}\} + \{C'_{74}\mathfrak{iq} + C'_{75}R\}(ut) \\
&\quad + \{C'_{76}\mathfrak{ij} + C'_{77}\mathfrak{A}\}(ut)^2, \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h} &= \{C'_{81}\mathfrak{iq} + C'_{82}R\} + \{C'_{83}\mathfrak{ij} + C'_{84}\mathfrak{A}\}(ut), \\
\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A} &= \{C'_{91}\mathfrak{im} + C'_{92}\mathfrak{jq}\} + \{C'_{93}\mathfrak{ih} + C'_{94}\mathfrak{i}^3 + C'_{95}\mathfrak{j}^2 + C'_{96}AH\}(ut),
\end{aligned}$$

wobei die $C'_{\varkappa\lambda}$ wiederum numerische Constanten sind.

In den Ausdrücken für $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m}$, $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h}$ und $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A}$ finden sich noch die Covarianten R und AH. Diese lassen sich hieraus auch nicht mittels Covariantenrelationen entfernen, entsprechend dem Umstande, dass diese Formen selbst nicht zu den durch die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ gekennzeichneten Covarianten gehören. Aber wo diese Formen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{A}$ in einer Covariante der besonderen Art vorkommen, müssen sie immer (vergl. die Ausführung, die sich an die Aussprache des zu beweisenden Satzes im vorhergehenden Paragraphen anschliesst,) mit Potenzen von

(ut) und $\mathfrak{g}$ multiplicirt auftreten, und zwar muss es möglich sein, dieselben immer so mit Factoren (ut) und $\mathfrak{g}$ zusammenzufassen, dass sie nur in den Verbindungen

$$\begin{gathered} \mathfrak{m}(ut), \quad \mathfrak{m}\mathfrak{g}, \\ (8) \qquad \mathfrak{h}(ut)^2, \quad \mathfrak{h}\mathfrak{g}(ut), \quad \mathfrak{h}\mathfrak{g}^2, \\ \mathfrak{A}(ut)^3, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{g}(ut)^2, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{g}^2(ut), \quad \mathfrak{A}\mathfrak{g}^3 \end{gathered}$$

erscheinen, denn wenn dies nicht möglich wäre, so würde in der betreffenden Covariante der Grad die Ordnung in t_1, t_2 um mehr als zwei übersteigen, was gegen die Voraussetzung ist. Führt man nun an einer Covariante Φ der besondern Art, welche man auf die Form gebracht hat, dass die Covarianten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{A}$ in der Weise (8) mit (ut) und $\mathfrak{g}$ multiplicirt sind, die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ aus, indem man beachtet, dass

$$\underset{v=u}{\delta}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial(ut)}\underset{v=u}{\delta}\,(ut) + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{g}}\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{g} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{H}}\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{H} + \cdots,$$

so erkennt man, dass in dem Ausdrucke von $\underset{v=u}{\delta}\,\Phi$ stets $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m}$, $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h}$, $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A}$ nur in den Verbindungen

$$\begin{gathered} (ut)\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\underset{v=u}{\delta}\,(ut) = \underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m}\,(ut), \\ \mathfrak{g}\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{g} \;\cdot\; = \underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{m}\mathfrak{g}, \end{gathered}$$

bez.

$$\begin{gathered} (ut)^2\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h} + \mathfrak{h}\underset{v=u}{\delta}\,(ut)^2 = \underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h}(ut)^2, \\ \mathfrak{g}\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h} + \mathfrak{h}\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{g} \quad = \underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{h}\mathfrak{g}, \end{gathered}$$

bez.

$$\begin{gathered} (ut)\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\underset{v=u}{\delta}\,(ut) = \underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A}(ut), \\ \mathfrak{g}^2\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{g}^2 \quad = \underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{A}\mathfrak{g}^2 \end{gathered}$$

auftreten. Substituirt man also für $\underset{v=u}{\delta}\,(ut)$, $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{g}$, $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{H}$, ... die Ausdrücke aus dem letzten Gleichungssystem, so wird die Darstellung, die man für $\underset{v=u}{\delta}\,\Phi$ erhält, eine ganze Function der Fundamentalcovarianten (5) in § 1 und der Covarianten R und AH sein, aber diese letzteren werden, und zwar R entweder mit dem Factor $(ut)^2$ oder dem Factor $\mathfrak{g}$, AH entweder mit dem Factor $(ut)^2$ oder dem Factor $\mathfrak{g}^2$ versehen sein. In Folge davon lassen sich dieselben mittels der in einem späteren Paragraphen zu entwickelnden Syzyganten

$$(ut)^2 R = \{-\mathfrak{m}\mathfrak{g} + \mathfrak{i}\mathfrak{t} - \mathfrak{q}\mathfrak{H}\} + \{-\mathfrak{h}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}\mathfrak{j}\}(ut),$$

$$\mathfrak{g}R = \{\mathfrak{j}\mathfrak{t} - \mathfrak{m}\mathfrak{H}\} + \{-\tfrac{1}{6}\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}\mathfrak{H}\}(ut)$$
$$+ \{-\tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{m} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{j}\mathfrak{q}\}(ut)^2,$$

bez.

$$(ut)^2 AH = \{2\mathfrak{A}\mathfrak{g} + 2\mathfrak{i}^2\mathfrak{H} - 4\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{g} + 4\mathfrak{q}^2\} - 4\mathfrak{i}\mathfrak{m}(ut),$$

$$\mathfrak{g}^2 AH = \{-3\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{g} - 4\mathfrak{i}^2\mathfrak{H}^2 + 8\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{g}\mathfrak{H} - 8\mathfrak{q}^2\mathfrak{H}\} + \{8\mathfrak{i}\mathfrak{m}\mathfrak{H} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{t}\}(ut)$$
$$+ \{-\mathfrak{i}^3\mathfrak{H} + 2\mathfrak{i}^2\mathfrak{j}\mathfrak{g} - 2\mathfrak{i}\mathfrak{q}^2\}(ut)^2 + 2\mathfrak{i}^2\mathfrak{m}(ut)^3$$

eliminiren, so dass man einen Ausdruck für $\delta_{v=u}\Phi$ bekommt, der nur aus den Fundamentalcovarianten (5) in § 1 gebildet ist. Da ausserdem durch die Operation $\delta_{v=u}$ der Grad und die Ordnung in t_1, t_2 je um Eins erhöht wird, so ist in $\delta_{v=u}\Phi$ der Grad auch nicht mehr als um zwei höher als die Ordnung in t_1, t_2, wenn dies vor der Operation $\delta_{v=u}$ bei Φ der Fall war. Damit wäre denn der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes vollkommen geführt. —

Im folgenden muss ich nun die Syzyganten, die ich eben gebraucht habe, auch wirklich entwickeln. Und sodann will ich die numerischen Constanten $C'_{\varkappa\lambda}$ im letzten Gleichungssystem für die vier Fälle bestimmen, dass $\mathfrak{G} = H_v^2 H_x^4 (xt)$, bez. $H_v H_x^5 (vt)$, bez. $\mathfrak{i}_x^2 (xv)^2 (xt)$, und $\mathfrak{T} = a_v^2 a_t^2 a_x$ ist, da sich hieraus dann das Ergebniss jeder andern Operation $\delta_{v=u}$ leicht ableiten lässt.

§ 3.

Ehe ich zur Aufstellung der Syzyganten und zur thatsächlichen Ausführung der Operation $\delta_{v=u}$ übergehe, will ich noch eine Anzahl von Formeln entwickeln, die ich bei den späteren Rechnungen gebrauchen werde.

Als bekannt aus bisherigen Arbeiten*) über Formen fünfter Ordnung will ich dabei die folgenden Darstellungen einer Anzahl Ueberschiebungen durch die Covarianten des vollständigen Formensystems voraussetzen:

$$(g, H)_2 = \tfrac{1}{5} ig, \quad (g, H)_3 = \tfrac{1}{10} q, \quad (gH)_4 = \tfrac{4}{5} j, \quad (gH)_5 = 0,$$

*) Vergl. Stroh, Entwicklung der Grundsyzyganten der binären Form fünfter Ordnung, Math. Annalen Bd. 34, S. 355 u. f.

$$(i, H)_1 = m, \quad (i, H)_2 = -h - \frac{3}{10} i^2, \quad (H, H)_2 = \frac{1}{8} jg - \frac{1}{10} iH,$$

$$(j, H)_1 = r, \qquad (j, H)_2 = -\frac{2}{15} ij, \qquad (g, j)_3 = 0,$$

$$(g, h)_2 = \frac{1}{6} ij, \qquad (g, h)_3 = \varepsilon, \qquad (g, h)_4 = \frac{1}{2} \alpha.$$

Hieraus ergeben sich zunächst neue Ausdrücke für $\mathfrak{q}, \mathfrak{j}, \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{h}$. Da (vergl. (2) in § 2)

$$\mathfrak{q} = q_u^4 q_t + \frac{1}{5} j(ut)$$

ist, so kann man jetzt

$$\mathfrak{q} = 10 D_t(g, H)_3 + \frac{1}{4} (g, H)_4 (ut)$$

$$= (aH)^3 (4 a_u a_t H_u^3 + 6 a_u^2 H_u^2 H_t) + \frac{1}{4} (aH)^4 a_u H_u^2 (ut)$$

schreiben, oder wenn man die Identität

(1) $$(aH)(ut) = a_u H_t - a_t H_u$$

benutzt:

(2) $$\mathfrak{q} = \frac{5}{4} (aH)^3 (3 a_u a_t H_u^3 + 5 a_u^2 H_u^2 H_t).$$

In ähnlicher Weise findet man

(3) $$\mathfrak{j} = -\frac{5}{4} (aH)^4 a_u H_u^2,$$

(4) $$\mathfrak{m} = \frac{1}{2} (\mathfrak{i}H) (\mathfrak{i}_t H_u^5 + \mathfrak{i}_u H_u^4 H_t) - \frac{1}{10} \mathfrak{i}^2 (ut),$$

(5) $$\mathfrak{h} = (\mathfrak{i}H)^2 H_u^4 + \frac{3}{10} \mathfrak{i}^2,$$

(6) $$R = \frac{1}{4} (\mathfrak{j}H) (5 \mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t - \mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_t H_u^5).$$

Dazu kommt noch, wie aus

$$\mathfrak{i}\mathfrak{g} = D_t^2 ig + \frac{4}{7} (ut) D_t(i, g)_1 + \frac{1}{15} (i, g)_2 (ut)^2$$

oder

$$\mathfrak{i}\mathfrak{g} = D_t^2 ig - \frac{4}{7} q_u^4 q_t (ut) - \frac{1}{15} j(ut)^2$$

hervorgeht:

(7) $$\mathfrak{i}\mathfrak{g} = \frac{5}{12} (aH)^2 \{7 a_u a_t^2 H_u^4 + 10 a_u^2 a_t H_u^3 H_t - 5 a_u^3 H_u^2 H_t^2\}.$$

Alsdann haben wir für α, ε und r neben der Definition auf Seite 232 je noch einen zweiten Ausdruck erhalten, so dass

(8) $$\alpha = (\mathfrak{i}, \mathfrak{j})_2 = -2 (g, \mathfrak{h})_4,$$

(9) $$\varepsilon = (\mathfrak{i}, \mathfrak{j})_1 = -(g, \mathfrak{h})_3,$$

(10) $$r = -(\mathfrak{j}, H)_1 = -(g, \mathfrak{h})_1.$$

Ausserdem bestehen noch, wie theils unmittelbar schon oben angeführt ist, theils wie durch die Substitution von $-\mathfrak{j}$ für j, von $-\mathfrak{h}$ für h (vergl. (1) in § 2) erhalten wird, die folgenden Beziehungen:

$$(11) \qquad (H, H)_2 = -\frac{1}{3}\,\mathfrak{j}g - \frac{1}{10}\,\mathfrak{i}H,$$

$$(12) \qquad (\mathfrak{j}, H)_2 = -\frac{2}{15}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}, \quad (g, \mathfrak{h})_2 = \frac{1}{6}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j},$$

$$(13) \qquad (g, H)_5 = 0, \qquad (g, \mathfrak{j})_3 = 0.$$

Diese Formel (2), (3), . . ., (13) werde ich in der Folge öfters benutzen. —

Zunächst wende ich mich jetzt zu der Umwandlung von Ausdrücken von der Form $\varphi_u^{n-1}\varphi_t\gamma$ (wo $\varphi_u^n = \varphi$ eine Covariante bedeutet,) da dieselbe in der späteren Rechnung häufig nothwendig wird. Vorerst folgt nun aus der Identität

$$(14) \qquad (a\varphi)\,(ut) = a_u\varphi_t - a_t\varphi_u,$$

dass

$$(15) \qquad \varphi_u^{n-1}\varphi_t\gamma = \varphi\mathfrak{g} + (\gamma, \varphi)_1\,(ut),$$

und damit ist die Umformung von $\varphi_u^{n-1}\varphi_t\gamma$ auf die Bestimmung von $(\gamma, \varphi)_1$ zurückgeführt. Diese Bestimmung will ich nun so weit, d. h. für solche Covarianten φ ausführen, wie ich sie in den weitern Entwicklungen brauche.

Wenn φ die Form $\mathfrak{i}$, bez. $\mathfrak{j}$ oder $\mathfrak{h}$ bedeutet, so ist gemäss den Definitionen (5) in § 1 und (6) in § 2 die Ueberschiebung $(\gamma, \varphi)_1$ gleich $\mathfrak{q}$, bez. $\mathfrak{m}$ oder R.

Hat man unter φ die Covarianten $\mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{m}$ oder R zu verstehen, so benutzt man die Formel*)

$$(16) \qquad 2\big((f_1, f_2)_1, f_3\big)_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2 - 2}\,(f_1, f_2)_2 f_3 + (f_1, f_3)_2 f_2 - (f_2, f_3)_2 f_1,$$

wo n_1 und n_2 die Ordnungen von f_1 und f_2 angeben. Wenn nun erstens φ die Covariante $\mathfrak{q} = (\gamma, \mathfrak{i})_1$ darstellt, so hat man

$$(\gamma, \varphi)_1 = (\gamma, \mathfrak{q})_1 = \big(\gamma, (\gamma, \mathfrak{i})_1\big)_1 = \big((\mathfrak{i}, \gamma)_1, \gamma\big)_1,$$

und dafür giebt diese Formel den Ausdruck

$$(\gamma, \mathfrak{q})_1 = \frac{1}{4}\,(\mathfrak{i}, \gamma)_2\,\gamma - \frac{1}{2}\,(\gamma, \gamma)_2\,\mathfrak{i}.$$

Nun ist einerseits $(\gamma, \gamma)_2 = \mathfrak{H}$, und andererseits ist, wenn $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_u^3$ gesetzt wird,

$$(\mathfrak{i}, \gamma)_2 = (a\mathfrak{i})^2\,a_u^2\,a_t = \mathfrak{j}_u^2\,\mathfrak{j}_t,$$

und also nach (15)

$$(\mathfrak{i}, \gamma)_2\,\gamma = \mathfrak{j}_u^2\,\mathfrak{j}_t\gamma = \mathfrak{j}\mathfrak{g} + \mathfrak{m}(ut).$$

*) Vergl. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, 2. Theil, S. 57.

Demgemäss ist

(a) $$(\gamma, \mathfrak{q})_1 = \tfrac{1}{4}\, \mathfrak{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{i}\mathfrak{H} + \tfrac{1}{4}\, \mathfrak{m}(ut).$$

Ebenso erhält man durch die Formel (16)

$$(\gamma, \mathfrak{m})_1 = \big((j, \gamma)_1, \gamma\big)_1 = \tfrac{2}{5}\, (\mathfrak{j}, \gamma)_2\, \gamma - \tfrac{1}{2}\, (\gamma, \gamma)_2\, \mathfrak{j}.$$

Da nun

$$(\mathfrak{j}, \gamma)_2 = D_t(g, \mathfrak{j})_2 - \tfrac{1}{4}\, (g, \mathfrak{j})_3,$$

d. i. (wenn ich die Bezeichnung $\mathfrak{h}_u^4$ für $\mathfrak{h} = (g, \mathfrak{j})_2$ einführe und (13) berücksichtige):

$$(\mathfrak{j}, \gamma)_2 = \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_t,$$

so hat man (vergl. (6) in § 2 und (15))

$$(\mathfrak{j}, \gamma)_2\, \gamma = \mathfrak{h}\mathfrak{g} + R(ut).$$

Folglich

(b) $$(\gamma, \mathfrak{m})_1 = \tfrac{2}{5}\, \mathfrak{h}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{j}\mathfrak{H} + \tfrac{2}{5}\, R(ut).$$

Ist endlich $\varphi = R$, so liefert die Formel (16)

$$(\gamma, R)_1 = \big((\mathfrak{h}, \gamma)_1, \gamma\big)_1 = \tfrac{1}{2}\, (\mathfrak{h}, \gamma)_2\, \gamma - \tfrac{1}{2}\, (\gamma, \gamma)_2\, \mathfrak{h}.$$

Hierin ist

$$(\mathfrak{h}, \gamma)_2 = D_t(g, \mathfrak{h})_2 - \tfrac{2}{5}\, (g, \mathfrak{h})_3\, (ut),$$

also nach (9) und (12)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{h}, \gamma)_2 &= D_t\, \tfrac{1}{6}\, \mathfrak{i}\mathfrak{j} + \tfrac{2}{5}\, \varepsilon \\ &= \tfrac{1}{30}\big\{2\mathfrak{i}_u\, \mathfrak{i}_t \mathfrak{j} + 3\mathfrak{i}\, \mathfrak{j}_u^2\, \mathfrak{j}_t\big\} + \tfrac{2}{5}\, \varepsilon(ut).\end{aligned}$$

Demnach ist mit Hilfe von (15)

$$(\mathfrak{h}, \gamma)_2\, \gamma = \tfrac{1}{6}\, \mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{g} + \big\{\tfrac{1}{30}\, (3\mathfrak{i}\mathfrak{m} + 2\mathfrak{j}\mathfrak{q}) + \tfrac{2}{5}\, \varepsilon\gamma\big\}\, (ut).$$

Und indem man diesen Ausdruck oben substituirt und $\mathfrak{H}$ für $(\gamma, \gamma)_2$ setzt, gelangt man zu der Gleichung

(c) $$(\gamma, R)_1 = \big\{\tfrac{1}{12}\, \mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{h}\mathfrak{H}\big\} + \big\{\tfrac{1}{60}\, (3\mathfrak{i}\mathfrak{m} + 2\mathfrak{j}\mathfrak{q}) + \tfrac{1}{5}\, \varepsilon\gamma\big\}\, (ut). -$$

Auf die gefundenen Resultate zum Theil zurückführen kann man die Bestimmung von $(\gamma, \varphi)_1$, wenn für φ die Covariante

(17) $$5(aH)^2\, a_u^2\, a_t H_u^3 H_t = \varkappa = \varkappa_u^5,$$

und von $\gamma\varphi$, wenn für φ die Covariante

(18) $$5(aH)^3\, a_u\, a_t H_u^2 H_t = \lambda = \lambda_u^3$$

genommen wird. Nach (7) mit Zuhilfenahme der Identität (1) ist nämlich

$$\varkappa = \mathfrak{ig} + \tfrac{5}{12}(aH)^3(7a_u a_t H_u^3 + 5a_u^2 H_u^2 H_t)(ut),$$

also bei Benutzung von (2), (3) und (13):

$$\varkappa = \mathfrak{ig} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}(ut) + \tfrac{5}{6}\mathfrak{j}(ut)^2. \tag{19}$$

Indem man nun unter Einführung der Bezeichnung von $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}_u^4$ in die erste Polare von $\varkappa$, d. i. in

$$\varkappa_u^4 \varkappa_x = \tfrac{2}{5}\mathfrak{i}_u\mathfrak{i}_x\mathfrak{g} + \tfrac{3}{5}a_u^2 a_t^2 a_x \mathfrak{i} + \tfrac{1}{10}\mathfrak{q}(xt) + \tfrac{2}{5}\mathfrak{q}_u^3\mathfrak{q}_x(ut) + \tfrac{1}{3}\mathfrak{j}(xt)(ut) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_x(ut)^2,$$

b_1, bez. $-b_2$ an Stelle von x_2, bez. x_1 setzt und die Gleichung mit $b_u^3 b_t$ multiplicirt, erhält man

$$(\gamma, \varkappa)_1 = \tfrac{2}{5}\mathfrak{qg} + \tfrac{3}{5}(ba)a_u^2 a_t^2 b_u^3 b_t \mathfrak{i} - \tfrac{1}{10}\mathfrak{qg} + \tfrac{2}{5}(\gamma, \mathfrak{q})_1(ut) - \tfrac{1}{3}\mathfrak{jg}(ut) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}(ut)^2,$$

oder wenn man den eben gefundenen Ausdruck (a) von $(\gamma, \mathfrak{q})_1$ benutzt und ausserdem noch beachtet, dass

$$(ba)a_u^2 a_t^2 b_u^3 b_t = \tfrac{1}{2}(ab)a_u^2 a_t b_u^2 b_t(a_u b_t - a_t b_u) = \tfrac{1}{2}(ab)^2 a_u^2 a_t b_u^2 b_t(ut) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}(ut)$$

ist:

$$(\gamma, \varkappa)_1 = \tfrac{3}{10}\mathfrak{qg} + \left\{-\tfrac{7}{30}\mathfrak{jg} + \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut) + \tfrac{3}{5}\mathfrak{m}(ut)^2. \tag{d}$$

Ferner findet man durch die analoge Betrachtung, wie ich sie eben angestellt habe, um zu dem Ausdruck (19) von $\varkappa$ zu gelangen, dass

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_u^3\mathfrak{q}_t + \tfrac{7}{8}\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t(ut). \tag{20}$$

Demgemäss ist nach (15)

$$\lambda\gamma = \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{qg} + (\gamma, \mathfrak{q})_1(ut)\right) + \tfrac{7}{8}\left(\mathfrak{jg} + (\gamma, \mathfrak{j})_1(ut)\right)(ut),$$

und hieraus folgt mit Hilfe der Gleichung (a):

$$\lambda\gamma = \tfrac{1}{2}\mathfrak{qg} + \left\{\mathfrak{jg} - \tfrac{1}{4}\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut) + \mathfrak{m}(ut)^2. \tag{e}$$

Ich will sogleich hier bemerken, dass sich durch diese beiden Functionen $(\gamma, \varkappa)_1$ und $\lambda\gamma$ auch die Ueberschiebung $(H\mathfrak{H})H_u^4 H_t \mathfrak{H}_u^3$ ausdrücken lässt. Setzt man nämlich in die Gordan'sche Formel, die ich im ersten Theil unter der Bezeichnung (B) angeführt und dort

vielfach benutzt habe, $r_1 = \gamma$, $r_2 = \gamma$, $r_3 = H_u^5 H_t$ und nimmt $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ an, so ergiebt sich

$$\big((\gamma, \gamma)_2, r_3\big)_1 = \big((\gamma, r_3)_2, \gamma\big)_1 + \tfrac{3}{5}(\gamma, r_3)_3\, \gamma,$$

oder da (vergl. (17) und (18))

$$(\gamma, r_3)_2 = \tfrac{1}{5}\varkappa, \quad (\gamma, r_3)_3 = +\tfrac{1}{5}\lambda$$

ist:

(f) $$(H\mathfrak{H})\, H_u^4 H_t \mathfrak{H}_u^3 = \tfrac{1}{5}(\gamma, \varkappa)_1 - \tfrac{3}{25}\lambda\gamma. -$$

Die Formel (16) kann man auch gebrauchen, um $(g, \varepsilon)_1$ zu bestimmen. Da $\varepsilon = (\mathfrak{i}, \mathfrak{j})_1$, so ist

$$(g, \varepsilon)_1 = \big((\mathfrak{j}, \mathfrak{i})_1, g\big)_1 = \tfrac{1}{6}(\mathfrak{j}, \mathfrak{i})_2\, g + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{j}, g)_2\, \mathfrak{i} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{i}, g)_2\, \mathfrak{j}$$

oder

$$(g, \varepsilon)_1 = \tfrac{1}{6}\alpha g + \tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{h} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{j}^2.$$

Insbesondere folgt noch hieraus, da bei der Bezeichnung von ε mit ε_u^3

$$\varepsilon_u^2 \varepsilon_t g = \varepsilon\gamma + (ut)(g, \varepsilon)_1$$

ist, dass

(g) $$\varepsilon_u^2 \varepsilon_t g = \varepsilon\gamma + \big\{\tfrac{1}{6}\alpha g + \tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{h} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{j}^2\big\}(ut). -$$

Anders, d. h. ohne Benutzung der Identität (16), verfahre ich um

$$\gamma(aH)\, a_u^4 H_u^3 H_t^2 \quad \text{und} \quad \gamma(aH)^2\, a_u^3 H_u^3 H_t$$

umzuformen. Gemäss der Relation $(ab)(ut) = a_u b_t - a_t b_u$ ist

$$\gamma(aH) a_u^4 H_u^3 H_t^2 = g(aH) a_u^3 a_t H_u^3 H_t^2 + (ab)(aH) a_u^3 b_u^4 H_u^3 H_t^2 (ut).$$

Der Ausdruck für den ersten Term wurde schon in § 2 (siehe (5)) angegeben; der zweite Term ist, da a und b gleichbedeutende Symbole sind, gleich

$$(ab)(aH)\, a_u^3 b_u^4 H_u^3 H_t^2 = \tfrac{1}{2}\big((aH) b_u - (bH) a_u\big)\, (ab)\, a_u^3 b_u^3 H_u^3 H_t^2,$$

oder in Folge der Identität

(21) $$(aH)\, b_u + (Hb)\, a_u + (ba)\, H_u = 0$$

gleich

$$(ab)(aH)\, a_u^3 b_u^4 H_u^3 H_t^2 = \tfrac{1}{2} H \cdot H_u^4 H_t^2,$$

d. i. nach (4) in § 2:

$$(ab)(aH)\, a_u^3 b_u^4 H_u^3 H_t^2 = \tfrac{1}{2} H\big(\mathfrak{H} + \tfrac{1}{5}\mathfrak{i}(ut)^2\big).$$

Demnach ist

(h) $$\gamma(aH)\, a_u^4 H_u^3 H_t^2 = g\big[\mathfrak{t} - \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut) + \tfrac{1}{10}\mathfrak{q}(ut)^2\big] + H\big[\tfrac{1}{2}\mathfrak{H} + \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}(ut)^2\big](ut).$$

Zu der Darstellung von $\gamma(aH)^2 a_u^3 H_u^3 H_t$ gelangt man, indem man zuerst einerseits in (7) durch Polarenbildung einmal u_1, u_2 an Stelle von t_1, t_2 einführt:

$$i\gamma = 5(aH)^2 a_u^2 a_t H_u^4,$$

und andererseits die erste Polare von $ig = 5(aH)^2 a_u^3 H_u^4$ bildet:

$$2 i_u i_t g + 5 i\gamma = 5(aH)^2(3 a_u^2 a_t H_u^4 + 4 a_u^3 H_u^3 H_t).$$

Aus diesen beiden Gleichungen geht nämlich hervor, dass

$$(aH)^2 a_u^3 H_u^3 H_t = \frac{1}{10}(i\gamma + i_u i_t g),$$

und hieraus folgt, da $\gamma^2 = \mathfrak{g} g - \frac{1}{2} H(ut)^2$ und $\gamma i_u i_t = i\mathfrak{g} + \mathfrak{q}(ut)$ ist:

$$\text{(i)} \quad \gamma(aH)^2 a_u^3 H_u^3 H_t = g\left[\frac{1}{5} i\mathfrak{g} + \frac{1}{10}\mathfrak{q}(ut)\right] - \frac{1}{20} i H(ut)^2. -$$

Um die Ausdrücke für eine weitere Anzahl Ueberschiebungen, nämlich für $(\mathfrak{q}, i)_2$, $(g, \mathfrak{m})_2$, $(i, \mathfrak{H})_1$, $(j, \mathfrak{H})_1$ und $(a\mathfrak{q})^2 a_u^3 \mathfrak{q}_v^2$, zu finden, werde ich von der schon oben benutzten Gordan'schen Formel (B) aus dem ersten Theile Gebrauch machen. Dieselbe liefert für $r_1 = i$, $r_2 = i$, $r_3 = \gamma$ und $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$ die Gleichung

$$(\mathfrak{q}, i)_2 = -\frac{1}{2}(ij) i_u j_u j_t,$$

oder da

$$(ij) i_u j_u j_t = D_t(i, j)_1 + \frac{1}{3}(i, j)_2(ut) = \varepsilon_u^2 \varepsilon_t + \frac{1}{3}\alpha(ut)$$

ist:

$$\text{(k)} \quad (\mathfrak{q}, i)_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_u^2 \varepsilon_t - \frac{1}{6}\alpha(ut). -$$

Sodann nehme ich $r_1 = j$, $r_2 = \gamma$, $r_3 = g$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ an. Dadurch resultirt

$$\big((j, \gamma)_1, g\big)_2 + \frac{6}{5}\big((j, \gamma)_2, g\big)_1 + \frac{1}{2}(j, \gamma)_2 g = \big((j, g)_2, \gamma\big)_1 + \frac{3}{4}(j, g)_3 \gamma.$$

Hierin ist $(j, g)_3 = 0$ zu Folge von (13), und aus gleichem Grunde verschwindet auch $(j, \gamma)_3 = D_t(j, g)_3$. Ausserdem ist

$$(j, \gamma)_2 = D_t(j, g)_2 + \frac{1}{4}(j, g)_3(ut) = \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_t.$$

Mithin ist

$$(g, m)_2 = \frac{6}{5}(\mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_t, g)_1 - (\mathfrak{h}, \gamma)_1,$$

oder da

$$(\mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_t, g)_1 = (\mathfrak{h}, \gamma)_1 - (\mathfrak{h}, g)_2(ut)$$

ist:

$$(g, m)_2 = \frac{1}{5}(\mathfrak{h}, \gamma)_1 - \frac{6}{5}(\mathfrak{h}, g)_2(ut),$$

also, wenn man (6) in § 2 und (12) in § 3 berücksichtigt

$$(g, m)_2 = -\frac{1}{5} R - \frac{1}{5} ij(ut). \quad (l)$$

Ferner bekommt man für $r_1 = \gamma$, $r_2 = \gamma$, $r_3 = i$ und $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ die Relation

$$\big((\gamma, \gamma)_2, i\big)_1 = \big((\gamma, i)_2, \gamma\big)_1,$$

oder, da

$$(\gamma, (\gamma, i)_2)_1 = (\gamma, i^2 i)_1 = (a\,|\,a_0^3 a_1 i_0 i_1 = D_1(\gamma, i)_1 + \frac{3}{5}(ut) D_1(g, i)_2 - \frac{3}{20}(g, i)_3 (ut)^2$$

ist:

$$(i, \xi)_1 = m_0^4 m_1 + \frac{3}{5} h_0^3 h_1 ut. \quad (m)$$

Eine weitere Gleichung ergiebt sich für $r_1 = \gamma$, $r_2 = \gamma$, $r_3 = j$ und $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$:

$$(\gamma, \gamma)_2, j)_1 = (\gamma, (j, \gamma)_2)_1 + \frac{1}{3}(\gamma, j)_2 \gamma.$$

Es bedeuten ist, wie schon oben bei Aufstellung der Gleichung (k) angeführt wurde, $\gamma, j)_2 = 0$ und $\gamma, j)_2 = h_0^2 j_1$. Demgemäss

$$j, \xi)_1 = (a\,|\,a_0^3 a_1 h_0^2 h_1.$$

Nun ist, wenn $\Sigma = \gamma, j)_2$ mit Σ_0^2 bezeichnet wird,

$$(a\,|\,a_0^3 a_1 h_0^2 h_1 = \Sigma_0^2 \Sigma_1 - \frac{1}{2}(a\,|\,\Sigma_0^3 g_1)_2 - \frac{1}{2} m^2 g_1.$$

Folglich hat man bei Berücksichtigung von Σ^2 und Φ die Identität

$$j, \xi)_1 = \Sigma_0^2 \Sigma_1 - \frac{1}{20} \Sigma_0^3 g_1 - \frac{3}{2} m^2 \gamma_1 - \frac{1}{2} g_1 m^2 i_1. \quad (n)$$

Um nun noch die Reihe der Polarenbildungen, die Covariante $(a\,|\,a_0^3 a_1^3$ welche drei Reihen von Variablen enthält, in passender Weise umzuformen, nehme ich in der Gordan'schen Formel $r_1 = a_0^4 a_1$, $r_2 = a_0^3 a_1^2 = a_0^2 a_2^3$ und $a_1 = \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 1$ an, und betrachte a_0, a_1 als diejenigen Variablen, bezüglich deren die Polarenbildungen gemacht werden:

$$(a\,|\,a_0^3 a_1^3 = \frac{1}{2}(a\,|\,a_0^4 a_2)_1 - (a\,|\,a_0^2 a_1^2 a_2)_1. \quad (o)$$

Für das erste Glied bekommt man mit Hilfe von $a_0 = a_1 - a_2$, u. s. w., wenn man die Polarenbildung unter Einführung x_1, x_2 für a_1, a_2 mit J_x bezeichnet

$$\frac{1}{2}(a\,|\,a_0^4 a_2)_1 = \frac{1}{2} J_x^4 a_1^4 a_2 - \frac{1}{2} J_x^3 a_1^3 a_2^2 + \frac{1}{2} J_x^2 a_1^2 a_2^3 - \frac{1}{2} J_x a_1 a_2^4.$$

$$\tfrac{1}{2}(aj)\,a_u^3 a_v j_v j_t = \tfrac{1}{2}\Big[D_v^2(\gamma, j)_1 + \tfrac{6}{5}(ut)D_v^2(g, j)_2 - \tfrac{1}{5}(vt)D_v(g, j)_2 + \tfrac{3}{10}(uv)(ut)D_v(g, j)_3 + \tfrac{3}{20}(uv)(vt)(g, j)_3\Big],$$

d. i., da nach (13) $(g, j)_3 = 0$,

$$\tfrac{1}{2}(aj)a_u^3 a_v j_v j_t = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}_u^3\mathfrak{m}_v^2 - \tfrac{1}{10}\mathfrak{h}_u^3\mathfrak{h}_v(vt) + \tfrac{3}{5}\mathfrak{h}_u^2\mathfrak{h}_v^2(ut).$$

Zur Umformung des zweiten Gliedes will ich ψ_v^2 als momentane Abkürzung für $(ab)^2 a_u^3 b_v^2 b_t$ einführen:

$$(ab)^2 a_u^3 b_v^2 b_t = \psi_v^2.$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich unter Benutzung der Identität

$$(ab)(uv) = a_u b_v - a_v b_u$$

in

$$\psi_v^2 = H_u^3 H_t H_v^2 - \tfrac{3}{10} i_u^2 (uv)(vt) + \tfrac{9}{10} i_u i_v (uv)(ut).$$

Wenn man nun in der Polare hiervon

$$\psi_v\psi_x = H_u^3 H_v H_t H_x + \tfrac{3}{20} i_u^2 (xu)(vt) - \tfrac{3}{20} i_u^2 (uv)(xt) - \tfrac{9}{20} i_u i_v (xu)(ut) + \tfrac{9}{20} i_u i_x (uv)(ut)$$

i_2', $-i_1'$ an Stelle von x_1, x_2 setzt, die beiden Seiten mit i_u' multiplirt und den resultirenden Ausdruck noch mittels

$$(i, i')i_u i_v' = \tfrac{1}{2}A(uv), \qquad i_u i_v i_u' i_v' = i_u^2 i_v^2 - \tfrac{1}{2}A(uv)^2,$$

$$i_v(ut) + i_u(tv) + i_t(vu) = 0$$

reducirt, so erhält man

$$(ab)^2(bi)a_u^3 b_v b_t i_v = -(iH)i_v' H_u^3 H_v H_t + \tfrac{3}{10} i_u^2 i_u' i_v'(vt) - \tfrac{3}{5} i_u^2 i_v'^2(ut) + \tfrac{9}{20} A(uv)^2(ut).$$

Um das erste Glied auf der rechten Seite noch weiter auszuwerthen, bilde ich gewisse Polaren der Gleichungen (4) und (5), die ich zugleich mittels der eben angewandten Identitäten vereinfache:

(23) $$(iH)[2i_v H_u^3 H_v H_t + 5 i_t H_u^3 H_v^2 + 3 i_u H_u^2 H_v^2 H_t] = 10\mathfrak{m}_u^3\mathfrak{m}_v^2 + \tfrac{2}{5} i_u^2 i_u' i_v'(vt) + \tfrac{3}{5} i_u^2 i_v'^2(ut) - \tfrac{1}{5}(uv)^2(ut)A,$$

(24) $$(iH)^2 H_u^3 H_v = \mathfrak{h}_u^3\mathfrak{h}_v - \tfrac{3}{10} i_u^2 i_u' i_v',$$

(25) $$(iH)^2 H_u^2 H_v^2 = \mathfrak{h}_u^2\mathfrak{h}_v^2 - \tfrac{3}{10} i_u^2 i_v'^2 + \tfrac{1}{10} A(uv)^2.$$

Auf Grund der ersten dieser Gleichungen geht $(iH)\,i_v H_u^3 H_v H_t$ in:

$$(iH)\,i_v H_u^3 H_v H_t = m_u^3 m_v^2 + \tfrac{1}{25}\, i_u^2 i'_u i'_v (vt) + \tfrac{3}{50}\, i_u^2 i'^2_v (ut)$$
$$- \tfrac{1}{50}\, A(uv)^2(ut) + \tfrac{4}{5}\,(iH)^2 H_u^3 H_v (vt)$$
$$- \tfrac{3}{10}\,(iH)^2 H_v^2 H_u^2 (ut)$$

über und verwandelt sich in Folge der beiden andern noch in

$$(iH)\,i_v H_u^3 H_v H_t = m_u^3 m_v^2 + \tfrac{4}{5}\, \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v (vt) - \tfrac{3}{10}\, \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (ut) - \tfrac{1}{5}\, i_u^2 i'_u i'_v (vt)$$
$$+ \tfrac{3}{20}\, i_u^2 i'^2_v (ut) - \tfrac{1}{20}\, A(uv)^2 (ut).$$

Folglich ist

$$(ab)^2\,(bi)\, a_u^3 b_v b_t i_v = -m_u^3 m_v^2 - \tfrac{4}{5}\, \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v (vt) + \tfrac{3}{10}\, \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (ut)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, i_u^2 i'_u i'_v (vt) - \tfrac{3}{4}\, i_u^2 i'^2_v (ut) + \tfrac{1}{2}\, A(uv)^2 (ut).$$

Substituirt man nun die gewonnenen Ausdrücke für $(aj)\, a_u^3 a_v j_v i_t$ und $(ab)^2 (bi)\, a_u^3 b_v b_t i_v$ in die obige Gleichung (22), so ergiebt sich

$$(o) \qquad (aq)^2 a_u^3 q_v^2 = -\tfrac{1}{2}\, m_u^3 m_v^2 - \tfrac{9}{10}\, \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v (vt) + \tfrac{9}{10}\, \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (ut)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, i_u^2 i'_u i'_v (vt) - \tfrac{3}{4}\, i_u^2 i'^2_v (ut) + \tfrac{1}{2}\, A(uv)^2 (ut)$$

als die definitive Darstellung.

§ 4.

Die Gleichungen zwischen den Covarianten, welche ich, wie oben in § 2 ausgeführt, nothwendig habe, um aus den Aggregaten, die bei der Operation δ auftreten, die Formen α, ε, R und AH zu eliminiren, will ich direct entwickeln, ohne auf die schon aufgestellten Syzyganten zurückzugehen. Es wird dies zum grössten Theil mit Hilfe der bekannten Identität

$$(1) \qquad f_1 (f_2, f_3)_1 + f_2 (f_3, f_1)_1 + f_2 (f_1, f_2)_1 = 0$$

geschehen. —

1) Von den beiden Syzyganten, welche zur Entfernung von α und ε dienen, ist die erste unmittelbar die schon in § 2 angeführte Syzygante, welche bei der hier gebräuchlichen Bezeichnung die Form

$$(\alpha) \qquad \alpha g = 2 i \mathfrak{h} - \tfrac{1}{2}\, i^3 + j^2 - AH$$

annimmt. Die andere entsteht einfach aus der Identität (1), indem man γ, i, j für f_1, f_2, f_3 setzt:

$$\gamma(\mathrm{i}, \mathrm{j})_1 + \mathrm{i}(\mathrm{j}, \gamma)_1 + \mathrm{j}(\gamma, \mathrm{i})_1 = 0,$$

d. i., wenn man für $(\mathrm{i}, \mathrm{j})_1$, $(\mathrm{j}, \gamma)_1$ und $(\gamma, \mathrm{i})_1$ ihre Bezeichnungen ε, $-\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ einführt:

$$(\beta) \qquad \varepsilon\gamma = \mathrm{i}\mathfrak{m} - \mathrm{j}\mathfrak{q}. -$$

2) Aus dieser Identität (1) folgen auch die beiden Gleichungen, die man gebraucht, um R zum Verschwinden zu bringen. Wenn man nämlich $f_1 = \gamma$, $f_2 = \mathrm{i}$, $f_3 = \mathfrak{H}$ werden lässt, so resultirt

$$\gamma(\mathrm{i}, \mathfrak{H})_1 + \mathrm{i}(\mathfrak{H}, \gamma)_1 + \mathfrak{H}(\gamma, \mathrm{i})_1 = 0.$$

Da aber $(\mathfrak{H}, \gamma)_1 = -\mathfrak{t}$, $(\gamma, \mathrm{i})_1 = \mathfrak{q}$ und mit Hilfe der Relationen (m), (15) und (b) im vorhergehenden Paragraphen

$$\begin{aligned}\gamma(\mathrm{i}, \mathfrak{H})_1 &= \gamma\left[\mathfrak{m}_u{}^4\mathfrak{m}_t + \tfrac{3}{5}\mathfrak{h}_u{}^3\mathfrak{h}_t(ut)\right] \\ &= [\mathfrak{m}\mathfrak{g} + (\gamma, \mathfrak{m})_1(ut)] + \tfrac{3}{5}[\mathfrak{h}\mathfrak{g} + (\gamma, \mathfrak{h})_1(ut)](ut) \\ &= \mathfrak{m}\mathfrak{g} + \left\{\mathfrak{h}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\mathrm{j}\mathfrak{H}\right\}(ut) + R(ut)^2\end{aligned}$$

ist, so ergiebt sich

$$(\gamma, 1) \qquad R(ut)^2 = \left\{-\mathfrak{m}\mathfrak{g} + \mathrm{i}\mathfrak{t} - \mathfrak{q}\mathfrak{H}\right\} + \left\{-\mathfrak{h}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathrm{j}\mathfrak{H}\right\}(ut).$$

Zur zweiten dieser Gleichungen gelangt man dadurch, dass wiederum in (1) γ, bez. j und $\mathfrak{H}$ für f_1, bez. f_2 und f_3 annimmt:

$$\gamma(\mathrm{j}, \mathfrak{H})_1 + \mathrm{j}(\mathfrak{H}, \gamma)_1 + \mathfrak{H}(\gamma, \mathrm{j})_1 = 0.$$

Hierin ist $(\mathfrak{H}, \gamma)_1 = -\mathfrak{t}$, sodann $(\gamma, \mathrm{j})_1 = \mathfrak{m}$, und ferner zu Folge von (n), (15) und (c) in § 3 und der obigen Syzygante (β)

$$\begin{aligned}\gamma(\mathrm{j}, \mathfrak{H})_1 &= \gamma\left[R_u{}^5 R_t + \tfrac{1}{60}\{3\mathrm{i}\mathrm{j}_u{}^2\mathrm{j}_t + 2\mathrm{i}_u\mathrm{i}_t\mathrm{j}\}(ut) + \tfrac{1}{5}\varepsilon(ut)^2\right] \\ &= R\mathfrak{g} + (\gamma, R)_1(ut) + \tfrac{1}{12}\mathrm{i}\mathrm{j}\mathfrak{g}(ut) + \left\{\tfrac{1}{60}(3\mathrm{i}\mathfrak{m} + 2\mathrm{j}\mathfrak{q}) + \tfrac{1}{5}\varepsilon\gamma\right\}(ut)^2 \\ &= R\mathfrak{g} + \left\{\tfrac{1}{6}\mathrm{i}\mathrm{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}\mathfrak{H}\right\}(ut) + \left\{\tfrac{1}{80}(3\mathrm{i}\mathfrak{m} + 2\mathrm{j}\mathfrak{q}) + \tfrac{2}{5}\varepsilon\gamma\right\}(ut)^2 \\ &= R\mathfrak{g} + \left\{\tfrac{1}{6}\mathrm{i}\mathrm{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}\mathfrak{H}\right\}(ut) + \left\{\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{m} - \tfrac{1}{3}\mathrm{j}\mathfrak{q}\right\}(ut)^2.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}(\gamma, 2) \qquad R\mathfrak{g} = &\left\{\mathrm{j}\mathfrak{t} - \mathfrak{m}\mathfrak{H}\right\} + \left\{-\tfrac{1}{6}\mathrm{i}\mathrm{j}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}\mathfrak{H}\right\}(ut) \\ &+ \left\{-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{m} + \tfrac{1}{3}\mathrm{j}\mathfrak{q}\right\}(ut)^2.\end{aligned}$$

3) Es bleiben jetzt noch die beiden Gleichungen zu entwickeln

übrig, mittels deren man AH eliminiren kann. Als Ausgangspunkt für die eine dient die Identität*)

$$f_1f_2(f_3,f_4)_2+2(f_1,f_2)_1(f_3,f_4)_1+(f_1,f_2)_2f_3f_4-f_1f_4(f_3,f_2)_2 \\ -2(f_1,f_4)_1(f_3,f_2)_1-(f_1,f_4)_2f_3f_2=0,$$

in der ich i an Stelle von f_1 und f_2, γ an Stelle von f_3 und f_4 substituire. Ich bekomme

$$\gamma^2(\mathfrak{i},\mathfrak{i})_2+2(\gamma,\gamma)_1(\mathfrak{i},\mathfrak{i})_1+(\gamma,\gamma)_2\mathfrak{i}^2-2\mathfrak{i}\gamma(\mathfrak{i},\gamma)_2+2(\gamma,\mathfrak{i})_1^2=0,$$

oder da

$$\gamma^2=g\mathfrak{g}-\tfrac{1}{2}H(ut)^2,\quad (\mathfrak{i},\mathfrak{i})_2=A,\quad (\gamma,\gamma)_1=0,\quad (\gamma,\gamma)_2=\mathfrak{H},$$
$$\gamma(\mathfrak{i},\gamma)_2=\gamma\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t=\mathfrak{j}\mathfrak{g}+\mathfrak{m}(ut),\quad (\gamma,\mathfrak{i})_1=\mathfrak{q}$$

ist:

$$(\delta,1)\quad AH(ut)^2=\{2\mathfrak{A}\mathfrak{g}+2\mathfrak{i}^2\mathfrak{H}-4\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{g}+4\mathfrak{q}^2\}-4\mathfrak{i}\mathfrak{m}(ut).\ -$$

Um die zweite Gleichung herzustellen, gehe ich wieder von der Identität (1) aus, in der ich g, bez. γ und $\mathfrak{g}$ für f_1, bez. f_2 und f_3 einführe:

$$g(\gamma,\mathfrak{g})_1+\gamma(\mathfrak{g},g)_1+\mathfrak{g}(g,\gamma)_1=0.$$

Nun ist auf Grund der Formel $(ab)(ut)=a_ub_t-a_tb_u$, wie unmittelbar klar, $(\gamma,\mathfrak{g})_1=\frac{1}{2}\mathfrak{H}(ut)$, $(\mathfrak{g},g)_1=-H_u^5H_t(ut)$ und $(g,\gamma)_1=\frac{1}{2}H(ut)$. Demnach ist

$$\mathfrak{g}H=2\gamma H_u^5H_t-g\mathfrak{H}.$$

Diese Gleichung multiplicire ich mit $A\mathfrak{g}$, verwandele $\mathfrak{g}H_u^5H_t$ in:

$$\mathfrak{g}H_u^5H_t=\gamma H_u^4H_t^2-(aH)a_u^4H_u^3H_t^2(ut)+(aH)^2a_u^3H_u^3H_t(ut)^2,$$

und ersetze γ^2 durch $g\mathfrak{g}-\frac{1}{2}H(ut)^2$, $H_u^4H_t^2$ durch $\mathfrak{H}+\frac{1}{5}\mathfrak{i}(ut)^2$ und die beiden übrigen Terme durch ihre Ausdrücke (h) und (i) in § 3. Es ergiebt sich dadurch

$$\mathfrak{g}^2AH=\mathfrak{A}[\mathfrak{g}\mathfrak{H}-2\mathfrak{t}(ut)+\mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut)^2]-AH(ut)^2\left[2\mathfrak{H}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{i}(ut)^2\right].$$

Hieraus eliminire ich mittels der eben gefundenen Relation $(\delta,1)$ den den Ausdruck $AH(ut)^2$ und erhalte dadurch

$$(\delta,2)\quad \mathfrak{g}^2AH=\{-3\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{g}-4\mathfrak{i}^2\mathfrak{H}^2+8\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{g}\mathfrak{H}-8\mathfrak{q}^2\mathfrak{H}\}+\{8\mathfrak{i}\mathfrak{m}\mathfrak{H} \\ -2\mathfrak{A}\mathfrak{t}\}(ut)+\{-\mathfrak{i}^3\mathfrak{H}+2\mathfrak{i}^2\mathfrak{j}\mathfrak{g}-\mathfrak{q}^2\mathfrak{i}\}(ut)^2+2\mathfrak{i}^2\mathfrak{m}(ut)^3$$

als die endgültige Form der Gleichung.

*) Vergl. Stroh, Ueber eine fundamentale Eigenschaft u. s. w., Math. Ann. Bd. 33, S. 97.

§ 5.

Ich gehe jetzt dazu über, die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ für die vier Fälle, auf welche sich die allgemeinste dieser Operationen reduciren lässt, thatsächlich durchzuführen. Dabei werde ich dasselbe Verfahren einschlagen wie im ersten Theil. —

Dies soll zuerst für den Fall geschehen, dass bei dem Aronhold'schen Process nach den Coefficienten von g differentiirt und die Covariante $H_v^2 H_x^4(xt)$ benutzt wird. Dem δ füge ich, um dies zu markiren, den Index 1 an. Wenn daher die Function, die durch den Aronhold'schen Process aus $g = a_u^5$ entsteht, mit $\bar{a}_u^5$ bezeichnet wird, so ist also hier

(1) $$\delta_1 g = \bar{a}_u^5 = H_u^4 H_v^2 (ut). —$$

1) Da (ut) die Coefficienten von g überhaupt nicht enthält, so ist unmittelbar einleuchtend, dass

Ia. $$\underset{v=u}{\delta_1} (ut) = 0. —$$

2) Indem man sodann in (1) zweimal durch Polarenbildung t_1, t_2 an Stelle von u_1, u_2 einführt:

$$\bar{a}_u^3 \bar{a}_t^2 = \frac{3}{5} H_u^2 H_v^2 H_t^2 (ut),$$

und dann vom Aronhold'schen Process zu der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ übergeht, indem man u_1, u_2 für v_1, v_2 setzt, so findet man

$$\underset{v=u}{\delta_1} \mathfrak{g} = \frac{3}{5} H_u^4 H_t^2 (ut),$$

oder nach (4) in § 2:

IIa. $$\underset{v=u}{\delta_1} \mathfrak{g} = \frac{3}{5} \mathfrak{H}(ut) + \frac{3}{25} \mathfrak{i} (ut)^3. —$$

3) Da ferner nach Formel (A') im ersten Theil

$$\delta_1 \mathfrak{i} = \delta_1 [(ab)^4 a_u b_u] = 2(\bar{a}b)^4 \bar{a}_u b_u$$

ist, so erhält man, wenn man in die vierte Polare von (1), d. i. in

$$\bar{a}_u \bar{a}_x^4 = \frac{4}{5} H_u H_v^2 H_x^3 (xt) + \frac{1}{5} H_v^2 H_x^4 (ut)$$

b_2, bez. $-b_1$ für x_1, bez. x_2 substituirt und die Gleichung mit b_u multiplicirt:

$$\delta_1 \mathfrak{i} = -\frac{8}{5} (bH)^3 b_u b_t H_v^2 H_u + \frac{2}{5} (bH)^4 b_u H_v^2 (ut).$$

Um die rechte Seite durch Polaren von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{j}$ darzustellen, nehme ich die Formel (2) in § 3 zu Hilfe und mache zugleich von den

Identitäten $(bH)(ut) = b_u H_t - b_t H_u$ und $(bH)(vt) = b_v H_t - b_t H_v$ Gebrauch:

$$\delta_1 \mathfrak{i} = -\frac{4}{25}\mathfrak{q}_u^2 \mathfrak{q}_v^2 - \frac{1}{30}(bH)^4(14 b_v H_u H_v - 17 b_u H_v^2)(ut)$$
$$+\frac{1}{30}(bH)^4(5 b_v H_u^2 + 34 b_u H_u H_v)(vt),$$

und benutze sodann die Relationen (3) und (13) in § 3. Ich bekomme

$$\delta_1 \mathfrak{i} = -\frac{4}{25}\mathfrak{q}_u^2 \mathfrak{q}_v^2 - \frac{26}{25}\mathfrak{j}_u^2 \mathfrak{j}_v (vt) - \frac{2}{25}\mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_v^2 (ut). \tag{2}$$

Und hieraus folgt, indem ich v_1, v_2 in u_1, u_2 übergehen lasse:

$$\underset{v=u}{\delta_1}\, \mathfrak{i} = -\frac{4}{25}\mathfrak{q} - \frac{28}{25}\mathfrak{j}(ut). - \tag{III a.}$$

4) Setze ich $\delta_1 \mathfrak{i} = \bar{\mathfrak{i}}_u^2$, so ist ebenfalls nach der Formel (A) im ersten Theil

$$\delta_1 \mathfrak{q} = \delta_1[(a\mathfrak{i}) a_u^3 a_t \mathfrak{i}_u]$$
$$= (\bar{a}\mathfrak{i})\, \bar{a}_u^3 \bar{a}_t \mathfrak{i}_u + (a\bar{\mathfrak{i}}) a_u^3 a_t \bar{\mathfrak{i}}_u.$$

Die beiden letzten Glieder nehmen auf Grund der Gleichungen

$$\bar{a}_u^3 \bar{a}_t \bar{a}_x = \frac{1}{5} H_u^3 H_v^2 H_t (xt) + \frac{3}{5} H_u^2 H_v^2 H_t H_x (ut),$$
$$\bar{\mathfrak{i}}_u \bar{\mathfrak{i}}_x = -\frac{4}{25}\mathfrak{q}_u \mathfrak{q}_v^2 \mathfrak{q}_x - \frac{1}{25}\mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_v^2 (xt) - \frac{1}{25}\mathfrak{j}_v^2 \mathfrak{j}_x (ut)$$
$$-\frac{26}{25}\mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_v \mathfrak{j}_x (vt),$$

welche durch Polarenbildung aus (1) und (2) entstehen, die Form an:

$$\delta_1 \mathfrak{q} = \Big[\frac{1}{5}\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_t H_u^3 H_v^2 H_t - \frac{3}{5}(\mathfrak{i}H)\,\mathfrak{i}_u H_u^2 H_v^2 H_t (ut)\Big]$$
$$+\Big[-\frac{4}{25}(a\mathfrak{q}) a_u^3 a_t \mathfrak{q}_u \mathfrak{q}_v^2 + \frac{1}{25} a_u^3 a_t^2 \mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_v^2 - \frac{1}{25}(a\mathfrak{j}) a_u^3 a_t \mathfrak{j}_v^2 (ut)$$
$$-\frac{26}{25}(a\mathfrak{j}) a_u^3 a_t \mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_v (vt)\Big].$$

Mithin ist

$$\underset{v=u}{\delta_1}\, \mathfrak{q} = \Big[\frac{1}{5}\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_t H_u^5 H_t - \frac{3}{5}(\mathfrak{i}H)\mathfrak{i}_u H_u^4 H_t (ut)\Big]$$
$$+\Big[-\frac{4}{25}(a\mathfrak{q}) a_u^3 a_t \mathfrak{q}_u^3 + \frac{1}{25} a_u^3 a_t^2 \mathfrak{j}_u^3 - \frac{27}{25}(a\mathfrak{j}) a_u^3 a_t \mathfrak{j}_u^2 (ut)\Big].$$

Die erste Klammer hierin ist, wie man mit Hilfe der Identität

$$(\mathfrak{i}H)\,(ut) = \mathfrak{i}_u H_t - \mathfrak{i}_t H_u$$

erkennt, gleich

$$\frac{1}{5}\mathfrak{i}_u^2 H_u^4 H_t^2 - \frac{2}{5}(\mathfrak{i}H)(\mathfrak{i}_u H_u^4 H_t + \mathfrak{i}_t H_u^5)(ut) - \frac{2}{5}(\mathfrak{i}H)^2 H_u^4 (ut)^2,$$

oder, wie sich bei Berücksichtigung von (4) in § 2 und (4) und (5) in § 3 ergiebt:

$$\frac{1}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H} - \frac{4}{5}\,\mathfrak{m}\,(ut) + \left\{-\frac{2}{5}\,\mathfrak{h} + \frac{2}{25}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut)^2.$$

Die zweite Klammer hat, da $(a\mathfrak{q})a_u^3 a_t \mathfrak{q}_u^3 = (\gamma, \mathfrak{q})_1$ nach (a) in § 3 gleich $\frac{1}{4}\,\mathfrak{j}\mathfrak{g} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H} + \frac{1}{4}\,\mathfrak{m}\,(ut)$ und $(a\mathfrak{j})\,a_u^3 a_t\,\mathfrak{j}_u^2 = (\gamma, \mathfrak{j})_1 = \mathfrak{m}$ ist, den Werth

$$\frac{2}{25}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H} - \frac{28}{25}\,\mathfrak{m}(ut).$$

Demgemäss hat man für $\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{q}$ den Ausdruck

IVa. $$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{q} = \frac{7}{25}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H} - \frac{48}{25}\,\mathfrak{m}(ut) + \left\{-\frac{2}{5}\,\mathfrak{h} + \frac{2}{25}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut)^2$$

gefunden. —

5) Bei der Form $\mathfrak{j}$ resultirt aus

$$\begin{aligned}\delta_1\mathfrak{j} &= \delta_1[(a\mathfrak{i})^2 a_u^3] \\ &= (\bar{a}\mathfrak{i})^2 \bar{a}_u^3 + (a\bar{\mathfrak{i}})^2 a_u^3,\end{aligned}$$

wenn ich die Gleichung (2) und die Polare von (1), d. i.

$$\bar{a}_u^3 \bar{a}_x^2 = \frac{2}{5}\,H_u^3 H_v^2 H_x\,(xt) + \frac{3}{5}\,H_u^2 H_v^2 H_x^2 (ut)$$

berücksichtige, der Ausdruck

(3) $$\begin{aligned}\delta_1\mathfrak{j} = &\left[-\frac{2}{5}\,(\mathfrak{i}H)\mathfrak{i}_t H_u^3 H_v^2 + \frac{3}{5}\,(\mathfrak{i}H)^2 H_u^2 H_v^2 (ut)\right] \\ &+ \left[-\frac{4}{25}\,(a\mathfrak{q})^2 a_u^3 \mathfrak{q}_v^2 + \frac{2}{25}\,(a\mathfrak{j})\,a_u^3 a_t \mathfrak{j}_v^2 - \frac{26}{25}\,(a\mathfrak{j})^2 a_u^3 \mathfrak{j}_v\,(vt)\right].\end{aligned}$$

Die erste Klammer wandele ich auf dieselbe Weise unter Benutzung von (23), (24) und (25) in § 3 um, wie es an der eben citirten Stelle mit der Function $(\mathfrak{i}H)\mathfrak{i}_v H_u^3 H_v H_t$ geschah. Es ist

(4) $$\begin{aligned}&-\frac{2}{5}\,(\mathfrak{i}H)\mathfrak{i}_t H_u^3 H_v^2 + \frac{3}{5}\,(\mathfrak{i}H)^2 H_u^2 H_v^2 (ut) \\ &= \left[-\frac{2}{5}\,\mathfrak{m}_u^3 \mathfrak{m}_v^2 - \frac{3}{125}\,\mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_v'^2 (ut) - \frac{2}{125}\,\mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_u' \mathfrak{i}_v' (vt) + \frac{1}{125}\,A(uv)^2 (ut)\right] \\ &\quad + \frac{18}{25}\,(\mathfrak{i}H)^2 H_u^2 H_v^2 (ut) + \frac{2}{25}\,(\mathfrak{i}H)^2 H_u^3 H_v (vt) \\ &= -\frac{2}{5}\,\mathfrak{m}_u^3 \mathfrak{m}_v^2 + \frac{2}{25}\,\mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v (vt) + \frac{18}{25}\,\mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (ut) - \frac{1}{25}\,\mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_u' \mathfrak{i}_v' (vt) \\ &\quad - \frac{6}{25}\,\mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_v'^2 (ut) + \frac{2}{25}\,A(uv)^2 (ut).\end{aligned}$$

Bei der zweiten Klammer ist der Ausdruck für $(a\mathfrak{q})^2 a_u^3 \mathfrak{q}_v^2$ schon oben, (siehe (o) in § 3) bestimmt; sodann ist

$$(5)\quad (a\mathfrak{j})a_u^3 a_t \mathfrak{j}_v^2 = D_v^2(\gamma, \mathfrak{j})_1 - \frac{6}{5} D_v(g, \mathfrak{j})_2 (vt) + \frac{6}{5} D_v^2(g, \mathfrak{j})_2 (ut)$$
$$+ \frac{3}{10}(uv)(ut) D_v(g, \mathfrak{j})_3 - \frac{3}{5}(uv)(vt)(g, \mathfrak{j})_3$$
$$= \mathfrak{m}_u^3 \mathfrak{m}_v^2 - \frac{6}{5} \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v (vt) + \frac{6}{5} \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (ut)$$

und

$$(6)\qquad (a\mathfrak{j})^2 a_u^3 \mathfrak{j}_v = D_v(g, \mathfrak{j})_2 + \frac{3}{4}(g, \mathfrak{j})_3 (uv) = \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v .$$

Folglich hat die zweite Klammer in (3) den Werth

$$(7)\quad \frac{4}{25} \mathfrak{m}_u^3 \mathfrak{m}_v^2 - \frac{124}{125} \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v (vt) - \frac{6}{125} \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (ut) - \frac{2}{25} \mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_u' \mathfrak{i}_v' (vt)$$
$$+ \frac{3}{25} \mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_v'^2 (ut) - \frac{2}{25} A(uv)^2 (ut).$$

Indem man nun diese Darstellungen (4) und (7) der beiden Klammern oben in (3) einführt, erhält man

$$(8)\quad \delta_1 \mathfrak{j} = -\frac{6}{25} \mathfrak{m}_u^3 \mathfrak{m}_v^2 - \frac{114}{125} \mathfrak{h}_u^3 \mathfrak{h}_v (vt) + \frac{84}{125} \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (ut)$$
$$- \frac{3}{25} \mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_u' \mathfrak{i}_v' (vt) - \frac{3}{25} \mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_v'^2 (ut).$$

Hieraus folgt speciell, wenn ich zu dem Process $\underset{v=u}{\delta_1}$ übergehe:

$$\text{Va.}\qquad \underset{v=u}{\delta_1} \mathfrak{j} = -\frac{6}{25} \mathfrak{m} - \frac{6}{25} \{\mathfrak{h} + \mathfrak{i}^2\} (ut). -$$

6) Wenn ich ferner $\delta_1 \mathfrak{j}$ mit $\bar{\mathfrak{j}}_u^3$ bezeichne, so ist

$$\delta_1 \mathfrak{m} = \delta_1 [(a\mathfrak{j}) a_u^3 a_t \mathfrak{j}_u^2]$$
$$= (\bar{a}\mathfrak{j}) \bar{a}_u^3 \bar{a}_t \mathfrak{j}^2 + (a\bar{\mathfrak{j}}) a_u^3 a_t \bar{\mathfrak{j}}_u^2,$$

und hiervon nimmt die linke Seite auf Grund der aus (1) und (8) durch Polarenbildung entstehenden Gleichungen

$$(9)\quad a_u^3 \bar{a}_t \bar{a}_x = \frac{1}{5} H_u^3 H_v^2 H_t (xt) + \frac{3}{5} H_u^2 H_v^2 H_t H_x (ut),$$
$$\bar{\mathfrak{j}}_u^2 \bar{\mathfrak{j}}_x = -\frac{6}{25} \mathfrak{m}_u^2 \mathfrak{m}_v^2 \mathfrak{m}_x + \frac{28}{125} \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v^2 (xt) - \frac{114}{125} \mathfrak{h}_u^2 \mathfrak{h}_v \mathfrak{h}_x (vt)$$
$$+ \frac{56}{125} \mathfrak{h}_u \mathfrak{h}_v^2 \mathfrak{h}_x (ut) - \frac{1}{25} \mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_v'^2 (xt) - \frac{3}{25} \mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_v' \mathfrak{i}_x' (vt)$$
$$- \frac{2}{25} \mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_x \mathfrak{i}_v'^2 (ut) - \frac{1}{25} A(xu)(uv)(vt),$$

wenn ich zugleich noch v_1, v_2 gleich u_1, u_2 setze, die folgende Form an:

$$\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{m} = \left[\tfrac{1}{5}\,\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t H_u^5 H_t - \tfrac{3}{5}(\mathfrak{j}H)\mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t(ut)\right]$$
$$+\left[-\tfrac{6}{25}(a\mathfrak{m})a_u^3 a_t \mathfrak{m}_u^4 - \tfrac{28}{125}a_u^3 a_t^2 \mathfrak{h}_u^4 - \tfrac{58}{125}(a\mathfrak{h})a_u^3 a_t \mathfrak{h}_u^3(ut)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{25}a_u^3 a_t^2 \mathfrak{i}_u^2 \mathfrak{i}_u'^2 - \tfrac{1}{5}(ai)a_u^3 a_t \mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_u'^2(ut)\right].$$

In derselben müssen noch die Glieder $\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t H_u^5 H_t$, $(\mathfrak{j}H)\mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t$, $(a\mathfrak{m})a_u^3 a_t \mathfrak{m}_u^4$ und $(a\mathfrak{h})a_u^3 a_t \mathfrak{h}_u^3$ umgeformt werden. Man hat

$$\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t H_u^5 H_t = \mathfrak{j}_u^3 H_u^4 H_t^2 - \tfrac{1}{4}(\mathfrak{j}H)(5\mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t - \mathfrak{j}_u\mathfrak{j}_t H_u^5)(ut)$$
$$+\tfrac{1}{4}(\mathfrak{j}H)^2\mathfrak{j}_u H_u^4(ut)^2,$$

$$(\mathfrak{j}H)\mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{j}H)(5\mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t - \mathfrak{j}_u\mathfrak{j}_t H_u^5) - \tfrac{1}{4}(\mathfrak{j}H)^2\mathfrak{j}_u H_u^4)(ut),$$

also bei Beachtung von (4) in § 2 und (6) und (12) in § 3:

$$\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t H_u^5 H_t = \mathfrak{j}\mathfrak{H} - R(ut) + \tfrac{1}{6}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2,$$

$$(\mathfrak{j}H)\mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t = R + \tfrac{1}{30}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut).$$

Die beiden übrigen sind schon oben, vergl. (b) in § 3 und (6) in § 2, bestimmt worden:

$$(a\mathfrak{m})a_u^3 a_t \mathfrak{m}_u^4 = (\gamma, \mathfrak{m})_1 = \tfrac{2}{5}\mathfrak{h}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{j}\mathfrak{H} + \tfrac{2}{5}R(ut),$$
$$(a\mathfrak{h})a_u^3 a_t \mathfrak{h}_u^3 = (\gamma, \mathfrak{h})_1 = R.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke bekommt man

VIa.
$$\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{m} = \left\{-\tfrac{8}{25}\mathfrak{h}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{25}\mathfrak{i}^2\mathfrak{g} + \tfrac{8}{25}\mathfrak{j}\mathfrak{H}\right\}$$
$$+\left\{-\tfrac{34}{25}R - \tfrac{1}{5}\mathfrak{i}\mathfrak{q}\right\}(ut) + \tfrac{1}{75}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2. -$$

7) Ganz entsprechend verfahre ich, um $\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{h}$ zu bestimmen. Indem ich die aus (1) und (8) abgeleiteten Gleichungen

$$\bar{a}_u^3\bar{a}_x^2 = \tfrac{2}{5}H_u^3 H_v^2 H_x(xt) + \tfrac{3}{5}H_u^2 H_v^2 H_x^2(ut),$$
$$\bar{\mathfrak{j}}_u\bar{\mathfrak{j}}_x^2 = -\tfrac{6}{25}\mathfrak{m}_u\mathfrak{m}_v^2\mathfrak{m}_x^2 + \tfrac{56}{125}\mathfrak{h}_u\mathfrak{h}_v^2\mathfrak{h}_x(xt) - \tfrac{114}{125}\mathfrak{h}_u\mathfrak{h}_v\mathfrak{h}_x^2(vt)$$
$$+\tfrac{28}{125}\mathfrak{h}_v^2\mathfrak{h}_x^2(ut) - \tfrac{2}{25}\mathfrak{i}_u\mathfrak{i}_x\mathfrak{i}_v'^2(xt) - \tfrac{3}{25}\mathfrak{i}_u\mathfrak{i}_v\mathfrak{i}_x'^2(vt)$$
$$-\tfrac{1}{25}\mathfrak{i}_v^2\mathfrak{i}_x'^2(ut) + \tfrac{1}{25}A(xu)(xv)(vt)$$

benutze, finde ich, dass

$$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{h} = \underset{v=u}{\delta_1}\,[(a\mathfrak{j})^2 a_u^3 \mathfrak{j}_u]$$
$$= [(\bar{a}\mathfrak{j})^2 \bar{a}_u^3 \mathfrak{j}_u + (a\bar{\mathfrak{j}})^2 a_u^3 \bar{\mathfrak{j}}_u]_{v=u}$$
$$= \Big[-\tfrac{2}{5}(\mathfrak{j}H)\mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_t H_u^5 + \tfrac{3}{5}(\mathfrak{j}H)^2 \mathfrak{j}_u H_u^4(ut)\Big]$$
$$+ \Big[-\tfrac{6}{25}(a\mathfrak{m})^2 a_u^3 \mathfrak{m}_u^3 - \tfrac{56}{125}(a\mathfrak{h}) a_u^3 a_t \mathfrak{h}_u^3 - \tfrac{86}{125}(a\mathfrak{h})^2 a_u^3 \mathfrak{h}_u^2(ut)$$
$$+ \tfrac{2}{25}(a\mathfrak{i}) a_u^3 a_t \mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_u'^2 - \tfrac{4}{25}(a\mathfrak{i})^2 a_u^3 \mathfrak{i}_u'^2(ut) + \tfrac{1}{25} A a_u^5(ut)\Big],$$

oder

$$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{h} = \Big[-\tfrac{1}{10}(\mathfrak{j}H)(5\mathfrak{j}_u^2 H_u^4 H_t - \mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_t H_u^5) + \tfrac{11}{10}(\mathfrak{j}H)^2 \mathfrak{j}_u H_u^4(ut)\Big]$$
$$+ \Big[-\tfrac{6}{25}(g, \mathfrak{m})_2 - \tfrac{56}{125}(\gamma, \mathfrak{h})_1 - \tfrac{86}{125}(g, \mathfrak{h})_2(ut)$$
$$+ \tfrac{2}{25}(\gamma, \mathfrak{i})_1 \mathfrak{i} - \tfrac{4}{25}(g, \mathfrak{i})_2 \mathfrak{i}(ut) + \tfrac{1}{25} A g(ut)\Big],$$

und hieraus folgt, wenn ich die Gleichungen (6), (12) und (1) in § 3 zu Hilfe nehme, der nachstehende Ausdruck:

VIIa. $$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{h} = \Big\{\tfrac{2}{25}\mathfrak{i}\mathfrak{q} - \tfrac{4}{5}R\Big\} + \Big\{-\tfrac{28}{75}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \tfrac{1}{25}\mathfrak{A}\Big\}(ut). -$$

8) Sodann, da $\mathfrak{A}$ das Product Ag bedeutet, hat man

$$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{A} = A \underset{v=u}{\delta_1}\, g + g \underset{v=u}{\delta_1}\, A.$$

Für $\underset{v=u}{\delta_1}\, g$ ergiebt sich unmittelbar aus (1)

$$\underset{v=u}{\delta_1}\, g = H(ut).$$

Ferner ist

$$\delta_1 A = \delta_1[(\mathfrak{i}\mathfrak{i}')^2] = 2(\mathfrak{i}\bar{\mathfrak{i}})^2,$$

also nach (2)

$$\underset{v=u}{\delta_1} A = -\tfrac{8}{25}(\mathfrak{q}\mathfrak{i})^2 \mathfrak{q}_u^2 + \tfrac{4}{25}(\mathfrak{i}\mathfrak{j})\mathfrak{i}_t \mathfrak{j}_u^2 - \tfrac{52}{25}(\mathfrak{i}\mathfrak{j})^2 \mathfrak{j}_u(ut).$$

Da hierin das erste Glied auf der rechten Seite $(\mathfrak{q}\mathfrak{i})^2 \mathfrak{q}_u^2 = (\mathfrak{q}, \mathfrak{i})_2$ nach (k) in § 3 den Werth

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon_u^2 \varepsilon_t - \tfrac{1}{6}\alpha(ut)$$

hat, und

$$(10) \qquad (\mathfrak{i}\mathfrak{j})\mathfrak{i}_t \mathfrak{j}_u^2 = D_t(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})_1 - \tfrac{2}{3}(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})_2(ut)$$
$$= \varepsilon_u^2 \varepsilon_t - \tfrac{2}{3}\alpha(ut)$$

ist, so resultirt

$$\underset{v=u}{\delta_1} A = \tfrac{8}{25}\varepsilon_u^2 \varepsilon_t - \tfrac{32}{15}\alpha(ut).$$

Demgemäss ist der Ausdruck von $\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{A}$ selbst

$$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{A} = \tfrac{8}{25}\,\varepsilon_u^2\varepsilon_t g + \left\{AH - \tfrac{32}{15}\,\alpha g\right\}(ut).$$

In demselben ersetze ich $\varepsilon_u^2\varepsilon_t g$ mittels der Gleichung (g) in § 3 durch $\varepsilon\gamma$:

$$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{A} = \tfrac{8}{25}\,\varepsilon\gamma + \left\{AH - \tfrac{52}{25}\,\alpha g + \tfrac{4}{25}\,\mathrm{i}\mathfrak{h} - \tfrac{4}{25}\,\mathrm{i}^2\right\}(ut),$$

und eliminire hierauf, um zu der definitiven Gleichung zu gelangen, die Formen α und ε mittels der Syzyganten (α) und (β):

VIIIa. $$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{A} = \left\{\tfrac{8}{25}\,\mathrm{i}\mathfrak{m} - \tfrac{8}{25}\,\mathrm{i}\mathfrak{q}\right\}$$
$$+\left\{-4\,\mathrm{i}\mathfrak{h} + \tfrac{26}{25}\,\mathrm{i}^3 - \tfrac{56}{25}\,\mathrm{i}^2 + \tfrac{77}{25}\,AH\right\}(ut).-$$

9) Den Ausdruck für $\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{H}$ will ich nicht direct bestimmen, sondern vielmehr zuerst denjenigen von $\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x$ aufstellen und hieraus dann den ersteren ableiten, indem ich $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ werden lasse, denn wie es sich später zeigen wird, brauche ich die für $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ ausgerechnete Polare von $\delta_1\mathfrak{H}$, d. i. $\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x$, um $\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{t}$ zu bilden. Aus

$$\begin{aligned}\delta_1\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x &= \delta_1[(ab)^2 a_u^2 a_t b_u b_t b_x]\\ &= (\bar{a}b)^2\bar{a}_u^2\bar{a}_t b_u b_t b_x + (a\bar{b})^2 a_u^2 a_t \bar{b}_u\bar{b}_t\bar{b}_x\end{aligned}$$

folgt unter Benutzung der aus (1) hervorgehenden Gleichungen

$$\bar{a}_u^2\bar{a}_t\bar{a}_y^2 = \tfrac{2}{5}\,H_u^2H_v^2H_tH_y(yt) + \tfrac{2}{5}\,H_uH_v^2H_tH_y^2(ut),$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_u\bar{a}_t\bar{a}_x\bar{a}_y^2 &= \tfrac{2}{5}\,H_uH_v^2H_tH_xH_y(yt) + \tfrac{1}{5}\,H_uH_v^2H_tH_y^2(xt)\\ &\quad + \tfrac{1}{5}\,H_v^2H_tH_xH_y^2(ut),\end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned}\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x &= \left[-\tfrac{2}{5}\,(aH)a_ua_t^2a_xH_u^4H_t + \tfrac{2}{5}\,(aH)^2a_ua_ta_xH_u^3H_t(ut)\right]\\ &\quad + \left[-\tfrac{2}{5}\,(aH)a_u^2a_t^2H_u^3H_tH_x + \tfrac{1}{5}\,(aH)^2a_u^2a_tH_u^3H_t(xt)\right.\\ &\quad \left. + \tfrac{1}{5}\,(aH)^2a_u^2a_tH_u^2H_tH_x(ut)\right],\end{aligned}$$

oder wenn man die Identitäten

$$(aH)(ut) = a_uH_t - a_tH_u$$

und

$$(aH)(xt) = a_xH_t - a_tH_x$$

zur Umformung gebraucht:

$$\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = \Big[-\tfrac{2}{5}(aH)a_u^2a_ta_xH_u^3H_t^2+\tfrac{4}{5}(aH)^2a_ua_ta_xH_u^3H_t(ut)\Big] + \Big[-\tfrac{2}{5}(aH)a_u^2a_ta_xH_u^3H_t^2+\tfrac{3}{5}(aH)^2a_u^2a_tH_u^3H_t(xt) + \tfrac{1}{5}(aH)^2a_u^2a_tH_u^2H_tH_x(ut)\Big],$$

d. i.

$$\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = -\tfrac{4}{5}(aH)a_u^2a_ta_xH_u^3H_t^2+\tfrac{3}{5}(aH)^2a_u^2a_tH_u^3H_t(xt) + \Big(\tfrac{4}{5}(aH)^2a_ua_ta_xH_u^3H_t+\tfrac{1}{5}(aH)^2a_u^2a_tH_u^2H_tH_x\Big)(ut).$$

Führt man jetzt mit Hilfe von (17) und (18) in § 3 die Bezeichnungen $\varkappa$ und λ ein, so bekommt man als die gesuchte Darstellung

$$\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = -\tfrac{4}{5}(aH)a_u^2a_ta_xH_u^3H_t^2+\tfrac{3}{25}\varkappa(xt) + \tfrac{1}{5}\varkappa_u^4\varkappa_x(ut)+\tfrac{2}{25}\lambda(xu)(ut). \tag{11}$$

Der Ausdruck für $\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{H}$ selbst ergiebt sich hieraus, indem man u_1, u_2 an Stelle von x_1, x_2 substituirt:

$$\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{H} = -\tfrac{4}{5}(aH)a_u^3a_tH_u^3H_t^2+\tfrac{8}{25}\varkappa(ut),$$

oder wenn man die beiden Glieder auf der rechten Seite durch ihre Ausdrücke (5) in § 2 und (19) in § 3 ersetzt:

$$\text{IXa.}\quad \underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{H} = -\tfrac{4}{5}\mathfrak{t}+\tfrac{2}{5}\mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut)+\tfrac{2}{25}\mathfrak{q}(ut)^2+\tfrac{4}{15}\mathfrak{j}(ut)^3. -$$

10) Endlich ist

$$\delta_1\mathfrak{t} = \delta_1[(a\mathfrak{H})a_u^3a_t\mathfrak{H}_u^3] = (\bar{a}\mathfrak{H})\bar{a}_u^3\bar{a}_t\mathfrak{H}_u^3+(a\overline{\mathfrak{H}})a_u^3a_t\overline{\mathfrak{H}}_u^3,$$

wo mit $\overline{\mathfrak{H}}_u^4$ die Function $\delta_1\mathfrak{H}$ bezeichnet ist, mithin

$$\underset{v=u}{\delta_1}\mathfrak{t} = [(a\mathfrak{H})a_u^3a_t\mathfrak{H}_u^3]_{v=u}+(a\overline{\mathfrak{H}})a_u^3a_t\overline{\mathfrak{H}}_u^3.$$

Das erste Glied ist auf Grund der Gleichung (9) gleich

$$[(a\mathfrak{H})a_u^3a_t\mathfrak{H}_u^3]_{v=u} = \tfrac{1}{5}H_u^5H_t\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_t+\tfrac{3}{5}(H\mathfrak{H})H_u^4H_t\mathfrak{H}_u^3(ut),$$

also wenn man berücksichtigt, dass

$$H_u^5H_t\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_t = H_u^4H_t^2\mathfrak{H}_u^4+(H\mathfrak{H})H_u^4H_t\mathfrak{H}_u^3(ut)$$

und dass die Reduction von $(H\mathfrak{H})H_u^4H_t\mathfrak{H}_u^3$ schon oben (vergl. (f) in § 3) ausgeführt ist:

$$[(\bar{a}\mathfrak{H})\bar{a}_u^3\bar{a}_t\mathfrak{H}_u^3]_{v=u} = \tfrac{1}{5}H_u^4H_t^2\mathfrak{H}+\Big\{\tfrac{4}{25}(\gamma,\varkappa)_1-\tfrac{12}{125}\lambda\gamma\Big\}(ut).$$

Bei dem zweiten Glied muss erst die Ueberschiebung ausgeführt werden, ehe man v_1, v_2 in u_1, u_2 verwandelt. Aber man kommt offenbar zu demselben Resultat, wenn man die erste Polare von $\mathfrak{H}$, d. i. $\mathfrak{H}_u{}^3\,\mathfrak{H}_x$, dem Aronhold'schen Process unterwirft, darauf v_1, v_2 gleich u_1, u_2 werden lässt und jetzt von dem so entstandenen Ausdruck, d. i. $\underset{v=u}{\delta}\,\mathfrak{H}_u{}^3\,\mathfrak{H}_x$, durch die Substitution $-b_2$, bez. b_1 für x_1, bez. x_2 und die Multiplication mit $b_u{}^3 b_t$ zur Ueberschiebung übergeht. Auf diese Weise erhält man unter Benutzung der Gleichung (11)

$$[(a\overline{\mathfrak{H}})\,a_u{}^3 a_t \overline{\mathfrak{H}}_u{}^3]_{v=u} = -\tfrac{4}{5}(ba)(aH)\,a_u{}^2 a_t b_u{}^3 b_t H_u{}^3 H_t{}^2 - \tfrac{3}{25} b_u{}^3 b_t{}^2 \varkappa + \tfrac{1}{5}(b\varkappa) b_u{}^3 b_t \varkappa_u{}^4 (ut) - \tfrac{2}{25} b_u{}^4 b_t \lambda(ut),$$

oder, da

$$(ba)(aH)\,a_u{}^2 a_t b_u{}^3 b_t H_u{}^3 H_t{}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(ab)\,a_u{}^2 a_t b_u{}^2 b_t H_u{}^3 H_t{}^2 \big((bH)\,a_u - (aH)\,b_u\big)$$

$$= -\tfrac{1}{2}(ab)^2 a_u{}^2 a_t b_u{}^2 b_t H_u{}^4 H_t{}^2 = -\tfrac{1}{2} H_u{}^4 H_t{}^2 \mathfrak{H}$$

ist:

$$[(a\overline{\mathfrak{H}})\,a_u{}^3 a_t \overline{\mathfrak{H}}_u{}^3]_{v=u} = \tfrac{2}{5} H_u{}^4 H_t{}^2 \mathfrak{H} - \tfrac{3}{25}\varkappa\mathfrak{g} + \left\{\tfrac{1}{5}(\gamma,\varkappa)_1 - \tfrac{2}{25}\lambda\gamma\right\}(ut).$$

Demnach ist

$$\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{t} = \tfrac{3}{5} H_u{}^4 H_t{}^2 \mathfrak{H} - \tfrac{3}{25}\varkappa\mathfrak{g} + \left\{\tfrac{9}{25}(\gamma,\varkappa)_1 - \tfrac{22}{125}\lambda\gamma\right\}(ut),$$

und hieraus resultirt (siehe (4) in § 2, (19), (d) und (e) in § 3) die folgende Darstellung:

$$\text{Xa.}\quad \underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{t} = \left\{-\tfrac{3}{25}\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 + \tfrac{3}{5}\mathfrak{H}^2\right\} - \tfrac{1}{25}\mathfrak{q}\mathfrak{g}(ut) + \left\{-\tfrac{9}{25}\mathfrak{j}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{5}\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut)^2 + \tfrac{1}{25}\mathfrak{m}(ut)^3. -$$

Die gewonnenen Resultate will ich zur bessern Uebersicht hier am Ende des Paragraphen zusammenstellen. Es besteht also das nachstehende Gleichungssystem:

$$\text{A}\quad \begin{cases} \underset{v=u}{\delta_1}(ut) = 0, \\ \underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{g} = \tfrac{3}{5}\mathfrak{H}(ut) + \tfrac{3}{25}\mathfrak{i}(ut)^3, \\ \underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{H} = -\tfrac{4}{5}\mathfrak{t} + \tfrac{2}{5}\mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut) + \tfrac{2}{25}\mathfrak{q}(ut)^2 + \tfrac{4}{15}\mathfrak{j}(ut)^3, \\ \underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{i} = -\tfrac{4}{25}\mathfrak{q} - \tfrac{28}{25}\mathfrak{j}(ut), \end{cases}$$

$$
\text{A}\quad\begin{cases}
\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{t} &= \left\{-\frac{3}{25}\,\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2+\frac{3}{5}\,\mathfrak{H}^2\right\}-\frac{1}{25}\,\mathfrak{q}\mathfrak{g}(ut)\\
&\quad+\left\{-\frac{9}{25}\,\mathfrak{j}\mathfrak{g}+\frac{1}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut)^2+\frac{1}{25}\,\mathfrak{m}(ut)^3,\\
\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{q} &= \frac{7}{25}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H}-\frac{48}{25}\,\mathfrak{m}(ut)+\left\{-\frac{2}{5}\,\mathfrak{h}+\frac{2}{25}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut)^2,\\
\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{j} &= -\frac{6}{25}\,\mathfrak{m}+\left\{-\frac{6}{25}\,\mathfrak{h}-\frac{6}{25}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut),\\
\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{m} &= \left\{-\frac{8}{25}\,\mathfrak{h}\mathfrak{g}+\frac{1}{25}\,\mathfrak{i}^2\mathfrak{g}+\frac{8}{25}\,\mathfrak{j}\mathfrak{H}\right\}+\left\{-\frac{1}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{q}-\frac{34}{25}\,R\right\}(ut)\\
&\quad+\frac{1}{75}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2,\\
\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{h} &= \left\{\frac{2}{25}\,\mathfrak{i}\mathfrak{q}-\frac{4}{5}\,R\right\}+\left\{-\frac{28}{75}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}+\frac{1}{25}\,\mathfrak{A}\right\}(ut),\\
\underset{v=u}{\delta_1}\,\mathfrak{A} &= \left\{\frac{8}{25}\,\mathfrak{i}\mathfrak{m}-\frac{8}{25}\,\mathfrak{j}\mathfrak{q}\right\}\\
&\quad+\left\{-4\mathfrak{i}\mathfrak{h}+\frac{26}{25}\,\mathfrak{i}^3-\frac{56}{25}\,\mathfrak{j}^2+\frac{77}{25}\,AH\right\}(ut),
\end{cases}
$$

wenn bei dem Aronhold'schen Process die Covariante $H_v^2 H_x^4(xt)$ gebraucht wird.

§ 6.

Der zweite Fall, für den ich die Ausdrücke, welche durch die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ entstehen, wirklich ausrechnen will, sei dadurch charakterisirt, dass der Aronhold'sche Process mit der Covariante $H_v H_x^5(vt)$ bei Differentiation nach den Coefficienten von g ausgeführt werden soll. Dabei werde ich, um diese Operation von derjenigen im vorhergehenden Paragraphen zu unterscheiden, das Operationszeichen δ mit dem Index 2 versehen. Es ist demnach

$$\delta_2 g(u) = H_v H_u^5(vt).$$

Die Rechnung ist hier genau so, wie in § 5, nur sind die numerischen Coefficienten andere, und zwar einfachere. Ich will daher ausser dem Resultate nur die wichtigsten Zwischenglieder der Rechnung, welche den Gleichungen (2), (8) und (11) in § 5 entsprechen, hier mittheilen. Dieselben sind

$$
\begin{aligned}
\delta_2\,\mathfrak{i} &= -\frac{8}{5}\,\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_v(vt),\\
\delta_2\,\mathfrak{j} &= \left\{-\frac{3}{5}\,\mathfrak{h}_u^3\mathfrak{h}_v-\frac{3}{10}\,\mathfrak{i}_u^2\mathfrak{i}_u'\mathfrak{i}_v'\right\}(vt),\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x &= \frac{2}{5}\,\varkappa_u^4\varkappa_x(ut)+\frac{1}{25}\,\lambda(xu)(ut),
\end{aligned}
$$

und das Gleichungssystem selbst hat die Form:

$$
\mathrm{B}\quad\begin{cases}
\underset{v=u}{\delta_2}\,(ut) = 0,\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{H}(ut) + \frac{1}{5}\,\mathfrak{i}(ut)^3,\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{H} = \frac{2}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut) + \frac{1}{5}\,\mathfrak{q}(ut)^2 + \frac{1}{3}\,\mathfrak{j}(ut)^3,\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{i} = -\frac{8}{5}\,\mathfrak{j}(ut),\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{t} = \frac{1}{10}\,\mathfrak{q}\mathfrak{g}(ut) + \left\{-\frac{3}{10}\,\mathfrak{j}\mathfrak{g} + \frac{1}{10}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut)^2 + \frac{1}{5}\,\mathfrak{m}(ut)^3,\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{q} = -\frac{13}{5}\,\mathfrak{m}(ut) + \left\{-\frac{1}{2}\,\mathfrak{h} + \frac{1}{20}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut)^2,\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{j} = \left\{-\frac{3}{5}\,\mathfrak{h} - \frac{3}{10}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut),\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{m} = \left\{-\frac{3}{10}\,\mathfrak{i}\mathfrak{q} - \frac{8}{5}\,R\right\}(ut) - \frac{1}{30}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2,\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{h} = \left\{-\frac{8}{15}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \frac{1}{10}\,\mathfrak{A}\right\}(ut),\\
\underset{v=u}{\delta_2}\,\mathfrak{A} = \left\{-\frac{32}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{h} + \frac{8}{5}\,\mathfrak{i}^3 - \frac{16}{5}\,\mathfrak{j}^2 + \frac{21}{5}\,AH\right\}(ut).
\end{cases}
$$

§ 7.

Dies Gleichungssystem muss ich jetzt noch für den Fall aufstellen, dass der Aronhold'sche Process mit der Function $\mathfrak{i}_x^2(xv)^2(xt)$ ausgeführt wird, weil, wie Ende § 1 dargethan, die allgemeinste Covariante, welche man zu dem Aronhold'schen Process, in dem nach den Coefficienten von g differentiirt wird, überhaupt gebrauchen kann, linear aus $H_v^2 H_x^4 (xt)$, $H_v H_x^5 (vt)$ und $\mathfrak{i}_x^2(xv)^2(xt)$ zusammengesetzt ist.

Zur Unterscheidung will ich hier dem δ den Index 3 geben, und zur Abkürzung während der Rechnung, die sich nicht wesentlich von derjenigen in § 5 unterscheidet, den Ausdruck von $\delta_3 g(u)$ mit $\bar{a}_u^5$ bezeichnen, so dass

(1) $$\delta_3 g(u) = \bar{a}_u^5 = \mathfrak{i}_u^2(uv)^2\,(ut). \quad —$$

1) Selbstverständlich ist wiederum

Ib. $$\underset{v=u}{\delta_3}\,(ut) = 0. \quad —$$

2) Sodann folgt aus (1), wenn ich die zweite Polare unter Einführung von t_1, t_2 bilde und v_1, v_2 gleich u_1, u_2 setze:

IIb. $$\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{g} = \frac{1}{10}\,\mathfrak{i}(ut)^3. \quad —$$

3) Da ferner, wie aus (1) hervorgeht:

$$\bar{a}_x^4 \bar{a}_u = \frac{2}{5} i_u i_x (xv)^2 (xt) + \frac{2}{5} i_x^2 (uv)(xv)(xt) + \frac{1}{5} i_x^2 (xv)^2 (ut),$$

so ist

$$\delta_3 i = 2(\bar{a}b)^4 \bar{a}_u b_u$$
$$= \frac{4}{5} (ib) b_u b_v^2 b_t i_u + \frac{4}{5} (ib)^2 b_u b_v b_t (uv) + \frac{2}{5} (ib)^2 b_u b_v^2 (ut),$$

also bei Berücksichtigung des Umstandes, dass

$$(ib) b_u b_v^2 b_t i_u = - q_u^2 q_v^2 + \frac{1}{2} j_u j_v j_t (uv)$$

ist:

$$\delta_3 i = - \frac{4}{5} q_u^2 q_v^2 + \frac{6}{5} j_u j_v j_t (uv) + \frac{2}{5} j_u j_v^2 (ut),$$

oder wenn man die Identität

$$j_t (uv) + j_u (vt) + j_v (tu) = 0$$

benutzt:

$$\delta_3 i = - \frac{4}{5} q_u^2 q_v^2 - \frac{6}{5} j_u^2 j_v (vt) + \frac{8}{5} j_u j_v^2 (ut). \tag{2}$$

Speciell folgt noch hieraus, indem ich die Variablen v_1, v_2 gleich u_1, u_2 werden lasse:

$$\underset{v=u}{\delta_3} i = - \frac{4}{5} q + \frac{2}{5} j (ut). - \text{ IIIb.}$$

4) Bei der Bezeichnung von $\delta_3 i$ mit $\bar{i}_u^2$ ist

$$\delta_3 q = (\bar{a} i) \bar{a}_u^3 \bar{a}_t i_u + (a \bar{i}) a_u^3 a_t \bar{i}_u,$$

und dafür erhält man, da sich aus (1) und (2) die folgenden Polaren

$$\bar{a}_u^3 \bar{a}_t \bar{a}_x = \frac{1}{10} i_t i_x (uv)^2 (ut) + \frac{1}{10} i_u i_t (uv)^2 (xt)$$
$$+ \frac{1}{5} i_u i_t (uv)(ut)(xv) - \frac{1}{5} i_u i_x (uv)(ut)(vt)$$
$$- \frac{1}{10} i_u^2 (ut)(vt)(xv) - \frac{1}{10} i_u^2 (uv)(vt)(xt), \tag{3}$$

$$\bar{i}_u \bar{i}_x = - \frac{4}{5} q_u q_v^2 q_x + \frac{4}{5} j_u j_v^2 (xt) - \frac{6}{5} j_u j_v j_x (vt)$$
$$+ \frac{4}{5} j_v^2 j_x (ut)$$

ergeben, den Ausdruck

$$\underset{v=u}{\delta_3} q = \left[- \frac{1}{10} i_u^2 i_u^{2\prime} (ut)^2 \right]$$
$$+ \left[- \frac{4}{5} (aq) a_u^3 a_t q_u^3 - \frac{4}{5} a_u^3 a_t^2 j_u^3 - \frac{2}{5} (aj) a_u^3 a_t j_u^2 (ut) \right],$$

d. h. wenn ich die Gleichung (a) in § 3 zur Umformung benutze:

IVb. $$\underset{v=u}{\delta_3}\, \mathfrak{q} = \left\{ -\mathfrak{j}\mathfrak{g} + \frac{2}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H} \right\} - \frac{3}{5}\,\mathfrak{m}(ut) - \frac{1}{10}\,\mathfrak{i}^2(ut)^2. -$$

5) Ferner ist

$$\delta_3 \mathfrak{j} = (\bar{a}\,\mathfrak{i})^2\,\bar{a}_u{}^3 + (a\,\bar{\mathfrak{i}})^3\,a_u{}^3.$$

Die rechte Seite verwandelt sich auf Grund von (2) und der aus (1) abgeleiteten Gleichung

$$(4)\quad \bar{a}_u{}^3 \bar{a}_x{}^2 = \frac{1}{10}\,\mathfrak{i}_u{}^2 (xv)^2 (ut) + \frac{1}{5}\,\mathfrak{i}_u{}^2 (uv)\,(xv)\,(xt) + \frac{1}{5}\,\mathfrak{i}_u\,\mathfrak{i}_x (uv)^2\,(xt) + \frac{2}{5}\,\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_x (uv)\,(ut)\,(xv) + \frac{1}{10}\,\mathfrak{i}_x{}^2 (uv)^2\,(ut)$$

in

$$\delta_3 \mathfrak{j} = \left[\frac{1}{10}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_v{}'^2 (ut) + \frac{1}{5}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_v' \mathfrak{i}_t' (uv) + \frac{1}{5}\,(\mathfrak{i}\mathfrak{i}')\,\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_t' (uv)^2 + \frac{2}{5}\,(\mathfrak{i}\mathfrak{i}')\,\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_v' (uv)\,(ut) + \frac{1}{10}\,(\mathfrak{i}\mathfrak{i}')^2 (uv)^2\,(ut) \right] + \left[-\frac{4}{5}\,(a\mathfrak{q})^2\,a_u{}^3\,\mathfrak{q}_v{}^2 - \frac{8}{5}\,(a\mathfrak{j})\,a_u{}^3 a_t\,\mathfrak{j}_v{}^2 - \frac{6}{5}\,(a\mathfrak{j})^2 a_u{}^3\,\mathfrak{j}_v (vt) \right],$$

d. i. wenn man (*o*) in § 3, (5) und (6) in § 5 berücksichtigt:

$$\delta_3 \mathfrak{j} = \left[-\frac{1}{5}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_u' \mathfrak{i}_v' (vt) + \frac{3}{10}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_v'{}^2 (ut) + \frac{2}{5}\,A(uv)^2\,(ut) \right] + \left[-\frac{6}{5}\,\mathfrak{m}_u{}^3 \mathfrak{m}_v{}^2 + \frac{36}{25}\,\mathfrak{h}_u{}^3 \mathfrak{h}_v (vt) - \frac{66}{25}\,\mathfrak{h}_u{}^2 \mathfrak{h}_v{}^2 (ut) - \frac{2}{5}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_u' \mathfrak{i}_v' (vt) + \frac{3}{5}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_v'{}^2 (ut) - \frac{2}{5}\,A(uv)^2 (ut) \right]$$

oder

$$\delta_3 \mathfrak{j} = -\frac{6}{5}\,\mathfrak{m}_u{}^3 \mathfrak{m}_v{}^2 + \frac{36}{25}\,\mathfrak{h}_u{}^3 \mathfrak{h}_v (vt) - \frac{66}{25}\,\mathfrak{h}_u{}^2 \mathfrak{h}_v{}^2 (ut) - \frac{3}{5}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_u' \mathfrak{i}_v' (vt) + \frac{9}{10}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_v'{}^2 (ut).$$

Und hieraus geht insbesondere hervor:

Vb. $$\underset{v=u}{\delta_3}\, \mathfrak{j} = -\frac{6}{5}\,\mathfrak{m} + \left\{ -\frac{6}{5}\,\mathfrak{h} + \frac{3}{10}\,\mathfrak{i}^2 \right\} (ut),$$

und ausserdem, wenn $\delta_3 \mathfrak{j} = \bar{\mathfrak{j}}_u{}^3$ gesetzt wird:

$$(5)\quad \bar{\mathfrak{j}}_u{}^2\,\bar{\mathfrak{j}}_x = -\frac{6}{5}\,\mathfrak{m}_u{}^2 \mathfrak{m}_v{}^2 \mathfrak{m}_x + \frac{36}{25}\,\mathfrak{h}_u{}^2 \mathfrak{h}_v \mathfrak{h}_x (vt) - \frac{22}{25}\,\mathfrak{h}_u{}^2 \mathfrak{h}_v{}^2 (xt) - \frac{44}{25}\,\mathfrak{h}_u \mathfrak{h}_v{}^2 \mathfrak{h}_x (ut) - \frac{3}{5}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_x' \mathfrak{i}_v' (vt) + \frac{3}{10}\,\mathfrak{i}_u{}^2 \mathfrak{i}_v'{}^2 (xt) + \frac{3}{5}\,\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_x \mathfrak{i}_v'{}^2 (ut) + \frac{1}{5}\,A(uv)\,(ux)\,(vt),$$

$$(6)\quad \bar{\mathfrak{j}}_u \bar{\mathfrak{j}}_x^2 = -\frac{6}{5}\mathfrak{m}_u \mathfrak{m}_v^2 \mathfrak{m}_x^2 + \frac{36}{25}\mathfrak{h}_u \mathfrak{h}_v \mathfrak{h}_x^2 (vt) - \frac{44}{25}\mathfrak{h}_u \mathfrak{h}_v^2 \mathfrak{h}_x (xt)$$
$$- \frac{22}{25}\mathfrak{h}_v^2 \mathfrak{h}_x^2 (ut) - \frac{3}{5}\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_v \mathfrak{i}_x'^2 (vt) + \frac{3}{5}\mathfrak{i}_u \mathfrak{i}_v \mathfrak{i}_x'^2 (xt)$$
$$+ \frac{3}{10}\mathfrak{i}_v^2 \mathfrak{i}_x'^2 (ut) + \frac{1}{5} A(ux)(vx)(vt). -$$

6) Sodann erhält man in

$$\underset{v=u}{\delta_3}\, \mathfrak{m} = [(\bar{a}\mathfrak{j})\, \bar{a}_u^3\, \bar{a}_t\, \mathfrak{j}_u^2]_{v=u} + [(a\bar{\mathfrak{j}})\, a_u^3\, a_t\, \bar{\mathfrak{j}}_u^2]_{v=u}$$

einerseits für den ersten Term auf der rechten Seite nach (3) den Werth

$$-\frac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2;$$

andererseits wird der aus (5) resultirende Ausdruck für den zweiten Term, wenn ich entsprechend wie in § 5 verfahre, gleich

$$\left\{\frac{2}{5}\mathfrak{h}\mathfrak{g} - \frac{3}{10}\mathfrak{i}^2\mathfrak{g} + \frac{3}{5}\mathfrak{j}\mathfrak{H}\right\} - \frac{4}{5} R(ut),$$

so dass

$$\text{VIb.}\quad \underset{v=u}{\delta_3}\, \mathfrak{m} = \left\{\frac{2}{5}\mathfrak{h}\mathfrak{g} - \frac{3}{10}\mathfrak{i}^2\mathfrak{g} + \frac{3}{5}\mathfrak{j}\mathfrak{H}\right\} - \frac{4}{5} R(ut) - \frac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2. -$$

7) In ebenso einfacher Weise, indem man die Gleichungen (l) und (12) in § 3 benutzt, gelangt man mit Hilfe von (6) ganz analog wie in § 5 zu der Darstellung

$$\text{VIIb.}\quad \underset{v=u}{\delta_3}\, \mathfrak{h} = \left\{-\frac{3}{5}\mathfrak{i}\mathfrak{q} + 2R\right\} + \left\{\frac{2}{15}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \frac{1}{5}\mathfrak{A}\right\}(ut). -$$

8) Da ferner (vergl. (1))

$$\underset{v=u}{\delta_3}\, g = 0,$$

und nach (2)

$$\underset{v=u}{\delta_3} A = [2(\mathfrak{i}\bar{\mathfrak{i}})^2]_{v=u} = -\frac{8}{5}(\mathfrak{i}\mathfrak{q})^2 \mathfrak{q}_u^2 - \frac{16}{5}(\mathfrak{i}\mathfrak{j})\, \mathfrak{i}_t \mathfrak{j}_u^2 - \frac{12}{5}(\mathfrak{i}\mathfrak{j})^2 \mathfrak{j}_u (ut)$$

oder (siehe (k) in § 3)

$$\underset{v=u}{\delta_3} A = -\frac{12}{5}\varepsilon_u^2 \varepsilon_t$$

ist, so hat man

$$\underset{v=u}{\delta_3}\, \mathfrak{A} = g \underset{v=u}{\delta_3} A + A \underset{v=u}{\delta_3} g$$
$$= -\frac{12}{5}\varepsilon_u^2 \varepsilon_t g,$$

oder wenn ich $\varepsilon_u^2 \varepsilon_t$ mittels der Relation (g) unter Benutzung der Syzyganten (α) und (β) eliminire:

$$\text{VIIIb.}\quad \underset{v=u}{\delta_3}\, \mathfrak{A} = \left\{-\frac{12}{5}\mathfrak{i}\mathfrak{m} + \frac{12}{5}\mathfrak{j}\mathfrak{q}\right\}$$
$$+ \left\{-2\mathfrak{i}\mathfrak{h} + \frac{1}{5}\mathfrak{i}^3 + \frac{4}{5}\mathfrak{i}^2\mathfrak{j} + \frac{2}{5} AH\right\}. -$$

9) Um $\underset{v=u}{\delta_3}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x$ zu bestimmen, ist die Polare $\bar a_v\bar a_t\bar a_x\bar a_y^2$ nothwendig. Die Form derselben, wie sie sich unmittelbar bei ihrer Bildung aus (1) ergiebt:

$$\begin{aligned}\bar a_v\bar a_t\bar a_x\bar a_y^2 = {}&\tfrac{1}{15}\,i_vi_t(xv)(yv)(yt)+\tfrac{1}{30}\,i_vi_t(xt)(yv)^2\\&-\tfrac{1}{15}\,i_vi_x(yv)(yt)(vt)-\tfrac{1}{15}\,i_vi_y(xv)(yt)(vt)\\&-\tfrac{1}{15}\,i_vi_y(xt)(yv)(vt)+\tfrac{1}{30}\,i_ti_x(yv)^2(vt)\\&+\tfrac{1}{15}\,i_ti_y(xv)(yv)(vt)-\tfrac{1}{15}\,i_xi_y(yv)(vt)^2\\&-\tfrac{1}{30}\,i_y^2(xv)(vt)^2,\end{aligned}$$

will ich noch vereinfachen, ehe ich sie anwende. Zuerst entferne ich i_t und i_x auf Grund der Identitäten

$$i_t(yv)+i_y(vt)+i_v(ty)=0$$

und

$$i_x(yv)+i_y(vx)+i_v(xy)=0,$$

so dass

$$\begin{aligned}\bar a_v\bar a_t\bar a_x\bar a_y^2 = {}&\tfrac{1}{15}\,i_v^2(xv)(yt)^2+\tfrac{1}{30}\,i_v^2(xt)(yv)(yt)+\tfrac{1}{30}\,i_v^2(xy)(yt)(vt)\\&-\tfrac{1}{10}\,i_vi_y(xv)(yt)(vt)-\tfrac{1}{10}\,i_vi_y(xt)(yv)(vt)\\&+\tfrac{1}{10}\,i_vi_y(xy)(vt)^2-\tfrac{1}{5}\,i_y^2(xv)(vt)^2,\end{aligned}$$

und ziehe sodann die rechte Seite mittels der Relation

$$(xv)(yt)+(xy)(tv)+(xt)(vy)=0$$

in

$$\bar a_v\bar a_t\bar a_x\bar a_y^2=\tfrac{1}{10}\,i_v^2(xv)(yt)^2-\tfrac{1}{5}\,i_vi_y(xt)(yv)(vt)-\tfrac{1}{5}\,i_y^2(xv)(vt)^2$$

zusammen.

Mit Hilfe dieser Gleichung und derjenigen, die durch Specialisirung hieraus hervorgeht:

$$\bar a_v^2\bar a_t\bar a_y^2=-\tfrac{1}{5}\,i_vi_y(yv)(vt)^2,$$

folgt aus

$$\delta_3\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x=(\bar a b)^2\bar a_u^2\bar a_t b_u b_t b_x+(a\bar b)^2a_u^2a_t\bar b_u\bar b_t\bar b_x,$$

dass

$$\begin{aligned}\underset{v=u}{\delta_3}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = {}&\Big[\tfrac{1}{5}\,(ai)a_u^2a_ta_xi_u(ut)^2\Big]\\&+\Big[\tfrac{1}{10}\,a_u^2a_t^3i_u^2(xu)+\tfrac{1}{5}\,(ai)a_u^3a_ti_u(xt)(ut)\\&-\tfrac{1}{5}\,(ai)^2a_u^2a_t(xu)(ut)^2\Big],\end{aligned}$$

d. i.

$$\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = \left[\tfrac{1}{5}\,\mathfrak{q}_u^3\mathfrak{q}_x(ut)^2 + \tfrac{1}{20}\,\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t(xu)(ut)^2\right]$$
$$+\left[\tfrac{1}{10}\,a_u^2a_t^3\mathfrak{i}_u^2(xu) + \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{q}(xt)(ut) - \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_t(xu)(ut)^2\right],$$

oder wenn man noch $\mathfrak{j}_t(xu)$, bez. $a_t(xu)$ durch $\mathfrak{j}_u(xt) - \mathfrak{j}_x(ut)$, bez. $a_u(xt) - a_x(ut)$ ersetzt:

$$(7)\quad \underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = \tfrac{1}{10}\,\mathfrak{i}\mathfrak{g}(xt) - \tfrac{1}{10}\,a_u^2a_t^2a_x\,\mathfrak{i}(ut) + \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{q}(xt)(ut)$$
$$+\tfrac{1}{5}\,\mathfrak{q}_u^3\mathfrak{q}_x(ut)^2 - \tfrac{3}{20}\,\mathfrak{j}(xt)(ut)^2 + \tfrac{3}{20}\,\mathfrak{j}_u^2\mathfrak{j}_x(ut)^3.$$

Für $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ entsteht aus dieser Gleichung speciell der Ausdruck für $\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{H}$ selbst:

IX b. $$\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{H} = \tfrac{2}{5}\,\mathfrak{q}(ut)^2. —$$

10) Bezeichne ich jetzt wiederum $\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x$ mit $\overline{\mathfrak{H}}_u^3\overline{\mathfrak{H}}_x$, so liefert die Gleichung

$$\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{t} = [(\bar{a}\mathfrak{H})\,\bar{a}_u^3\bar{a}_t\,\mathfrak{H}_u^3]_{v=u} + (a\overline{\mathfrak{H}})\,a_u^3a_t\,\overline{\mathfrak{H}}_u^3$$

bei Berücksichtigung von (3) und (7) die folgende Darstellung

$$\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{t} = \left[-\tfrac{1}{10}\,\mathfrak{i}_u^2\mathfrak{H}_u^4(ut)^2\right]$$
$$+\left[-\tfrac{1}{10}\,a_u^3a_t^2\,\mathfrak{i}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{10}\,(ba)a_u^2a_t^2b_u^3b_t\,\mathfrak{i}(ut) - \tfrac{1}{5}\,a_u^3a_t^2\,\mathfrak{q}(ut)\right.$$
$$+\tfrac{1}{5}\,(a\mathfrak{q})a_u^3a_t\mathfrak{q}_u^3(ut)^2 + \tfrac{3}{20}\,a_u^3a_t^2\mathfrak{j}(ut)^2$$
$$\left.+\tfrac{3}{20}\,(a\mathfrak{j})\,a_u^3\,a_t\,\mathfrak{j}_u^2(ut)^3\right],$$

oder (siehe (a) in § 3)

X b. $$\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{t} = -\tfrac{1}{10}\,\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 - \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{q}\mathfrak{g}(ut) + \left\{\tfrac{1}{5}\,\mathfrak{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut)^2$$
$$+\tfrac{1}{5}\,\mathfrak{m}(ut)^3. —$$

Wenn ich also die Ergebnisse der Entwicklungen dieses Paragraphen zusammenfasse, so werden die Ausdrücke, die durch die Operation $\underset{v=u}{\delta_3}$ entstehen, sobald zu dem Aronhold'schen Process die Covariante $\mathfrak{i}_x^2(xv)^2(xt)$ genommen wird, durch das Gleichungssystem

$$
\left\{\begin{aligned}
&\underset{v=u}{\delta_3}\,(ut) = 0,\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{g} \;= \tfrac{1}{10}\,\mathfrak{i}(ut)^3,\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{H} \;= \tfrac{2}{5}\,\mathfrak{q}(ut)^2,\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{i} \;= -\tfrac{4}{5}\,\mathfrak{q} + \tfrac{2}{5}\,\mathfrak{j}(ut),\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{t} \;= -\tfrac{1}{10}\,\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 - \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{q}\mathfrak{g}(ut) + \left\{\tfrac{1}{5}\,\mathfrak{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut)^2\\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{m}(ut)^3,\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{q} \;= \left\{-\mathfrak{j}\mathfrak{g} + \tfrac{2}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\} - \tfrac{3}{5}\,\mathfrak{m}(ut) - \tfrac{1}{10}\,\mathfrak{i}^2(ut)^2,\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{j} \;= -\tfrac{6}{5}\,\mathfrak{m} + \left\{-\tfrac{6}{5}\,\mathfrak{h} + \tfrac{3}{10}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut),\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{m} \;= \left\{\tfrac{2}{5}\,\mathfrak{h}\mathfrak{g} - \tfrac{3}{10}\,\mathfrak{i}^2\mathfrak{g} + \tfrac{3}{5}\,\mathfrak{j}\mathfrak{H}\right\} - \tfrac{4}{5}\,R(ut) - \tfrac{1}{10}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2,\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{h} \;= \left\{-\tfrac{3}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{q} + 2R\right\} + \left\{\tfrac{2}{15}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{A}\right\}(ut),\\
&\underset{v=u}{\delta_3}\,\mathfrak{A} \;= \left\{-\tfrac{12}{5}\,\mathfrak{i}\mathfrak{m} + \tfrac{12}{5}\,\mathfrak{j}\mathfrak{q}\right\}\\
&\qquad\qquad + \left\{-2\mathfrak{i}\mathfrak{h} + \tfrac{1}{5}\,\mathfrak{i}^3 + \tfrac{4}{5}\,\mathfrak{j}^2 + \tfrac{2}{5}\,AH\right\}(ut)
\end{aligned}\right.
$$

ausgedrückt.

8.

Es bleibt jetzt noch die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ bezüglich des anderen Factors von $f(x)$, d. i.

$$t_2 x_1 - t_1 x_2,$$

auszuführen übrig. Wie in § 1 (vergl. (4)) dargethan, nimmt dieselbe die Form einer Ueberschiebung:

$$\mathfrak{T}_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - \mathfrak{T}_2 \frac{\partial}{\partial t_1},$$

mit der Covariante

$$\mathfrak{T}_1 x_1 + \mathfrak{T}_2 x_2 = \mathfrak{T}$$

an, welche sich (siehe (9) in § 1) von

$$a_v^2 a_t^2 a_x$$

nur um eine multiplicative Constante unterscheidet. Für den Fall, dass unmittelbar

$$\mathfrak{T} = a_v^2 a_t^2 a_x,$$

will ich das Gleichungssystem, das durch die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ entsteht, thatsächlich aufstellen. Dabei soll dem δ der Index 4 gegeben werden.

Es ist dann

(1) $$\delta_4 = a_v^2 a_t^2 \left(a_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - a_2 \frac{\partial}{\partial t_1}\right). -$$

1) Da $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{A}$ von t_1, t_2 unabhängig sind, so ist

Ic. $$\underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{i} = 0, \quad \underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{j} = 0, \quad \underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{h} = 0, \quad \underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{A} = 0. -$$

2) Sodann erkennt man unmittelbar, dass

IIc. $$\underset{v=u}{\delta_4}\, (ut) = \mathfrak{g}. -$$

3) Ferner ist $\delta_4 \mathfrak{g} = \delta_4 [b_u^3 b_t^2] = 2(ab) a_v^2 a_t^2 b_u^3 b_t$, wie sich bei der directen Ausführung der Operation δ_4 in der Form (1) ergiebt; folglich

IIIc. $$\underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{g} = -\mathfrak{H}(ut). -$$

4) Gleichermassen bekommt man, wenn die Operation δ_4 wiederum gemäss (1) vollzogen wird, da $\mathfrak{i}_u^2$ die Variablen t_1, t_2 nicht enthält:

$$\underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{q} = \underset{v=u}{\delta_4} [(b\mathfrak{i})\, b_u^3 b_t \mathfrak{i}_u]$$
$$= (ab)(b\mathfrak{i})\, a_u^2 a_t^2 b_u^3 \mathfrak{i}_u.$$

Die linke Seite wandele ich mit Hilfe der Identität

(2) $$2(ab)(\mathfrak{i}b)\, a_u \mathfrak{i}_u = (ab)^2 \mathfrak{i}_u^2 + (\mathfrak{i}b)^2 a_u^2 - (a\mathfrak{i})^2 b_u^2$$

um in

$$\underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{q} = \frac{1}{2} (a\mathfrak{i})^2 a_u a_t^2 b_u^5 - \frac{1}{2} (b\mathfrak{i})^2 b_u^3 a_u^3 a_t^2 - \frac{1}{2} (ab)^2 a_u a_t^2 b_u^3 \mathfrak{i}_u^2.$$

Hierin ist

$$(a\mathfrak{i})^2 a_u a_t^2 b_u^5 = \mathfrak{j}_u \mathfrak{j}_t^2 b_u^5 = \mathfrak{j}_u^3 b_u^3 b_t^2 + 2(b\mathfrak{j}) b_u^3 b_t \mathfrak{j}_u^2 (ut) + (b\mathfrak{j})^2 b_u^3 \mathfrak{j}_u (ut)^2$$
$$= \mathfrak{j}\mathfrak{g} + 2\mathfrak{m}(ut) + \mathfrak{h}(ut)^2,$$

und

$$(ab)^2 a_u a_t^2 b_u^3 = \mathfrak{H} + \frac{1}{2} \mathfrak{i}(ut)^2,$$

so dass schliesslich

VIc. $$\underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{q} = -\frac{1}{2} \mathfrak{i}\mathfrak{H} + \mathfrak{m}(ut) + \left\{\frac{1}{2} \mathfrak{h} - \frac{1}{4} \mathfrak{i}^2\right\} (ut)^2$$

resultirt. —

5) Ebenso verfahre ich bei der Covariante $\mathfrak{m}$:

$$\underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{m} = \underset{v=u}{\delta_4} [(b\mathfrak{j})\, b_u^3 b_t \mathfrak{j}_u^2]$$
$$= (ab)(b\mathfrak{j})\, a_u^2 a_t^2 b_u^3 \mathfrak{j}_u^2,$$

also, wenn ich eine der obigen Identität (2) analoge anwende:

$$\underset{v=u}{\delta_4}\, \mathfrak{m} = \frac{1}{2} (a\mathfrak{j})^2 a_u a_t^2 \mathfrak{j}_u b_u^5 - \frac{1}{2} (b\mathfrak{j})^2 b_u^3 \mathfrak{j}_u a_u^3 a_t^2 - \frac{1}{2} (ab)^2 a_u a_t^2 b_u^3 \mathfrak{j}_u^3,$$

oder da

$$(a\mathfrak{j})^2 a_u a_t^2 \mathfrak{j}_u b_u^5 = \mathfrak{h}\mathfrak{g} + 2(\gamma, \mathfrak{h})_1 (ut) + (g, \mathfrak{h})_2 (ut)^2$$
$$= \mathfrak{h}\mathfrak{g} + 2R(ut) + \tfrac{1}{6}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)$$

ist:

V c. $$\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{m} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{j}\mathfrak{H} + R(ut) - \tfrac{1}{6}\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2. -$$

6) Wie oben in § 5 und § 7, und aus dem gleichen Grunde, will ich auch hier zuerst $\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x$ bestimmen und daraus dann den Ausdruck für $\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H}$ ableiten. Da

$$\mathfrak{H} = H_u^4 H_t^2 - \tfrac{1}{5}\mathfrak{i}_u^2 (ut)^2,$$

so ist

$$\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = H_u^3 H_t^2 H_x - \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}_u^2(xt)(ut) - \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}_u\mathfrak{i}_x(ut)^2,$$

und demgemäss

$$\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = 2(aH)a_u^2 a_t^2 H_u^3 H_t H_x - \tfrac{1}{10}a_u^3 a_t^2 \mathfrak{i}_u^2(xt)$$
$$- \tfrac{1}{10}a_u^2 a_t^2 a_x \mathfrak{i}_u^2(ut) - \tfrac{1}{5}a_u^3 a_t^2 \mathfrak{i}_u\mathfrak{i}_x(ut),$$

also wenn ich das erste Glied auf der rechten Seite ebenso wie bei der entsprechenden Entwicklung in § 5 umforme:

(3) $$\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x = 2(aH)a_u^2 a_t a_x H_u^3 H_t^2 - \tfrac{2}{5}\varkappa(xt) - \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{g}(xt)$$
$$- \tfrac{1}{10}a_u^2 a_t^2 a_x \mathfrak{i}(ut) - \tfrac{1}{5}\mathfrak{i}_u\mathfrak{i}_x\mathfrak{g}(ut).$$

Hieraus folgt speciell die Darstellung von $\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H}$ selbst, dadurch dass ich x_1, x_2 gleich u_1, u_2 werden lasse und für $(aH)a_u^3 a_t H_u^3 H_t^2$ und $\varkappa$ ihre Werthe aus (5) in § 2 und (19) in § 3 einsetze:

VI c. $$\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H} = 2\mathfrak{t} - \mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut) - \tfrac{1}{3}\mathfrak{j}(ut)^3. -$$

7) Es bleibt jetzt noch der Ausdruck von $\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{t}$ zu berechnen übrig. Wenn zur augenblicklichen Abkürzung $\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H}_u^3\mathfrak{H}_x$ mit $\overline{\mathfrak{H}}_u^3\overline{\mathfrak{H}}_x$ bezeichnet wird, ist

$$\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{t} = \underset{v=u}{\delta_4}[(b\mathfrak{H})b_u^3 b_t \mathfrak{H}_u^3]$$
$$= (ab)(b\mathfrak{H})a_u^2 a_t^2 b_u^3 \mathfrak{H}_u^3 + (b\overline{\mathfrak{H}})b_u^3 b_t \overline{\mathfrak{H}}_u^3.$$

Das erste Glied der rechten Seite geht mit Hilfe der identischen Gleichungen

$$(b\mathfrak{H})a_u + (\mathfrak{H}a)b_u + (ab)\mathfrak{H}_u = 0 \quad \text{und} \quad (ab)(ut) = a_u b_t - a_t b_u$$

über in

$$(ab)(b\mathfrak{H})a_u^2 a_t^2 b_u^3 \mathfrak{H}_u^3$$
$$= (ab)(b\mathfrak{H})a_u^3 a_t b_u^2 b_t \mathfrak{H}_u^3 - \left[\tfrac{3}{5}(b\mathfrak{H})a_u + \tfrac{2}{5}(a\mathfrak{H})b_u\right](ab)^2 a_u a_t b_u^2 \mathfrak{H}_u^3 (ut)$$
$$- \tfrac{1}{5}(ab)^4 a_u b_u \mathfrak{H}_u^4 (ut)^2,$$

d. i.

$$(ab)(b\mathfrak{H})a_u^2 a_t^2 b_u^3 \mathfrak{H}_u^3 = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2 - (H\mathfrak{H})H_u^4 H_t \mathfrak{H}_u^3 (ut) - \tfrac{1}{5}\mathfrak{i}\mathfrak{H}(ut)^2,$$

oder bei Berücksichtigung von (f), (d) und (e) in § 3

$$(ab)(b\mathfrak{H})a_u^2 a_t^2 b_u^3 \mathfrak{H}_u^3 = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{j}\mathfrak{g}(ut)^2 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{i}\mathfrak{H}(ut)^2.$$

Für das zweite Glied erhält man auf Grund der Relation (3):

$$(b\overline{\mathfrak{H}})b_u^3 b_t \mathfrak{H}_u^3 = 2(ba)(aH)a_u^2 a_t b_u^3 b_t H_u^3 H_t^2 + \tfrac{2}{5}\varkappa\mathfrak{g} + \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2$$
$$- \tfrac{1}{10}(ba)a_u^2 a_t^2 b_u^3 b_t \mathfrak{i}_u^2 (ut) - \tfrac{1}{5}(bi)b_u^3 b_t \mathfrak{i}_u \mathfrak{g}(ut)^2$$
$$= -\mathfrak{H}H_u^4 H_t^2 + \tfrac{2}{5}\varkappa\mathfrak{g} + \tfrac{1}{10}\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 - \tfrac{1}{20}\mathfrak{i}\mathfrak{H}(ut)^2$$
$$- \tfrac{1}{5}\mathfrak{q}\mathfrak{g}(ut)^2,$$

also wenn ich für $H_u^4 H_t^2$ und $\varkappa$ die Werthe einsetze:

$$(b\overline{\mathfrak{H}})b_u^3 b_t \mathfrak{H}_u^3 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{j}\mathfrak{g}(ut)^2 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{i}\mathfrak{H}(ut)^2.$$

Demgemäss ist

VIIc. $$\underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{t} = \left\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 - \tfrac{3}{2}\mathfrak{H}^2\right\} + \left\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut)^2. -$$

Wir sind demnach zu dem folgenden Resultate gelangt: Unter der Voraussetzung, dass der Aronhold'sche Process in der Form

$$\mathfrak{T}_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - \mathfrak{T}_2 \frac{\partial}{\partial t_1}$$

ausgeführt wird, wo

$$\mathfrak{T}_1 x_1 + \mathfrak{T}_2 x_2 = a_v^2 a_t^2 a_x,$$

ist das Ergebniss der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ in dem Gleichungssystem

$$\mathrm{D}\begin{cases} \underset{v=u}{\delta_4}(ut) = \mathfrak{g}, \\ \underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{g} = -\mathfrak{H}(ut), \\ \underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{H} = 2\mathfrak{t} - \mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut) - \tfrac{1}{3}\mathfrak{j}(ut)^3, \\ \underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{i} = 0, \\ \underset{v=u}{\delta_4}\mathfrak{t} = \left\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 - \tfrac{3}{2}\mathfrak{H}^2\right\} + \left\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{j}\mathfrak{g} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{i}\mathfrak{H}\right\}(ut)^2, \end{cases}$$

$$\mathrm{D}\begin{cases} \delta_{\substack{4\\ v=u}} \mathfrak{q} & = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H} + \mathfrak{m}(ut) + \left\{\frac{1}{2}\,\mathfrak{h} - \frac{1}{4}\,\mathfrak{i}^2\right\}(ut)^2, \\ \delta_{\substack{4\\ v=u}} \mathfrak{j} & = 0, \\ \delta_{\substack{4\\ v=u}} \mathfrak{m} & = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{j}\mathfrak{H} + R(ut) - \frac{1}{6}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}(ut)^2, \\ \delta_{\substack{4\\ v=u}} \mathfrak{h} & = 0, \\ \delta_{\substack{4\\ v=u}} \mathfrak{A} & = 0 \end{cases}$$

enthalten.

§ 9.

Von besonderer Bedeutung ist noch die Operation $\delta_{\substack{\\ v=u}}$, wenn in derselben bei dem Aronhold'schen Process

$$(1) \qquad \sum_{x=0}^{5} \overline{\mathfrak{G}}_x \frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}_x} + \overline{\mathfrak{T}}_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - \overline{\mathfrak{T}}_2 \frac{\partial}{\partial t_1}$$

die Covarianten

$$(2) \qquad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{G}} &= \sum_{x=0}^{5} \binom{5}{x} \overline{\mathfrak{G}}_x x_1^{\,x} x_2^{\,5-x} = \left(30(\mathsf{A}a)\,\mathsf{A}_v^{\,3}\mathsf{A}_x^{\,2}a_x^{\,4} - 5a_x^{\,5}b_v^{\,3}b_t b_x\right) : 36(xv), \\ \overline{\mathfrak{T}} &= \overline{\mathfrak{T}}_1 x_1 + \overline{\mathfrak{T}}_2 x_2 \qquad = \left(-\,6\mathsf{A}_v^{\,3}\mathsf{A}_t\mathsf{A}_x^{\,2} + 5a_v^{\,3}a_t a_x(xt)\right) : 36(xv), \end{aligned}$$

wo $\mathsf{A}_x^{\,6} = f(x) = g(x)\,(xt) = a_x^{\,5}(xt)$ bezeichnet ist, verwendet werden. Denn in dieser Form wird man, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, die Differentiation nach den Parametern in der partiellen Differentialgleichung für die ungeraden Thetafunctionen darstellen. Diese Differentialgleichung hat, wenn man für den speciellen Aronhold'schen Process (1) das Operationszeichen δ mit dem Index 0 versieht, die Form*)

$$(3) \qquad 6\delta_0 Th + \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} v_1^{\,4-\alpha-\beta}\, v_2^{\,\alpha+\beta-2}\, \frac{\partial^2 Th}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta} + \frac{1}{2}\,\Lambda Th = 0.$$

In derselben bedeutet Th eine so normirte ungerade Thetafunction, dass ihre Reihenentwicklung die folgende ist:

$$(4) \qquad Th = s(N_1 + N_3 + N_5 + N_7 + \cdots),$$

wo s^8 die Discriminante von g darstellt und unter $N_{2\lambda+1}$ eine Function von der Dimension $2\lambda + 1$ in den Argumenten u_1, u_2 und zwar eine Covariante von g, welche ausserdem noch die Variablen t_1, t_2 enthält, zu verstehen ist; insbesondere ist

$$(5) \qquad N_1 = (ut), \quad N_3 = -\frac{1}{3}\,\mathfrak{g}.$$

*) Vergl. die Arbeit des Verf. in den Math. Annalen, Bd. 33, S. 286 u. f.

Sodann erhalte ich für Λ, wenn ich den in dem eben erwähnten Aufsatze in Form eines Quotienten auftretenden Ausdruck in eine ganze Function verwandele:

$$\Lambda = \frac{1}{5}(AA')^4\,[8A_u^2A_v'^2 + 7A_uA_vA_u'A_v'].$$

In jenem Aufsatz habe ich für beliebiges ϱ diese Umwandlung der Darstellung von Λ, sowie derjenigen von K und F, nicht ausgeführt, weil die Ausdrücke, zu denen ich hätte gelangen können, mir zu umfangreich und zu wenig übersichtlich erschienen; ausserdem kann man diese Umwandlung, wo sie nothwendig werden sollte, durch blosse Rechnung auf Grund der Clebsch-Gordan'schen Reihenentwicklung ausführen.

Wie bei der geraden Thetafunction kann man die obige Differentialgleichung benutzen, um eine Recursionsformel für die Glieder $N_5, N_7, N_9, \ldots$ der Reihenentwicklung der ungeraden Thetafunction abzuleiten. Substituirt man nämlich die Reihe (4) für Th in die Differentialgleichung und lässt in derselben v_1, v_2 gleich u_1, u_2 werden, so liefert der Umstand, dass die Glieder gleich hoher Dimensionen einzeln verschwinden müssen, die beiden Gleichungen

$$N_3 + 4\,\underset{v=u}{\delta_0}\,N_1 + 4N_1\,\frac{1}{g}\,\underset{v=u}{\delta_0}\,s = 0,$$

$$2\lambda(2\lambda+1)\,N_{2\lambda+1} + 24\,\underset{v=u}{\delta_0}\,N_{2\lambda-1} + 2N_{2\lambda-3}\,\Lambda + 24N_{2\lambda-1}\,\frac{1}{g}\,\underset{v=u}{\delta_0}\,s = 0,$$

$$\lambda = 2, 3, \ldots .$$

Aus der ersten ergiebt sich, da nach dem Gleichungssystem am Ende des Paragraphen $\underset{v=u}{\delta_0}\,N_1 = \underset{v=u}{\delta_0}\,(ut) = \frac{1}{12}\,g$ ist, der Werth von $\underset{v=u}{\delta_0}\,s$:

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,s = 0.$$

Und in Folge davon vereinfacht sich, wenn ich noch berücksichtige, dass für v_1, v_2 gleich u_1, u_2 Λ den Werth $3(AA')^4A_u^2A_u'^2 = -\mathfrak{H} + i(ut)^2$ annimmt, die zweite Gleichung, welche die eigentliche Recursionsformel ist, in

$$(6)\quad \lambda(2\lambda+1)\,N_{2\lambda+1} + 12\,\underset{v=u}{\delta_0}\,N_{2\lambda-1} - \left(\mathfrak{H} - i(ut)^2\right)N_{2\lambda-3} = 0,$$

$$\lambda = 2, 3, \ldots .$$

Durch diese Formel werden die Glieder $N_5, N_7, N_9, \ldots$ der Reihenentwicklung, welche in den Argumenten von der Dimension 5, bez. $7, 9, \ldots$ sind, im Wesentlichen durch die Operation $\underset{v=u}{\delta_0}$ aus Gliedern von niederer Dimension abgeleitet. Da nun die Glieder von der ersten und dritten Dimension, d. i. $N_1 = (ut)$, $N_3 = -\frac{1}{3}\,g$, sowie die einzige, direct in der Differentialgleichung vorkommende Covariante, $\mathfrak{H} - i(ut)^2$, zu den Covarianten dieser besonderen Art gehören, wie

ich sie in diesem dritten Theile des Aufsatzes behandelt habe, so müssen auch $N_5, N_7, \ldots$ Covarianten dieser besondern Art sein und sich durch die 10 Formen (ut), $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{H}$, ... rational und ganz darstellen lassen. Man kann daher den in der Recursionsformel (6) vorkommenden Process $\underset{v=u}{\delta_0}$ auch in der nachstehenden Form schreiben:

$$\begin{aligned}\underset{v=u}{\delta_0} N_{2\lambda-1} = {} & \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial (ut)} \underset{v=u}{\delta_0} (ut) + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{g}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{g} + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{H}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{H} \\ & + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{i}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{i} + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{t}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{t} + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{q}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{q} \\ & + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{j}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{j} + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{m}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{m} + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{h}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{h} \\ & + \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \mathfrak{A}} \underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{A},\end{aligned}$$

und damit wird, sobald die Ausdrücke von $\underset{v=u}{\delta_0} (ut)$, $\underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{g}$, $\underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{H}$, ... bestimmt sind, der Process $\underset{v=u}{\delta_0}$ durch eine einfache partielle Differentiation nach den Covarianten (ut), $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{H}$, ... ersetzt.

Es bleibt also jetzt noch die Bestimmung von $\underset{v=u}{\delta_0} (ut)$, $\underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{g}$, $\underset{v=u}{\delta_0} \mathfrak{H}$, ... übrig. Dazu ist zunächst nothwendig, $\overline{\mathfrak{G}}$ in eine lineare Function der Formen $H_v^2 H_x^4 (xt)$, $H_v H_x^5 (vt)$ und $i_x^2 (xv)^2 (xt)$ umzuwandeln und die Constante zu bestimmen, um welche sich $\overline{\mathfrak{T}}$ von $a_v^2 a_t^2 a_x$ unterscheidet. Bezüglich der Covariante $\overline{\mathfrak{G}}$ bekommt man mit Hilfe der folgenden Polare von $A_x^6 = b_x^5 (xt)$:

$$(7) \qquad A_v^3 A_x^2 A_y = \frac{1}{3} b_v^3 b_x b_y (xt) + \frac{1}{6} b_v^3 b_x^2 (yt) + \frac{1}{2} b_v^2 b_x^2 b_y (vt)$$

aus (2) die Gleichung

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{G}} = {} & \frac{5}{36} [2(ba) a_x^4 b_v^3 b_x (xt) + a_t a_x^4 b_v^3 b_x^2 + 3(ba) a_x^4 b_v^2 b_x^2 (vt), \\ & - a_x^5 b_v^3 b_t b_x] : (xv),\end{aligned}$$

oder da $a_t a_x^4 b_v^3 b_x^2 - a_x^5 b_v^3 b_t b_x = (ba) a_x^4 b_v^3 b_x (xt)$ ist:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \frac{5}{12} [(ba) a_x^4 b_v^3 b_x (xt) + (ba) a_x^4 b_v^2 b_x^2 (vt)] : (xv).$$

Indem ich die beiden Glieder in der Klammer je in eine Clebsch-Gordan'sche Reihe nach Polaren entwickle, erhalte ich unmittelbar die gesuchte Darstellung

$$(8) \qquad \overline{\mathfrak{G}} = - \frac{1}{24} [15 H_v^2 H_x^4 (xt) + 10 H_v H_x^5 (vt) + 2 i_x^2 (xv)^2 (xt)].$$

Sodann ergiebt sich der Ausdruck von $\overline{\mathfrak{T}}$ aus (2), indem man die Polare (7) benutzt:

$$\overline{\mathfrak{T}} = \frac{1}{12}\,[a_v^3 a_t a_x (xt) - a_v^2 a_t a_x^2 (vt)] : (xv),$$

oder bei Berücksichtigung der Gleichung $a_v(xt)+a_x(tv)+a_t(vx)=0$:

$$\overline{\mathfrak{T}} = \frac{1}{12}\, a_v^2 a_t^2 a_x. \tag{9}$$

Da nun, wenn

$$\mathfrak{G} = c_1 H_v^2 H_x^4 (xt) + c_2 H_v H_x^5 (vt) + c_3 \mathfrak{i}_x^2 (xv)^2 (xt),$$
$$\mathfrak{T} = c_4 a_v^2 a_t^2 a_x$$

ist, die betreffende Operation δ sich in der Weise:

$$\underset{v=u}{\delta} = c_1 \underset{v=u}{\delta_1} + c_2 \underset{v=u}{\delta_2} + c_3 \underset{v=u}{\delta_3} + c_4 \underset{v=u}{\delta_4}$$

aus den Operationen $\underset{v=u}{\delta_i}$ zusammensetzt, so ist hier gemäss der Ausdrücke (8) und (9)

$$\underset{v=u}{\delta_0} = -\frac{1}{24}\left[15 \underset{v=u}{\delta_1} + 10 \underset{v=u}{\delta_2} + 2 \underset{v=u}{\delta_3} - 2 \underset{v=u}{\delta_4}\right],$$

und es ist nun leicht, aus den Gleichungssystemen A, B, C, D das folgende zu der Operation $\underset{v=u}{\delta_0}$ gehörende System

$$\underset{v=u}{\delta_0}(ut) = \frac{1}{24}\,[2\mathfrak{g}],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{g} = \frac{1}{24}\,[-21\mathfrak{H}(ut) - 4\mathfrak{i}(ut)^3],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{24}\,[16\mathfrak{t} - 12\mathfrak{i}\mathfrak{g}(ut) - 4\mathfrak{q}(ut)^2 - 8\mathfrak{j}(ut)^3],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{i} = \frac{1}{24}\,[4\mathfrak{q} + 32\mathfrak{j}(ut)],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{t} = \frac{1}{24}\left[\{3\mathfrak{i}\mathfrak{g}^2 - 12\mathfrak{H}^2\} + \{9\mathfrak{j}\mathfrak{g} - \tfrac{9}{2}\,\mathfrak{i}\mathfrak{H}\}\,(ut)^2 - 3\mathfrak{m}(ut)^3\right],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{q} = \frac{1}{24}\left[\{2\mathfrak{j}\mathfrak{g} - 6\mathfrak{i}\mathfrak{H}\} + 58\mathfrak{m}(ut) + \{12\mathfrak{h} - 2\mathfrak{i}^2\}\,(ut)^2\right],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{j} = \frac{1}{24}\left[6\mathfrak{m} + \{12\mathfrak{h} + 6\mathfrak{i}^2\}\,(ut)\right],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{m} = \frac{1}{24}\left[\{4\mathfrak{h}\mathfrak{g} - 7\mathfrak{j}\mathfrak{H}\} + \{6\mathfrak{i}\mathfrak{q} + 40R\}\,(ut)\right],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{h} = \frac{1}{24}\left[8R + \{\tfrac{32}{3}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} - 2\mathfrak{A}\}\,(ut)\right],$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\,\mathfrak{A} = \frac{1}{24}\left[\{128\mathfrak{i}\mathfrak{h} - 32\mathfrak{i}^3 + 64\mathfrak{j}^2 - 89AH\}\,(ut)\right]$$

abzuleiten.

Halle a./S., im Februar 1890.

Beiträge zur Analysis situs.

II. Aufsatz.

Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen.

Von

Walther Dyck in München.

Einleitung.

In den vorangehenden Untersuchungen zur Analysis situs*) wurde die Frage nach absoluten Charakteristiken für ein-, zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten zunächst in der *geometrischen* Herleitung charakteristischer Zahlen behandelt unter Zugrundelegung gewisser in ganz allgemeiner Form gekennzeichneter Umformungsprocesse. Die *analytische* Formulirung derselben, für durch Gleichungen und Ungleichungen zwischen reellen Variabeln gegebene Mannigfaltigkeiten führte dann, unter Zugrundelegung *continuirlicher* Entstehungs- und Umformungsprocesse zu der Darstellung der erhaltenen Zahlen als *Kronecker'scher Charakteristiken* gewisser Functionensysteme**).

Es handelt sich jetzt darum, die analogen Betrachtungen für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen zu entwickeln.

Für eine schliessliche analytische Formulirung ist dabei in den Kronecker'schen Untersuchungen der unmittelbare Weg gewiesen. Wesentlich aber erscheint es, auch die allgemeine, in den früheren Untersuchungen für Mannigfaltigkeiten von ein bis drei Dimensionen in rein geometrischer Form gegebene Herleitung der charakteristischen Zahlen auch für Mannigfaltigkeiten von höheren Dimensionen zu

---

*) Beiträge zur Analysis situs. I. Aufsatz: Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Diese Annalen Bd. 32. p. 457 ff. (In der Folge nur durch Band- und Seitenzahl citirt). — Ferner: Beiträge zur Analysis situs I, II, III in den Berichten der k. sächs. Ges. d. W., Juli 1885, Februar 1886, März 1887.

**) Man vergl. bezüglich der dabei zu Grunde gelegten, auch in der Folge massgebenden Principien Annalen 32, Einleitung, ebenda auch die auf die Kronecker'schen Abhandlungen bezüglichen Literaturangaben.

betrachten. Muss dabei selbstverständlich von der Anschauung abstrahirt werden und sind gleich von Anfang an Elementarmannigfaltigkeiten und Elementaroperationen in analytischer Definition einzuführen, so ist es doch möglich, gewisse Analogien mit den uns geometrisch zugänglichen Gebilden und Operationen besonders hervortreten zu lassen, die wie ich glaube die Uebersicht über jene mehrdimensionalen Gebilde erleichtern. In diesem Sinne mag es auch gerechtfertigt erscheinen, wenn geometrische Bezeichnungen auch für diese mehrdimensionalen Gebilde nicht ganz unterdrückt sind.

Der Aufsatz beschäftigt sich zunächst — *im I. Abschnitte* — in allgemeinster Form mit der Definition der Umformungsprocesse, welche wir zur Umgestaltung der als Ausgangsformen zu Grunde gelegten einfachsten Mannigfaltigkeiten („Elementarmannigfaltigkeiten") verwenden; mit den Regeln ihrer Abzählung und der hieraus entspringenden Definition der charakteristischen Zahlen. Die Abzählungen werden dann an Beispielen durchgeführt, nämlich 1) an den im Gebiete von n von einander unabhängigen Variablen durch eine Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

gegebenen „sphärischen" Mannigfaltigkeiten. 2) an den „projectiven" Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen und 3) an gewissen Mannigfaltigkeiten vierten Grades, die wir desshalb ausführlich betrachten, weil wir auf sie die im folgenden Abschnitt zu behandelnden Fälle von singulären Stellen einer Mannigfaltigkeit und ebenso auch die im III. Abschnitte zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten zweiten Grades zurückführen.

Im II. Abschnitte betrachten wir speciell Mannigfaltigkeiten von $n-1$, bez. von n Dimensionen, die wir in dem Gebiete der reellen, von einander unabhängigen Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch eine Gleichung $f = 0$, bez. durch eine Ungleichung $f < 0$ gegeben voraussetzen. Für dieselben legen wir, analog wie in den früheren Aufsätzen, *continuirliche* Entstehungs- und Umformungsprocesse zu Grunde. Damit wird die Abzählung der für diese Mannigfaltigkeiten charakteristischen Zahlen auf die Betrachtung der *singulären Stellen* jener Umformungsgebilde und die Feststellung des „*Punktcharakters*" derselben geworfen und führt damit wieder direct auf *Kronecker'sche Charakteristiken gewisser Functionensysteme.*

Ich beschränke mich hier auf die einfachst möglichen continuirlichen Umformungsprocesse. Es lassen sich an ihnen die principiell wichtigen Ueberlegungen am übersichtlichsten entwickeln; andererseits bieten die Verallgemeinerungen, wie ich sie bei 1, 2 und 3 Dimensionen in meinen früheren Untersuchungen ausgeführt habe, auch für mehr Dimensionen keine neuen Schwierigkeiten.

Die Zurückführung unserer charakteristischen Zahlen auf Kronecker'sche Charakteristiken liefert uns hier den einzigen *Beweis für die Unabhängigkeit der von uns definirten Zahlen vom jeweiligen Entstehungsprocess* der Mannigfaltigkeit. Im Gebiete von ein und zwei Dimensionen war es nämlich noch möglich, jenen Beweis auch unmittelbar zu führen *durch Herleitung kanonischer Formen für alle möglichen, im Sinne der Analysis situs verschiedenen* (d. h. nicht umkehrbar eindeutig auf einander beziehbaren) *Mannigfaltigkeiten*, an welchen kanonischen Formen die charakteristischen Zahlen sofort abgelesen werden konnten. Dieser *directe* Beweis versagt hier und stösst, da ja mit jener *einen* charakteristischen Zahl die für eine völlige Charakteristik nothwendigen Bestimmungen keineswegs erschöpft sind*), auf Schwierigkeiten, deren Ueberwindung mir zunächst nur noch im Gebiete von *drei* Dimensionen (auf welches ich in einem weiteren Aufsatze näher einzugehen beabsichtige) möglich erscheint.

In einem *III. Abschnitte* gehe ich auf die durch *Gleichungen zweiten Grades definirten Mannigfaltigkeiten* näher ein, für welche sich die Charakteristik aus den vorhergehenden Betrachtungen auf einfachste Weise ergiebt. Gerade hier glaube ich erweist sich das Hervortretenlassen der Analogie mit den geometrischen Verhältnissen der Gebiete von ein, zwei und drei Dimensionen als förderlich für die Entwicklung der „Analysis situs" jener Gebilde. Es gelingt auf die übersichtlichste Weise die in

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \cdots - x_n^2 - 1 = 0$$

durch die verschiedenen Werthe von ν unterschiedenen $\frac{n}{2}$ bez. $\frac{n+1}{2}$ Fälle mit Hülfe der Reihe

$$\xi_1^2 = 1,\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1,\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1, \ldots \left(\text{bis } \frac{n}{2}, \text{ bez. } \frac{n+1}{2}\right)$$

von *sphärischen* Mannigfaltigkeiten zu charakterisiren. Es ergeben sich dabei, wie noch bemerkt sei, die Mannigfaltigkeiten zweiten Grades von gerader Dimension als solche „mit nicht umkehrbarer Indicatrix", während diejenigen von ungerader Dimension (mit Ausnahme der einen sphärischen $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$) sämmtlich Mannigfaltigkeiten „mit umkehrbarer Indicatrix" sind.

*) Man vergl. hierzu die Entwicklungen des Aufsatzes III in den Berichten d. sächs. Ges. (März 1887).

Inhalts-Uebersicht.

Seite

Einleitung 278

I. Abschnitt.

Definition und Herleitung der Charakteristik n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten 277

§ 1. Allgemeine Festsetzungen über die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten M_n 277

§ 2. Die Entstehungs- und Umformungsprocesse für die Mannigfaltigkeiten. Fixirung ihrer Abzählung an Elementarmannigfaltigkeiten 278

§ 3. Verallgemeinerung auf beliebige Mannigfaltigkeiten 281

§ 4. Beispiele: 1. Die sphärischen Mannigfaltigkeiten S_n.
2. Die linearen projectiven Mannigfaltigkeiten P_n 282

§ 5. Beispiele (Fortsetzung): 3. Ein Büschel von gewissen Mannigfaltigkeiten vierten Grades R_{n-1} 284

§ 6. Beispiel 3. Fortsetzung: Abzählung der Charakteristik 287

II. Abschnitt.

Zurückführung der Abzählungen auf Kronecker'sche Charakteristiken für den Fall von Mannigfaltigkeiten M_{n-1} bez. M_n, die im Gebiete von n von einander unabhängigen Variablen durch eine Gleichung $f = 0$, bez. eine Ungleichung $f < 0$ gegeben sind 289

A. Erste Abzählung mit Hülfe von singulären Stellen im Gebiete $f < 0$.

§ 1. Die singulären Stellen. Vorbereitung der Abzählung. 289

§ 2. Bestimmung des Punktcharakters der singulären Stellen durch Zurückführung auf die Abzählungen des § 6 (Abschnitt I). 293

§ 3. Analytische Formulirung. Summation über die Punktcharaktere . . . 294

§ 4. Allgemeine Folgerungen. 296

B. Zweite Abzählung mit Hülfe von singulären Stellen im Gebiete $f = 0$.

§ 5. Umformung der Charakteristik. Die singulären Stellen auf $f = 0$. . . 298

§ 6. Punktcharaktere der verschiedenen Stellen. Summenformeln 301

§ 7. Zusammenstellung. Relationen zwischen den singulären Punkten . . . 304

§ 8. Schlussbemerkungen 306

III. Abschnitt.

Analysis situs der Mannigfaltigkeiten zweiten Grades 308

§ 1. Kanonische Formen für die Mannigfaltigkeiten zweiten Grades. Unterscheidung derjenigen mit nicht umkehrbarer und derer mit umkehrbarer Indicatrix 308

§ 2. Beispiel: Die zwei- und drei-dimensionalen M^2 311

§ 3. Abzählung der Charakteristik 313

I. Abschnitt.

Definition und Herleitung der Charakteristik n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Allgemeine Festsetzungen über die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten M_n.

Wir gehen aus von der durch n von einander unabhängige endliche*) reelle Variable $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildeten Mannigfaltigkeit von Werthsystemen („Punkten") $(x_1 x_2 \ldots x_n)$. Die „Umgebung jedes Punktes" $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_n)$ derselben ist durch eine Ungleichung:

$$\sum (x_i - \overline{x}_i)^2 < r^2$$

bezeichnet und soll eine *Elementarmannigfaltigkeit n^{ter} Dimension* E_n heissen. Ebenso bezeichnen wir alle auf eine solche E_n umkehrbar eindeutig und stetig beziehbaren Werthsysteme (x_i) als Elementarmannigfaltigkeiten E_n.

Solche sind z. B. die durch die Ungleichungen

$$x_1 < a, \quad x_2 < b \ldots x_n < k,$$

in welchen $a, b \ldots k$ endliche reelle Zahlen bedeuten, definirten Werthsysteme der (x_i).

Weiter (wie wir mit Rücksicht auf spätere Anwendungen hervorheben) die durch die Ungleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_\nu^2 < 1, \quad x_{\nu+1}^2 + x_{\nu+2}^2 + \cdots x_n^2 < 1$$

gegebenen, in welchen also den Punkten einer Elementarmannigfaltigkeit E_ν zu einander congruente Mannigfaltigkeiten $E_{n-\nu}$ so zugeordnet sind, dass den benachbarten Punkten von E_ν benachbarte Mannigfaltigkeiten $E_{n-\nu}$ eindeutig entsprechen.

Noch allgemeiner ist in unserem Systeme der $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ durch die Ungleichungen

$$\sum x_i^2 < 1, \quad \sum x_k^2 < 1 \cdots \sum x_m^2 < 1,$$

wobei *alle* x je einmal oder in beliebig vielen der Ungleichungen vorkommen, eine E_n definirt.

In einfachster Form geben wir die E_n durch die Ungleichung

$$\sum_1^n x_i^2 < 1. \tag{1}$$

*) Wegen gewisser Festsetzungen bezüglich unendlich grosser Werthsysteme der x vergl. § 4 (pag. 282).

Ihre Begrenzung ist dargestellt durch die Gleichung

$$\sum_1^n x_i^2 = 1, \tag{2}$$

die wir in dieser speciellen Form als eine „sphärische" Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen S_{n-1}, mit dem Mittelpunkt

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

bezeichnen. Die Begrenzung jeder andern E_n ist umkehrbar eindeutig und stetig auf diese S_{n-1} beziehbar.

Die Abzählungen, die wir im Folgenden für Mannigfaltigkeiten n^{ter} Dimension M_n festsetzen, beziehen sich stets auf *reguläre Mannigfaltigkeiten*, d. h. solche, für welche die Umgebung eines inneren Punktes stets durch eine E_n dargestellt ist; die Begrenzung (soferne es sich um nicht geschlossene Mannigfaltigkeiten handelt) setzen wir ebenso als reguläre Mannigfaltigkeit M_{n-1} voraus. Dabei aber ist es zweckmässig, Mannigfaltigkeiten von niedrigerer Dimension $\varkappa$ $M_\varkappa$ als Grenzfälle von Mannigfaltigkeiten M_n zu betrachten, insoferne wir gerade die Vereinigung bez. Trennung einer Mannigfaltigkeit M_n längs den Punkten einer enthaltenen Mannigfaltigkeit $M_\varkappa$ zur Umgestaltung der ursprünglichen M_n verwenden. Die Art nun, wie wir eine solche im Innern der M_n enthaltene Mannigfaltigkeit $M_\varkappa$ als Mannigfaltigkeit n^{ter} Dimension aufzufassen haben, ist eine völlig bestimmte und am einfachsten dadurch zu bezeichnen, dass wir eine Elementarmannigfaltigkeit E_n

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2 - \varrho^2 < 0$$

mit ihrem Mittelpunkt die $M_\varkappa$ durchlaufen lassen; das dann von der E_n bestrichene Gebiet ist die Mannigfaltigkeit n^{ter} Dimension, welche der $M_\varkappa$ entspricht; die „Enveloppe" der E_n — wenn dieser sofort analytisch umzusetzende geometrische Ausdruck gestattet ist — die Begrenzung jenes Gebietes von n Dimensionen.

§ 2.

Die Entstehungs- und Umformungsprocesse für die Mannigfaltigkeiten. Fixirung ihrer Abzählung an Elementarmannigfaltigkeiten.

Wir legen geradezu *die Processe des Zerschneidens bez. Vereinigens einer Elementarmannigfaltigkeit E_n in den Punkten einer $E_\varkappa$* — die dann in dem eben bezeichneten Sinne als ein solches Grenzgebilde einer n dimensionalen Mannigfaltigkeit aufzufassen ist — zu Grunde, um aus der E_n Mannigfaltigkeiten M_n entstehen zu lassen. Indem wir

für diese Processe (und zwar in der sogleich noch zu erörternden typischen Form) die Bezeichnung

$$\mp E_\varkappa$$

einführen, können wir für die betreffende Mannigfaltigkeit eine ihre Entstehungsweise andeutende symbolische Gleichung

$$(1) \qquad M_n = E_n + \sum (\mp E_\varkappa)$$

aufstellen, wo sich die Summation auf alle angewandten Umformungen $\mp E_\varkappa$ (wo $\varkappa$ die Zahlen $0, 1 \ldots n-1$ bedeuten kann) erstreckt.

Die Mannigfaltigkeit M_n ist durch die obige Formel keineswegs definirt; für ein und dieselbe M_n sind überdies noch die verschiedensten Umformungsprocesse denkbar, welche dieselbe aus einer E_n entstehen lassen. Weiter kann ein Process $\mp E_\varkappa$ auf verschiedene Mannigfaltigkeiten angewandt noch ganz verschiedene Umformungen derselben zur Folge haben. Wir legen aber, in Analogie mit den früheren Untersuchungen*) in der nachfolgend präcisirten Form eine ganz bestimmte Abzählung der Processe $\mp E_\varkappa$ zu Grunde, an der wir festhalten auch wenn die Wirkung jener Umformungen verschieden ist von derjenigen, welche die Abzählung geliefert hat. Der symbolischen Gleichung (1) lässt sich dann eine Summenformel über die einzelnen den Processen $\mp E_\varkappa$ zugeordneten Zahlen an die Seite setzen und diese ist es, welche wir als Charakteristik der Mannigfaltigkeit M_n bezeichnen. *Die kanonische Form*, in welcher wir — für die zu treffenden Abzählungen — das Ausschneiden (bez. Einfügen) einer Mannigfaltigkeit $E_\varkappa$ aus einer Mannigfaltigkeit M_n stets vornehmen, ist nun die, *bei welcher die („sphärische") Begrenzung $S_{\varkappa-1}$ der $E_\varkappa$ ganz der Begrenzung der M_n angehört.* Für die Abzählung der in dieser Form durch

$$\mp E_\varkappa$$

bezeichneten Processe setzen wir (wie früher) fest:

1. *Jeder Elementarmannigfaltigkeit E_n kommt die charakteristische Zahl $+1$ zu.*

2. *Jede Umformung einer M_n, die das Entstehen einer E_n hervorruft, wird entsprechend mit $+1$ gezählt, umgekehrt, jedes Verschwinden einer E_n mit -1.*

Diese Festsetzungen führen uns sofort dazu, *jedem* Processe $\mp E_\varkappa$ für die Umgestaltung einer M_n eine ganz bestimmte Zahl zuzuweisen, indem wir für's erste unsere Processe $\mp E_\varkappa$ dazu verwenden, eine Elementarmannigfaltigkeit E_n in zwei Stücke E_n zu zerspalten. Dies gelingt auf die einfachste Weise:

*) Vergl. Annalen 32, pag. 461 ff.

Wir zerschneiden zunächst die Elementarmannigfaltigkeit E_n:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$$

durch die Elementarmannigfaltigkeit E_{n-1}:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < 1 \quad x_n = 0;$$

sie zerfällt in die beiden Mannigfaltigkeiten E_n:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \qquad x_n < 0$$

und

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \qquad x_n > 0.$$

Wir haben — die Begrenzung der E_{n-1} gehört der Begrenzung der ursprünglichen E_n an, es handelt sich also um die kanonische Zerschneidung durch die E_{n-1} — die symbolische Gleichung

$$E_n - E_{n-1} = 2E_n,$$

und schliessen daraus: *Der Process*

$$-E_{n-1} \text{ ist mit } +1$$

für die Ableitung einer Charakteristik einer M_n zu zählen. Umgekehrt zählt:

$$+E_{n-1} \quad \text{mit} \quad -1.$$

Die Ausschneidung der E_{n-1} kann nun aber ihrerseits wieder dadurch erfolgen, dass wir zunächst die E_{n-2}:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 < 0, \quad x_{n-1} = 0, \quad x_n = 0$$

ausschneiden, und dann die beiden E_{n-1}:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < 1 \quad \begin{cases} x_{n-1} > 0 & x_n = 0, \\ x_{n-1} < 0 & x_n = 0. \end{cases}$$

Wir formuliren den Process analog wie oben durch:

$$E_n - E_{n-2} - 2E_{n-1} = 2E_n$$

und erkennen im Vergleich mit oben, dass

$$\mp E_{n-2} \quad \text{mit} \quad \mp 1$$

für die M_n zu zählen ist. Indem wir die Operation $-E_{n-2}$ nun wieder analog zerlegen und so fortfahren, gelangen wir allgemein zu der symbolischen Formel:

$$E_n - E_x - 2E_{x+1} - \cdots - 2E_{n-1} = 2E_n$$

und erhalten für die Abzählung des Ausschneidens bez. Einfügens einer E_x die Regel: *Der Process*

$$\mp E_x \text{ zählt mit } \mp(-1)^{n-x}$$

für die Charakteristik einer M_n.

Indem wir bei dieser Abzählung für die Umgestaltung einer Mannigfaltigkeit M_n die Fälle n $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ unterscheiden, ergiebt sich*):

*) Vergl. hier und für das Folgende die Sätze (1), (2), (3) Annalen 32, pag. 475, 476.

Das Ausschneiden einer E_x aus einer geraden M_n zählt ∓ 1, je nachdem x $\begin{cases} gerade \\ ungerade \end{cases}$ ist.

Das Ausschneiden einer E_x aus einer ungeraden M_n zählt ± 1, je nachdem x $\begin{cases} gerade \\ ungerade \end{cases}$ ist.

Der umgekehrte Process $+ E_x$ zählt im umgekehrten Sinne.

§ 3.

Verallgemeinerung auf beliebige Mannigfaltigkeiten.

Einer Mannigfaltigkeit M_n also, die ihrer Entstehung aus einer E_n nach durch die oben angegebene symbolische Form:

$$M_n = E_n + \sum_x (\mp E_x) \tag{1}$$

bezeichnet werden kann, ist nach unserem Princip eine Zahl K_n zuzuweisen:

$$K_n = 1 + \sum_x \mp (-1)^{n-x}. \tag{2}$$

Diese Formel können wir noch erweitern. Wir denken uns die M_n durch Ausschneiden bez. Einfügen beliebiger Mannigfaltigkeiten M_x umgeformt. Diese letzteren sind ihrerseits wieder aus Mannigfaltigkeiten E_x durch Umformung mittelst Mannigfaltigkeiten E_i entstanden:

$$M_x = E_x + \sum_i (\mp E_i)$$

und somit gehören ihnen Zahlen

$$K_x = 1 + \sum_i \mp (-1)^{x-i}$$

zu. Nehmen wir nun an, dass die Begrenzungsmannigfaltigkeit M_{x-1} der M_x ganz der Begrenzung der M_x angehört, und betrachten wir wieder die in dieser Form als kanonisch bezeichnete Operation $\mp M_x$, so sind die auf die M_x angewandten kanonischen Zerschneidungen $\mp E_i$ auch kanonische Zerschneidungen für die M_n, und *die Operation*

$$\mp M_x$$

ist für die M_n mit

$$\mp (-1)^{n-x} \cdot K_x$$

zu zählen. Gehört aber ein Theil M'_{x-1} der Begrenzung der M_x nicht auch zur Begrenzung der M_n und sei etwa die Operation $- M_x$ zu vollziehen, so ist zunächst dieser Theil M'_{x-1} zur Begrenzung der M_n zu ziehen durch die Operation $- M'_{x-1}$, (welche in analoger Behandlung einen bestimmten Beitrag zur Charakteristik K_n liefert); nach dieser Operation $- M'_{x-1}$ erscheint dann $- M_x$ in kanonischer Form u. s. f.

Dabei sei noch bemerkt, dass wenn es sich um die Umformung einer *geschlossenen* Mannigfaltigkeit handelt, eine „kanonische Zerschneidung" mit der Operation $-E_0$ („Punktirung") zu beginnen hat, durch welche wir zunächst der Mannigfaltigkeit eine (sphärische) Begrenzung ertheilen, von der aus die weitere Zerschneidung erfolgen kann.

So überschen wir, dass wir der symbolischen Entstehungsformel einer Mannigfaltigkeit M_n

$$M_n = E_n + \sum_x (\mp M_x)$$

oder (indem wir unter den M_x *auch die Ausgangsmannigfaltigkeit* E_n *einbegreifen) kürzer:*

$$M_n = \sum (\mp M_x) \tag{3}$$

die Abzählungsformel für eine Charakteristik K_n*:*

$$K_n = 1 + \sum_x \left(\mp (-1)^{n-x} \cdot K_x\right)$$

beziehungsweise kürzer:

$$K_n = \sum \left(\mp (-1)^{n-x} \cdot K_x\right) \tag{4}$$

an die Seite setzen können.

§ 4.

Beispiele: 1. Die sphärischen Mannigfaltigkeiten S_n. 2. Die linearen projectiven Mannigfaltigkeiten P_n.

Das hiermit gewonnene Princip der Abzählung führen wir zunächst an verschiedenen Beispielen durch.

1. Eine sphärische Mannigfaltigkeit S_n von n Dimensionen, ist im Sinne der Analysis situs äquivalent mit einer linearen Mannigfaltigkeit L_n von n Dimensionen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, soferne wir die unendlich grossen Werthsysteme der x_i zu einem einzigen zusammenfassen.*) Für sie ergiebt sich sofort, da das Ausschneiden eines Punktes die Mannigfaltigkeit in eine E_n verwandelt, die symbolische Gleichung:

$$S_n - E_0 = E_n;$$

da aber $-E_0$ mit ∓ 1 zu zählen ist, *je nachdem n gerade oder ungerade, so folgt, je nach dieser Unterscheidung von n*

$$S_n = \begin{cases} 2 \\ 0. \end{cases} \tag{1}$$

*) In der Folge sei stets mit L_n die lineare n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem unendlich weiten Punkt bezeichnet, im Gegensatz zu der sogleich zu besprechenden linearen „projectiven" Mannigfaltigkeit P_n. Für die Umformung der L_n in eine S_n mit Hülfe der „Transformation durch reciproke Radien" vergl. z. B. die auf $n-1$ Dim. bezüglichen Formeln auf pag. 293.

2. Fasst man dagegen die Werthesysteme der n unabhängigen Variablen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bezüglich ihres Verhaltens für unendlich grosse Werthe der x_i so auf, dass man diese je nach dem Werthe der Verhältnisse dieser Grössen unterscheidet — die dann ihrerseits ein lineares Werthsystem von $n-1$ Dimensionen bilden, für welches die gleichen Festsetzungen getroffen seien — so gelangt man zu folgender Abzählung. Es sei die so definirte M_n als „projective Mannigfaltigkeit" P_n (in aus den räumlichen Vorstellungen übertragenem Sinne) bezeichnet. Das Ausschneiden aller unendlichen Werthsysteme der (x_i) kann dann als Entfernen einer P_{n-1} bezeichnet werden, durch welches die P_n in eine E_n verwandelt wird:

$$P_n - P_{n-1} = E_n$$

Dies Ausschneiden der P_{n-1} kann nun seinerseits wieder ersetzt werden nach der symbolischen Beziehung:

$$P_{n-1} - P_{n-2} = E_{n-1}$$

und ebenso hat man wieder

$$\begin{aligned} P_{n-2} - P_{n-3} &= E_{n-2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_2 \quad - P_1 \quad &= E_2, \\ P_1 \quad - P_0 \quad &= E_1, \end{aligned}$$

und schliesslich:

$$P_0 \quad = E_0.$$

Die Addition der sämmtlichen Gleichungen führt auf

$$P_n = E_n + E_{n-1} + E_{n-2} + \cdots + E_1 + E_0;$$

da nun bei der Abzählung der E_n je zwei Zahlen ± 1 sich zerstören, folgt

$$(2) \qquad P_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. —

Die Mannigfaltigkeiten P_n *gerader* Dimension erweisen sich als *„Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indicatrix"*. Dies ist, wenn wir die Definition solcher Mannigfaltigkeiten direct aus dem uns geläufigen Verhalten der entsprechenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten (vergl. etwa Annalen 32 pag. 479) übertragen, dadurch zu erweisen, dass wir*) ein „Coordinatensystem" von n Axen mit bestimmten

*) Es sei in dieser Entwicklung zur Kürze eine mehr geometrische Redeweise gestattet. In analytischer Form lässt sich unter zu Grundelegung eines ersten Bezugsystemes von Coordinaten ξ_i eine continuirliche Veränderung von Coordinatenrichtungen längs eines geschlossenen Weges durch eine lineare Transformation der ξ_i mit einem Parameter fixiren. Hat dann nach Durchlaufung des Weges eine Anzahl von Coordinatenaxen ihre ursprüngliche Lage wieder erreicht,

„positiven" Richtungen in unserer Mannigfaltigkeit annehmen und nun einen geschlossenen Weg in derselben angeben, auf welchem nach einmaliger Durchlaufung die Richtungen einer ungeraden Anzahl von Axen in die entgegengesetzten verwandelt erscheinen. Wir übersehen dies hier am einfachsten aus dem Umstande, dass wir unsere P_n auch dadurch aus der E_n

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$$

herstellen können, dass wir je einen Punkt:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$$

der sphärischen Begrenzung von E_n seinem diametral gegenüberliegenden

$$-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \cdots, -\bar{x}_n$$

zuordnen. Die Begrenzung schliesst sich dann in einer P_{n-1} zusammen. $(n-1)$ im Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ in der Begrenzung fixirten Richtungen, die wir am einfachsten als orthogonales Axensystem der tangentialen linearen Mannigfaltigkeit

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n - 1 = 0$$

wählen können, entsprechen nun im Punkte $-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \cdots, -\bar{x}_n$ gerade die *entgegengesetzten* Richtungen. Durchlaufen wir also mit diesem Axensystem den durch die gerade Verbindungslinie der beiden Gegenpunkte bezeichneten geschlossenen Weg [wobei dieser radius vector die n^{te} Coordinatenaxe für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in unserer Mannigfaltigkeit abgiebt], so werden auf demselben $n-1$ Richtungen in die entgegengesetzten verwandelt. *Somit sind die projectiven Mannigfaltigkeiten P_n gerader Dimension solche mit umkehrbarer Indicatrix,* während die von ungerader Dimension, bei welchen sich auf dem bezeichneten Wege eine *gerade* Anzahl von Coordinatenrichtungen umkehren, und wie direct ersichtlich auch keine *anderen* Wege der verlangten Eigenschaft möglich sind, als solche mit nicht umkehrbarer Indicatrix zu bezeichnen sind.

§ 5.

Beispiele (Fortsetzung). 3. Ein Büschel von gewissen Mannigfaltigkeiten vierten Grades R_{n-1}.

Wir betrachten als drittes Beispiel ein einfach unendliches Büschel von Mannigfaltigkeiten R_{n-1}, welche lückenlos und einfach die durch

so hat ein auf sie bezüglicher Theil der Determinante der linearen Transformation wieder seinen Ausgangswerth erlangt und zwar mit dem gleichen bez. entgegengesetzten Vorzeichen, je nachdem eine gerade bez. ungerade Anzahl dieser Axen dabei ihre Richtung in die entgegengesetzte verwandelt haben.

das System der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegebene Ausgangsmannigfaltigkeit L_n erfüllen, dergestalt, dass jedes Werthsystem $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ der L_n einer und nur einer R_{n-1} angehört. Unter λ den Parameter des Büschels verstanden, seien diese R_{n-1} durch die Gleichung gegeben:

$$(1) \qquad \left(\sum_1^n x_i^2 + 1\right)^2 - (2+\lambda)^2 \sum_1^\nu x_i^2 = 0.$$

Für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ ergeben sich die zwei reellen Grenzmannigfaltigkeiten des Büschels, nämlich einmal die sphärische Mannigfaltigkeit

$$(2a) \qquad \sum_1^\nu x_i^2 - 1 = 0, \; x_{\nu+1} = 0, \; x_{\nu+2} = 0, \cdots, x_n = 0$$

von $\nu - 1$ Dimensionen: $S_{\nu-1}$; dann die lineare Mannigfaltigkeit

$$(2b) \qquad x_1 = 0, \; x_2 = 0, \cdots, x_\nu = 0$$

von $n - \nu$ Dimensionen: $L_{n-\nu}$.

Eine beliebige der Mannigfaltigkeiten R_{n-1} bezeichnen wir am besten durch die beiden Systeme sphärischer Mannigfaltigkeiten, welche dieselbe lückenlos und einfach überdecken:

Einmal nämlich können wir jedem Punkte der eben (2a) genannten sphärischen Mannigfaltigkeit $S_{\nu-1}$ eine auf der R_{n-1} gelegene sphärische Mannigfaltigkeit $S_{n-\nu}$ zuweisen. Man lege nämlich durch einen Punkt A

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\nu; \; x_{\nu+1} = 0, \; x_{\nu+2} = 0 \cdots x_n = 0$$

der $S_{\nu-1}$, für welchen also

$$\sum_1^\nu \bar{x}_i^2 = 1$$

ist und durch die „Coordinatenaxen" $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n$ die so bestimmte $L_{n-\nu+1}$:

$$x_1 = r\bar{x}_1, \; x_2 = r\bar{x}_2, \ldots, x_\nu = r\bar{x}_\nu;$$

dieselbe schneidet unsere $S_{\nu-1}$ in den beiden Punkten A, A'

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{und} \quad x_i = -\bar{x}_i$$

und die R_{n-1} nach zwei in der Gleichung*):

$$\left(r^2 \cdot \sum_1^\nu \bar{x}_i^2 + \sum_{\nu+1}^n x_i^2 + 1\right)^2 - (2+\lambda)^2 \cdot r^2 \cdot \sum_1^\nu \bar{x}_i^2 = 0$$

enthaltenen sphärischen Mannigfaltigkeiten $S_{n-\nu}$, welche wir eindeutig je diesen beiden Punkten zuweisen.

---

*) Der Radius vector r ist als Coordinatenaxe mit den $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n$ in der $L_{n-\nu}$ eingeführt.

Die R_{n-1} erscheint so lückenlos und einfach von einem $(n-1)$-fach unendlichen System von Mannigfaltigkeiten $S_{n-\nu}$ überdeckt.

Als *Innenraum* der R_{n-1} sei der Theil der Mannigfaltigkeit L_n bezeichnet, für welchen die linke Seite der Glg. (1) kleiner als Null ist. In demselben liegt die Mannigfaltigkeit $S_{\nu-1}$ (2a), von welcher jeder Punkt $\bar{x}_i$ das Innengebiet $E_{n-\nu+1}$ der im zugeordneten $S_{n-\nu}$ bezeichnet. *Die Gesammtheit aller dieser längs der $S_{\nu-1}$ angeordneten $E_{n-\nu+1}$ erfüllt den Innenraum unserer R_{n-1} und auf jene $S_{\nu-1}$ zieht sich derselbe für $\lambda = 0$ zusammen.*

Die ganz analoge Rolle aber ergiebt sich für die im *Aussenraum* einer beliebigen unserer R_{n-1} gelegene $L_{n-\nu}$ (2b) und ein ihr zugehöriges auf der R_{n-1} gelegenes System sphärischer Mannigfaltigkeiten $S_{\nu-1}$.

Legt man nämlich durch einen Punkt B der $L_{n-\nu}$:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_\nu = 0,\ \bar{x}_{\nu+1},\ \bar{x}_{\nu+2}, \ldots, \bar{x}_n$$

und die sphärische Mannigfaltigkeit $S_{\nu-1}$:

$$\sum_1^\nu x_i^2 = 1,\ x_{\nu+1} = 0 \cdots x_n = 0$$

die dadurch in unserer L_n völlig bestimmte S_ν, so schneidet dieselbe einmal die $L_{n-\nu}$ in den 2 Punkten B, B':

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_\nu = 0, \quad \bar{x}_{\nu+1},\ \bar{x}_{\nu+2}, \cdots, \bar{x}_n$$

und

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_\nu = 0,\ -\frac{\bar{x}_{\nu+1}}{\bar{r}'^2}, -\frac{\bar{x}_{\nu+2}}{\bar{r}'^2}, \ldots, -\frac{\bar{x}_n}{\bar{r}'^2}$$

wo

$$\bar{r}'^2 = \bar{x}_{\nu+1}^2 + \bar{x}_{\nu+2}^2 + \cdots + \bar{x}_n^2,$$

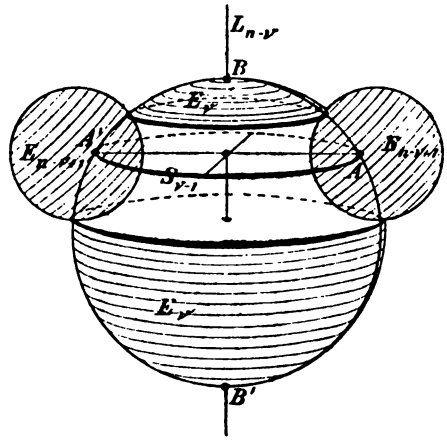
und die R_{n-1} nach zwei sphärischen Mannigfaltigkeiten $S_{\nu-1}$, welche wir eindeutig jenen beiden Punkten zuweisen. *So erscheint die R_{n-1} auch einfach und lückenlos überdeckt von einem $(n-\nu)$-fach unendlichen System von $S_{\nu-1}$.*

Der *Aussenraum* der R_{n-1} enthält unsere $L_{n-\nu}$; jedem Punkt derselben gehört das (hier sphärisch gestaltete) Elementargebiet E_ν zu, welches auf der oben bestimmten sphärischen Mannigfaltigkeit S_ν von R_{n-1} ausgeschnitten wird. *Die Gesammtheit aller dieser längs $L_{n-\nu}$ angeordneten E_ν erfüllt den Aussenraum unserer R_{n-1} und auf jene $L_{n-\nu}$ zieht sich derselbe für $\lambda = \infty$ zusammen.*

Es sei, die Anordnung kurz zu veranschaulichen, an die Verhältnisse beim Kreisring ($n = 3$, $\nu = 2$) erinnert. Auf demselben liegen als die zwei Systeme sphärischer Mannigfaltigkeiten $S_{n-\nu}$ und $S_{\nu-1}$ — die beiden Kreissysteme. Der *Innenraum* ist erfüllt von den längs der

Mittellinie des Ringes angeordneten Kreisscheiben ($E_{n-\nu+1}$), der *Aussenraum* von Kugelabschnitten (E_ν) deren Mittelpunkte sich längs der Axe des Ringes (der $L_{n-\nu}$) anordnen. Man vergleiche die nebenstehende Figur, die für den Ring entworfen ist, in welcher aber die allgemeinen Bezeichnungen eingetragen sind.

Fig. 1.



§ 6.

Beispiel 3, Fortsetzung: Abzählung der Charakteristik.

Mit Hülfe der so geschilderten Zusammensetzung des Innen- und Aussengebietes, R_n^i bez. R_n^a der R_{n-1} ergiebt sich nun sofort die Verwandlung derselben in Elementargebiete und damit die Abzählung der zugehörigen charakteristischen Zahlen.

Die Mannigfaltigkeit R_n^i ist, wie eben abgeleitet, constituirt aus jenen $(\nu-1)$-fach unendlich vielen, längs der $S_{\nu-1}$ (2a) continuirlich angeordneten $E_{n-\nu+1}$. Schalten wir aus der $S_{\nu-1}$ einen Punkt (E_0) aus, so können wir dieselbe umkehrbar eindeutig beziehen auf eine $E_{\nu-1}$, etwa:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_\nu^2 - a < 0$$

während wir die, je einem Punkte dieser $E_{\nu-1}$ zugeordnete $E_{n-\nu+1}$ durch

$$\xi_{\nu+1}^2 + \xi_{\nu+2}^2 + \cdots + \xi_n^2 - b < 0$$

darstellen können. Die R_n^i ist somit nach Ausscheidung der einen jenem Punkte E_0 zugeordneten $E_{n-\nu+1}$ in die durch die obigen Ungleichungen (vergl. § 1 pag. 277) gegebene E_n verwandelt. Da weiter die Ausschneidung jener $E_{n-\nu+1}$ in der kanonischen Form — die Begrenzung der $E_{n-\nu+1}$ gehört ganz der Begrenzung der R_n^i an — vor-

genommen ist, haben wir für die Bestimmung der charakteristischen Zahl die symbolische Gleichung: $R_n^i - E_{n-\nu+1} = E_n$, oder:

$$R_n^i = E_n + E_{n-\nu+1}. \tag{1}$$

Beachten wir andererseits, dass nach Formel (2b) (§ 5 pag. 285) die R_n^i durch Aenderung des Parameters λ schliesslich übergeht in die ganze Mannigfaltigkeit S_n mit Ausschluss der Grenzmannigfaltigkeit $L_{n-\nu}$, so ergiebt sich sofort noch eine zweite Abzählung, indem wir hiernach die Mannigfaltigkeit R_n^i uns entstanden denken können aus einer L_n durch Ausschneiden einer $L_{n-\nu}$, oder was dasselbe sagt einer $S_{n-\nu}$, die wiederum (kanonisch) in die Form $(E_0 + E_{n-\nu})$ für die Zerschneidung zerlegt sein mag. Darnach ergiebt sich die zweite Beziehung

$$R_n^i = L_n - E_0 - E_{n-\nu}$$

oder, wenn wir beachten, dass $L_n - E_0 = E_n$ ist:

$$R_n^i = E_n - E_{n-\nu}. \tag{2}$$

Beide symbolischen Gleichungen ergeben nun (nach pag. 281 Formel (2)) dieselbe charakteristische Zahl K_n^i für das Gebiet R_n^i und zwar ist mit der Unterscheidung gerader und ungerader Zahlen n und ν *die Zahl* K_n^i

(3) K_n^i:

	ν gerade	ν ungerade
n gerade	0	2
n ungerade	0	2

Für den Aussenraum R_n^a ergeben sich, mit Berücksichtigung der p. 286 dargestellten Beziehungen aus einer ganz analogen Abzählung die beiden symbolischen Gleichungen:

$$R_n^a = E_n + E_\nu \tag{4}$$

und

$$R_n^a = E_n - E_{\nu-1} \tag{5}$$

aus welchen, je nachdem n, ν gerade oder ungerade ist, *die charakteristische Zahl* K_n^a sich wie folgt ergiebt:

(6) K_n^a:

	ν gerade	ν ungerade
n gerade	2	0
n ungerade	0	2

Wir halten für die sogleich zu gebende Verwendung unserer Mannigfaltigkeiten R_n^i und R_n^a die in den symbolischen Gleichungen (2) und (5) ausgedrückte einfachste Form fest als *Mannigfaltigkeiten E_n, aus welchen eine Elementarmannigfaltigkeit E_k ausgeschnitten wird.* Im Sinne der Analysis situs sind also unsere obigen Definitionsgleichungen äquivalent mit der einfachsten Darstellung einer solchen Mannigfaltigkeit durch:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-k}^2)\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1) < 0$$

in welcher aus der Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 < 0$$

die E_k

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-k} = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 < 0$$

ausgeschlossen ist.

Auf die charakteristische Zahl für die *Begrenzung* einer solchen Mannigfaltigkeit gehen wir weiter unten ein (vergl. pag. 297).

II. Abschnitt.

Zurückführung der Abzählungen auf Kronecker'sche Charakteristiken für den Fall von Mannigfaltigkeiten M_{n-1}, bez. M_n, die im Gebiete von n von einander unabhängigen Variablen durch eine Gleichung $f = 0$, bez. eine Ungleichung $f < 0$ gegeben sind.

A. Erste Abzählung mit Hülfe von singulären Stellen im Gebiete $f < 0$.

§ 1.

Die singulären Stellen. Vorbereitung der Abzählung.

Wir gehen nunmehr dazu über, die Charakteristik aufzustellen für diejenigen begrenzten Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, die wir in unserer zu Grunde gelegten linearen Mannigfaltigkeit der $(x_1, x_2, .., x_n)$ durch *eine* Ungleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$$

definiren können und treffen gleichzeitig die Abzählung für die begrenzende Mannigfaltigkeit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Dabei setzen wir noch voraus, dass die ersten Ableitungen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von f nach den x_i nur für eine *endliche* Anzahl von Werthsystemen

(x_i) gleichzeitig verschwinden, und dass für dieselben nicht auch $f = 0$ sein soll.

Analog wie in den früheren Aufsätzen für M_2 und M_3 betrachten wir die M_{n-1} $f = 0$ als enthalten in einem einfach unendlichen System von Mannigfaltigkeiten M_{n-1}, und wählen für die folgenden Formulirungen auch hier wieder am zweckmässigsten das System

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$$

welches lückenlos und einfach die lineare Mannigfaltigkeit L_n der x_i erfüllt*). Setzen wir dabei voraus, dass für den „unendlich fernen Punkt" die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ positiv sei, so können wir ebenso wie früher annehmen, dass für einen gewissen negativen Werth der Constanten $C = C_0$ einmal die Mannigfaltigkeit $f = C_0$ lediglich aus einem isolirten Punkte besteht, und das von hier ab, mit wachsender Constante C die Entstehung des Gebietes $f < 0$ durch ein continuirliches „Wachsen des Innenraumes" verfolgt werden kann; gleichzeitig entsteht dann die Mannigfaltigkeit $f = 0$ durch successive Deformation aus $f = C$.

Dieser Entstehungsprocess eignet sich nun sofort für die Abzählung charakteristischer Zahlen für diese M_n $(f < 0)$ und die M_{n-1} $(f = 0)$. Eine Aenderung der Zahlen tritt nämlich sprungweise *an den singulären Stellen* der Mannigfaltigkeiten $f = C$ ein; es sind die Stellen im Innengebiet von $f = 0$, für welche

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$$

ist (wobei die Indices die Ableitungen von $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nach den Variabeln bezeichnen).

An diesen Stellen entstehen, bez. vereinigen sich Theile der Mannigfaltigkeiten $f = C$ und sie haben wir daher in ihrem Einfluss auf die Charakteristik der M_n und M_{n-1} zu betrachten. In der Umgebung jeder solchen Stelle lässt sich nun (nach unseren früheren Voraussetzungen) das System $f = C$ ersetzen durch ein System von Mannigfaltigkeiten zweiten Grades und daher *die Bestimmung des Punktcharakters einer solchen Stelle sofort an der durch eine reelle lineare Transformation erhaltenen canonischen Form:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \cdots - x_n^2 = \mp \varepsilon$$

---

*) Wie schon in der Einleitung erwähnt, beschränken wir uns hier auf die einfachsten Entstehungsprocesse. Verallgemeinerungen, wie sie etwa für ein System

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, C) = 0,$$

welches den Parameter in beliebiger Abhängigkeit enthält, u. a. zu treffen wären, lassen sich in Analogie mit den früheren Untersuchungen (vergl. etwa die in Bd. 32, pag. 467 ff, pag. 491 ff. gegebenen Formulirungen) entwickeln.

(ε sei als positive Grösse vorausgesetzt) *vornehmen*. Wir grenzen dabei den singulären Punkt

$$x_i = 0, \quad \varepsilon = 0$$

durch die sphärische Mannigfaltigkeit S_{n-1}

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \varrho^2$$

ab, wo ϱ einen kleinen, festen Werth bezeichnet, so zwar, dass im *Innern* dieser S_{n-1} unsere obigen Mannigfaltigkeiten M_{n-1} mit den eben gegebenen Mannigfaltigkeiten zweiten Grades identificirt werden können.

Wir machen noch die nicht weiter beschränkende Annahme, dass in dem Intervalle von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ unsere Mannigfaltigkeiten M_{n-1} $f = C$ keinen *weiteren* singulären Punkt besitzen und betrachten nun die Aenderung der charakteristischen Zahlen beim Durchgang von $-\varepsilon$ nach $+\varepsilon$, wobei also der singuläre Punkt $x_i' = 0$ zunächst *ausserhalb*, dann *innerhalb* der begrenzenden Mannigfaltigkeiten M_{n-1} liegt.

Es sei nun, zur kürzeren Ausdrucksweise mit M_{n-1}^0 die Mannigfaltigkeit M_{n-1} mit singulärem Punkte bezeichnet, mit $M_{n-1}^{-\varepsilon}$ eine unmittelbar vorangehende, mit $M_{n-1}^{+\varepsilon}$ eine unmittelbar darauf folgende. Ebenso seien die betr. Innengebiete dieser Mannigfaltigkeiten durch M_n^0, $M_n^{-\varepsilon}$, $M_n^{+\varepsilon}$ bezeichnet.

Dann ergeben sich sofort folgende Lagenbeziehungen:

In dem Aussengebiet

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > \varrho^2$$

unserer den singulären Punkt abgrenzenden sphärischen Mannigfaltigkeit S_{n-1} ist der Verlauf der drei Mannigfaltigkeiten M_{n-1} und ebenso der drei M_n im Sinne der Analysis situs nicht verschieden. Ebenso ist auch der Schnitt jeder der drei Mannigfaltigkeiten M_{n-1} mit der S_{n-1} im Sinne der Analysis situs identisch. Nur die im Innengebiet der S_{n-1} liegenden Theile der drei M_{n-1} unterscheiden sich von einander; wir charakterisiren sie am einfachsten dadurch, dass wir dieselben auf die sphärische Mannigfaltigkeit S_{n-1} abbilden. Bezeichnen wir nämlich den Schnitt der M_{n-1}^0 mit der S_{n-1} durch T_{n-2}^0, und die beiden Gebiete, in welche diese T_{n-2}^0 die S_{n-1} trennt

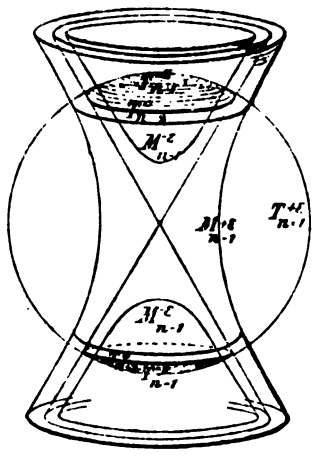
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \varrho^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \cdots - x_n^2 \begin{cases} < 0, \\ > 0 \end{cases}$$

beziehungsweise durch $T_{n-1}^{-\varepsilon}$ und $T_{n-1}^{+\varepsilon}$, so ergiebt sich sofort (durch

Projection vom Mittelpunkt $x_i' = 0$ aus), dass das im Innern der S_{n-1} gelegene Gebiet der $M_{n-1}^{-\varepsilon}$ umkehrbar eindeutig auf das Gebiet $T_{n-1}^{-\varepsilon}$ und ebenso das analoge Gebiet der $M_{n-1}^{+\varepsilon}$ auf $T_{n-1}^{+\varepsilon}$ bezogen werden kann, während die T_{n-2}^{0} selbst $1 - \infty^1$-deutig der singulären Mannigfaltigkeit M_{n-1}^{0} entspricht.

Fig. 2.



In nebenstehender Figur ist für $n=3$ — an dem Uebergang

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \mp \varepsilon$$

von einem zweischaligen ($M_{n-1}^{-\varepsilon}$) zu einem einschaligen ($M_{n-1}^{+\varepsilon}$) Hyperboloid durch den Kegel (M_{n-1}^{0})

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

die gemeinte Bezeichnung eingetragen. Das zweischalige Hyperboloid wird auf die beiden Kugelhauben ($T_{n-1}^{-\varepsilon}$), das einschalige auf den ringförmigen Theil ($T_{n-1}^{+\varepsilon}$) der Kugel abgebildet. —

Wir können nun wegen dieser eindeutigen Beziehung die Mannigfaltigkeiten $M_{n-1}^{-\varepsilon}$ und $M_{n-1}^{+\varepsilon}$, ohne sie im Sinne der Analysis situs zu ändern, dadurch gestaltlich umformen, dass wir je die in das Innere der S_{n-1} ragenden Gebiete derselben ersetzen bez. durch die beiden auf der S_{n-1} liegenden Gebiete $T_{n-1}^{-\varepsilon}$ und $T_{n-1}^{+\varepsilon}$.

Mit Umgehung der singulären Mannigfaltigkeit M_{n-1}^{0} kann demnach auch der Uebergang von der $M_{n-1}^{-\varepsilon}$ zur $M_{n-1}^{+\varepsilon}$ im Sinne der Analysis situs ersetzt werden durch den folgenden: Aus der $M_{n-1}^{-\varepsilon}$ wird durch Zerschneidung längs der T_{n-2}^{0} das Gebiet $T_{n-1}^{-\varepsilon}$ entfernt und an dessen Stelle längs eben jener T_{n-2}^{0} das Gebiet $T_{n-1}^{+\varepsilon}$ eingefügt. In symbolischer Form lässt sich also diese Aenderung darstellen durch

$$(1) \qquad -T_{n-1}^{-\varepsilon} + T_{n-1}^{+\varepsilon};$$

während das Gebiet T_{n-2}^{0}, welches zuerst ausgeschnitten, dann aber wieder zugefügt wird, für die Abzählung ausser Betracht bleibt.

Analog gestaltet sich der Uebergang für die Mannigfaltigkeiten n^ter^ Dimension, von $M_n^{-\varepsilon}$ zu $M_n^{+\varepsilon}$, folgendermassen:

Es wird eine Elementarmannigfaltigkeit E_n (der Innenraum der S_{n-1}) der $M_n^{-\varepsilon}$ zugefügt und zwar mit derselben längs der in der Begrenzung der $M_n^{-\varepsilon}$ enthaltenen $T_{n-1}^{-\varepsilon}$ vereinigt. Dabei ist zu beachten, dass die Begrenzung der $T_{n-1}^{-\varepsilon}$, die M_{n-2}^{0}, vollständig in der Begrenzung

sowohl der M_n^{-e} als der E_n gelegen ist. Für die Abzählung ergiebt sich also hier die symbolische Darstellung der Umänderung durch:

$$+ E_n + T_{n-1}^{-e}. \tag{2}$$

§ 2.

Bestimmung des Punktcharakters der singulären Stellen durch Zurückführung auf die Abzählungen des § 6 (Abschnitt I).

Die für die Abzählung in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten T_{n-1}^{-e}, T_{n-1}^{+e} und deren Begrenzung T_{n-2}^{0} sind uns aber wohlbekannt. Verwandeln wir nämlich die sphärische Mannigfaltigkeit S_{n-1}

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \varrho^2,$$

welche die obigen Mannigfaltigkeiten enthält, in eine *lineare* Mannigfaltigkeit L_{n-1}, durch eine „Transformation durch reciproke Radien", deren Centrum auf der S_{n-1} liegt, etwa durch:

$$x_1 = 4\varrho^2 \cdot \frac{\xi_1}{\sum_1^n \xi_i^2}, \quad x_2 = 4\varrho^2 \cdot \frac{\xi_2}{\sum_1^n \xi_i^2}, \cdots, x_n + \varrho = 4\varrho^2 \cdot \frac{\xi_n}{\sum_1^n \xi_i^2},$$

so gehen die beiden, unsere Mannigfaltigkeit T_{n-2}^{0} definirenden Gleichungen:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \cdots - x_n^2 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \varrho^2$$

über in

$$32\varrho^2(\xi_1^2 + \cdots + \xi_\nu^2) - \left(4\varrho^2 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 = 0$$
$$\xi_n = 2,$$

also (in einer um eins niedrigeren Dimension) genau in eine der in § 5 und 6 betrachteten Mannigfaltigkeiten. Dabei ist der Innen- bez. Aussenraum

$$32\varrho^2(\xi_1^2 + \cdots + \xi_\nu^2) - \left(4\varrho^2 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

derselben punktweise auf die Gebiete T_{n-1}^{-e} beziehungsweise T_{n-1}^{+e} bezogen.

Die Abzählung der Aenderung der Charakteristik unserer Mannigfaltigkeiten M_{n-1} und M_n beim Durchgang durch die singuläre Stelle

(in der Richtung von $-\varepsilon$ nach $+\varepsilon$) ergiebt sich also aus den Tabellen (6) und (3) auf pag. 288 sofort folgendermassen:

1. Für die M_{n-1} ergiebt sich nach der symbolischen Formel (1) des vorigen Paragraphen (pag. 292): Der Process $-T_{n-1}^{-\varepsilon}$ zählt:

	ν gerade	ν ungerade
n gerade	0	-2
n ungerade	-2	0

der zweite Process $+T_{n-1}^{+\varepsilon}$

	ν gerade	ν ungerade
n gerade	0	$+2$
n ungerade	0	$+2$

Der Uebergang von $M_{n-1}^{-\varepsilon}$ zu $M_{n-1}^{+\varepsilon}$ zählt also:

(1)

	ν gerade	ν ungerade
n gerade	0	0
n ungerade	-2	$+2$

2. *Für die gleichzeitige Aenderung der Charakteristik des Innenraumes der M_{n-1} ergeben sich ebenso aus der symbolischen Gleichung* (2) (pag. 293) *die Zahlen:*

(2)

	ν gerade	ν ungerade
n gerade	$+1$	-1
n ungerade	-1	$+1$

Beim Durchlaufen der Mannigfaltigkeiten in der entgegengesetzten Richtung — wo also der singuläre Punkt zuerst im Innenraum der M_{n-1} gelegen ist und nach der Umformung in den Aussenraum zu liegen kommt — tritt die umgekehrte Zählung ein.

§ 3.

Analytische Formulirung. Summation über die Punktcharaktere.

Beachten wir nun, dass die Unterscheidung von geradem und ungeradem ν ganz allgemein und ohne die für die Herleitung benutzte canonische Form für jede Stelle

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$$

in unseren Mannigfaltigkeiten $f(x_1 \ldots x_n) = C$ gegeben wird durch das Vorzeichen der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \cdots f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} \cdots f_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} \cdots f_{nn} \end{vmatrix}$$

so lässt sich der Unterschied der Abzählung sofort in der Kronecker'schen Form der Punktcharakteristik mit Hülfe dieser Functionaldeterminante darstellen. Versteht man nämlich unter $[\Delta]$ die Werthe $+1, -1$, je nachdem der Werth von Δ positiv oder negativ*) ist, so ist für die von uns betrachteten Punkte der Werth von $[\Delta]$ gegeben in der Tabelle:

	ν gerade	ν ungerade
n gerade	$+1$	-1
n ungerade	-1	$+1$

Er stimmt also mit den in Formel (2) der vorigen Seite gegebenen Werthen für die Aenderung der charakteristischen Zahl der M_n beim Durchgang durch den singulären Punkt überein, während *für ungerade* n der doppelte Werth auch die Aenderung der Charakteristik der begrenzenden M_{n-1} bezeichnet.

Bildet man nun die Summe der Werthe, welche $[\Delta]$ für sämmtliche im Innern von $f = 0$ gelegenen singulären Punkte, also für die Punkte

$$f < 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0 \cdots f_n = 0,$$

besitzt, *so ist direct*

$$K_n^i = \sum [\Delta] \tag{1}$$

und weiter für ungerade n die Charakteristik K_{n-1} der begrenzenden Mannigfaltigkeit M_{n-1} $f = 0$:

$$K_{n-1} = 2K_n^i = 2\sum [\Delta]. \tag{2}$$

Für gerades n dagegen ist die charakteristische Zahl der durch $f = 0$ gegebenen („geschlossenen") Mannigfaltigkeit M_{n-1} stets Null, weil nach den obigen Tabellen jeder Uebergang durch einen singulären Punkt mit 0 zählt.

*) Wir schliessen der Einfachheit halber den *speciellen* Fall $\Delta = 0$ aus.

So erhalten wir die folgende

Tabelle I

für die Charakteristiken unserer Mannigfaltigkeiten, bei der Abzählung im Gebiet $f < 0$.

Für die Abzählung der Mannigfaltigkeit	ist der *Punktcharakter* der Sprungstellen gegeben durch:		Daraus folgt die *Charakteristik:*	
M_n^i	$[\Delta]$		$K_n^i = \sum[\Delta]$ Σ über $f<0, f_1=0,\ldots,f_n=0$	
	n gerade	n ungerade	n gerade	n ungerade
M_{n-1}	0	$2[\Delta]$	$K_{n-1}=0$	$K_{n-1}=2\sum[\Delta]=2K_n^i$ Σ über $f<0, f_1=0,\ldots,f_n=0.$

§ 4.

Allgemeine Folgerungen.

Wir können aus den Formeln noch einige weitere Folgerungen ableiten. Betrachten wir gleichzeitig mit der Mannigfaltigkeit M_n^i, $f<0$, die andere M_n^a, $f>0$, so erfüllen beide zusammen mit der geschlossenen Mannigfaltigkeit M_{n-1} $f=0$ das ganze Gebiet L_n der Variablen $(x_1 \ldots x_n)$, was durch die symbolische Gleichung:

$$M_n^i + M_n^a + M_{n-1} = L_n$$

ausgedrückt sei. Setzen wir diese Gleichung in die für die zugehörigen Charakteristiken um und beachten, dass für gerades n das Gebiet L_n die Charakteristik 2, für ungerades n dagegen die Charakteristik 0 besitzt (vergl. pag. 282), dass ferner für gerade n die Charakteristik der M_{n-1}

$$K_{n-1} = 0,$$

für ungerade n

$$K_{n-1} = 2K_n^i$$

ist, so folgt:

Für gerade n die Relation:

$$K_n^a + K_n^i = 2, \tag{1}$$

für ungerade n dagegen

$$K_n^a - K_n^i = 0. \tag{2}$$

Weiter folgt hieraus sofort die Abzählung der Aenderung der Charakteristik beim Durchgang durch die oben erwähnten singulären Punkte für den „Aussenraum", die wir vorhin für den „Innenraum" formulirt haben:

Aendert sich nämlich beim Durchgang durch einen singulären Punkt die Charakteristik K_n^i um $+1$, so ändert sich die Charakteristik des „Aussenraumes" K_n^a gleichzeitig um -1, bez. $+1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Beispiel.

Für das in § 5 und 6 des I. Abschnittes betrachtete Beispiel der Mannigfaltigkeiten

$$\left(\sum_1^n x_i^2 + 1\right)^2 - (2+\lambda)^2 \sum_1^\nu x_i^2 \quad \begin{matrix} > 0 & R_n^a \\ = 0 & R_{n-1} \\ < 0 & R_n^i \end{matrix}$$

ergeben die für die Charakteristiken K_n^a und K_n^i auf pag. 288 abgeleiteten Tabellen sofort (für gerades und ungerades n) die Bestätigung unserer obigen Formeln (1) und (2).

Weiter folgt jetzt direct die Charakteristik K_{n-1} der begrenzenden Mannigfaltigkeit R_{n-1} für ungerades n

$$K_{n-1} = 2\,K_n^i = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

je nachdem ν gerade oder ungerade ist.

Insoferne nun unsere Mannigfaltigkeit R_{n-1} (cf. pag. 285) sich für $\lambda = 0$ auf die sphärische Mannigfaltigkeit

$$S_{\nu-1} \qquad \sum_1^\nu x_k^2 - 1 = 0,\ x_{\nu+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

zusammenzieht, haben wir hier, wenn wir etwa den Innenraum R_n^i durch den continuirlichen Process des Anwachsens von $\lambda = 0$ an erzeugt denken, ein Beispiel für die Abzählung eines durch die obigen Gleichungen gegebenen singulären Vorkommnisses:

Das Auftreten jener $S_{\nu-1}$ zählt für die Charakteristik K_n^i mit $\begin{cases}0\\2,\end{cases}$ *je nachdem ν gerade oder ungerade ist, also (vergl. § 4 des I. Abschnittes, Beispiel 1) im Sinne der Charakteristik $K_{\nu-1}$ derselben.*

In analoger Weise würden die Abzählungen anderer — über unsere in den §§ 1—3 dieses Abschnittes betrachteten singulären Punkte hinausgehenden — singulären Vorkommnisse zu treffen sein. Es ist dann stets auf die in den §§ 3 und 4 des I. Abschnittes gegebenen Regeln zurückzugreifen.

B. Zweite Abzählung mit Hülfe von singulären Stellen im Gebiete $f = 0$.

§ 5.

Umformung der Charakteristik. Die singulären Stellen auf $f = 0$.

Die von Kronecker gegebene Umformung von $\Sigma[\Delta]$, wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

führt noch zu einer zweiten Methode der Abzählung für geschlossene Mannigfaltigkeiten.

Es ist nämlich:

$$\sum [\Delta] = -\tfrac{1}{2} \sum [\Delta']$$

wo

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn die erste Summe über alle Werthsysteme, für welche

$$f < 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_n = 0,$$

die zweite über alle Werthsysteme, für welche

$$f = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_{n-1} = 0,\ f_n = 0$$

mit Ausschluss von: $f_k = 0$
ausgedehnt wird*).

Danach ist also die Abzählung der Zahl K_n^i (*bez. für gerade* n *auch der Zahl* K_{n-1}) *an die Charakteristik von Punkten auf der Mannigfaltigkeit* M_{n-1} $f = 0$ *geknüpft.*

Es soll nun auch diese neue Methode der Abzählung unserer Charakteristik auf die im I. Abschnitt gegebenen allgemeinen Formulirungen zurückgeführt werden. Wir übersehen die dabei auftretenden Beziehungen am besten, wenn wir noch die lineare Mannigfaltigkeit L_{n-1}, etwa

$$x_n = C$$

zu Hülfe nehmen, und nun folgende Anzahlbestimmungen vornehmen.

Die „endlich" vorausgesetzte Mannigfaltigkeit M_{n-1}

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

liege zwischen den linearen Mannigfaltigkeiten

$$x_n = C^o \quad \text{und} \quad x_n = C^u$$

als oberer und unterer Grenze. Die L_{n-1}

$$x_n = C, \quad \text{wo} \quad C^o > C > C^u$$

theilt unsere Mannigfaltigkeit M_{n-1} in zwei Gebiete M_{n-1}^o, bez. M_{n-1}^u und ebenso das Gebiet M_n^i $f < 0$ in zwei Gebiete M_n^o, M_n^u. Endlich wird die L_{n-1} $x_n = C$ durch $f = 0$ in zwei Gebiete getrennt von denen das Innengebiet ($f < 0$) durch L_{n-1}^i bezeichnet sei.

Wir fragen nach den charakteristischen Zahlen dieser Gebiete.

Bezeichne wie in nebenstehender Figur zur Uebersicht symbolisch angedeutet:

K_{n-1} die charakter. Zahl für das Gebiet M_{n-1} $f = 0$,
K_{n-1}^o „ „ „ „ „ „ M_{n-1}^o $f = 0$ $x_n > C$,
K_{n-1}^u „ „ „ „ „ „ M_{n-1}^u $f = 0$ $x_n < C$,

ferner:

K_n^i die charakter. Zahl für das Gebiet M_n^i $f < 0$,
K_n^o „ „ „ „ „ „ M_n^o $f < 0$ $x_n > C$,
K_n^u „ „ „ „ „ „ M_n^u $f < 0$ $x_n < C$,

*) Wir wählen in der Folge zur Vereinfachung der Schreibweise stets $f_n \gtrless 0$, wo dann

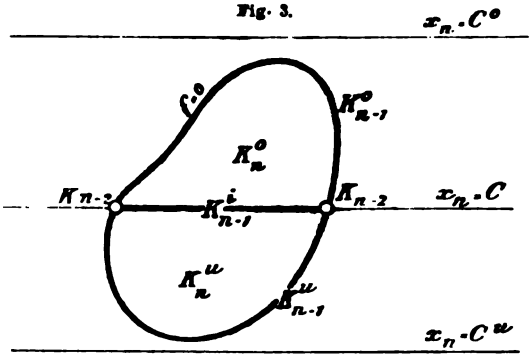
$$[\Delta] = -\left[\begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_{1\,n-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n-1\,1} & \cdots & f_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}\right]$$

wird.

endlich

K^i_{n-1} die charakter. Zahl für das Gebiet M^i_{n-1} $f < 0$ $x_n = C$,
K_{n-2} „ „ „ „ „ „ M_{n-2} $f = 0$ $x_n = C$

Fig. 3.



so hat man (vergl. pag. 295) sofort folgende für gerades und ungerades n zu unterscheidende Relationen:

I. *Für gerades n*

$$K^o_{n-1} + K^u_{n-1} - K_{n-2} = K_{n-1} = 0,$$
$$K^o_{n-1} + K^i_{n-1} - K_{n-2} = 0,$$
$$K^u_{n-1} + K^i_{n-1} - K_{n-2} = 0$$

und hieraus:

$$K_{n-2} = 2K^i_{n-1} = 2K^o_{n-1} = 2K^u_{n-1}.$$

Also: *Bildet eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension M_{n-2} die volle Begrenzung einer Mannigfaltigkeit M_{n-1}, mag diese nun eine „lineare" (M^i_{n-1}), oder in einem Raume L_n enthalten sein (wie M^o_{n-1} bez. M^u_{n-1}) so ist ihre Charakteristik stets eine gerade Zahl, die doppelte Charakteristik jener Mannigfaltigkeit M_{n-1}.*

II. *Für ungerades n* folgt:

$$K_{n-2} = 0,$$
$$K^o_{n-1} + K^u_{n-1} = 2K^i_n,$$
$$K^o_{n-1} + K^i_{n-1} = 2K^o_n,$$
$$K^u_{n-1} + K^i_{n-1} = 2K^u_n,$$

Formeln, welche wesentlich das gleiche besagen, wie die eben in I gegebenen, und speciell noch den Satz illustriren, *dass die Charakteristik einer Mannigfaltigkeit gerader Dimension $(n-1)$ durch Ausschneiden (oder Einfügen) einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ungerader (hier $n-2^{ter}$) Dimension nicht geändert wird.*

§ 6.

Punktcharaktere der verschiedenen Stellen. Summenformeln.

Analog wie in den früheren Ausführungen (vgl. z. B. Sächs. Ber. Febr. 1886, pag. 62 ff.) lassen wir nun unsere Mannigfaltigkeiten M_n, M_{n-1}, M_{n-2} in einem continuirlichen Processe entstehen, indem wir in

$$x_n = C$$

die Constante von $C = C^0$ bis $C = C^u$ sich ändern lassen und dabei jedesmal die in das Gebiet

$$x_n > C, \quad \text{bez.} \quad x_n = C$$

eintretenden Theile der $f = 0$ u. $f < 0$ in's Auge fassen.

Die Sprungstellen der zugehörigen Charakteristiken sind dann eben durch jene Werthsysteme, für welche

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \cdots f_{n-1} = 0 \quad \text{(mit Ausschluss von } f_n),$$

gegeben und nach ihrem „Punktcharakter" sofort aus unseren allgemeinen Entwicklungen abzulesen. Wir mögen, wenn diese geometrische Bezeichnung gestattet ist, diese neuen singulären Stellen als die „Berührungsstellen" der Mannigfaltigkeiten $x_n = C$ mit $f = 0$ bezeichnen.

Wir studiren die Punktcharaktere derselben für die verschiedenen Mannigfaltigkeiten wieder an einer canonischen Form:

$$\varphi \equiv (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2) - (x_{\nu+1}^2 + x_{\nu+2}^2 + \cdots + x_{n-1}^2) \pm x_n = 0 \text{ *)},$$

wo wir dann

$$x_n = C$$

setzen und der Constanten C die Werthe $+\varepsilon$, 0, $-\varepsilon$ (ε eine positive Grösse) ertheilen.

Was zunächst die Aenderung der Charakteristik des Gebietes M_n^i

$$\varphi < 0, \quad x_n - \varepsilon > 0$$

anlangt, wenn wir nach

$$\varphi < 0, \quad x_n + \varepsilon > 0$$

fortschreiten, so können wir direct an die frühere Abzählung (§ 1 dieses Abschn.) anknüpfen, indem wir das Gebiet

$$\varphi \,.\, (x_n - C) < 0$$

betrachten. Es enthält einmal das von uns zu betrachtende

$$\varphi < 0, \quad x_n - C > 0$$

und das andere

*) Wir setzen x_n mit *doppeltem* Vorzeichen, um bei der Unterscheidung der möglichen Fälle für $\varphi < 0$ einen Vorzeichenwechsel zu vermeiden.

$$\varphi > 0, \quad x_n - C < 0,$$

beide Gebiete getrennt durch:

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad x_n - C = 0.$$

Betrachten wir nun, für Γ als Parameter, die Systeme von Mannigfaltigkeiten M_{n-1}

$$\varphi \,.\, (x_n - C) - \Gamma = 0,$$

so wird die Aenderung der charakteristischen Zahl unseres Gebietes M_n^i bestimmt durch die Charakteristik der singulären Stellen dieses Systems, welche im Bereiche

$$\varphi < 0; \quad x_n - C > 0$$

neu zutreten, bez. verschwinden, wenn wir die Constante C einmal gleich $+\varepsilon$, dann gleich $-\varepsilon$ annehmen. Wir denken uns dabei analog wie früher die Umgebung der „Berührungsstelle" abgegrenzt durch eine S_{n-1}

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \varrho^2 = 0,$$

wo dann wieder die ausserhalb S_{n-1} gelegenen Gebiete der abzuzählenden Mannigfaltigkeiten im Sinne der Analysis situs übereinstimmen.

Bestimmen wir nun (nach § 3) mit Hülfe der partiellen Ableitungen von

$$\varphi \,.\, (x_n - C) - \Gamma = 0$$

die singulären Punkte dieses Systemes, so ergiebt sich, wenn wir zunächst

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \cdots - x_{n-1}^2 + x_n$$

voraussetzen, sofort als einzige in Betracht kommende singuläre Stelle der Punkt

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = -\frac{\varepsilon}{2}$$

im Gebiete

$$\varphi < 0, \quad x_n + \varepsilon > 0, \quad (C = -\varepsilon),$$

für welchen Punkt die charakteristische Determinante den Werth

$$[\Delta] = (-1)^{n-1-\nu}$$

besitzt. Für $C = +\varepsilon$ dagegen befinden sich im Gebiete

$$\varphi < 0, \quad x_n - \varepsilon > 0$$

keine singulären Stellen. [Δ] *bezeichnet also gleichzeitig die Aenderung der Charakteristik von* M_n^i, *beim Durchgang durch unsere „Berührungsstelle", wenn wir von* $C = +\varepsilon$ *nach* $C = -\varepsilon$ *fortschreiten.*

Für den analogen Uebergang unter Zugrundelegung von

$$\varphi = x_1^2 + \cdots + x_\nu^2 - (x_{\nu+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2) - x_n < 0$$

ergiebt sich *keine* Aenderung durch singuläre Stellen und *somit auch keine Aenderung der charakteristischen Zahl für die* M_n^i.

Nun ist die Darstellung der betreffenden Berührungspunkte für die beliebige Mannigfaltigkeit

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0$$

in einer der obigen kanonischen Formen

$$\varphi = x_1^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \pm x_n = 0$$

ausser an das Vorzeichen der Determinante

$$\Delta' = -\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1\,n-1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ f_{1\,n-1} \cdots f_{n-1} f_{n-1} \end{vmatrix},^*)$$

noch an das Vorzeichen von f_n geknüpft: Die Punkte, für welche $f_n < 0$ ist, liefern keinen Beitrag für die Aenderung der Charakteristik beim Durchgang durch die betr. singuläre Stelle, die anderen $f_n > 0$ aber den dem Vorzeichen von $[\Delta']$ entsprechenden.

Also wird die Charakteristik K_n^o *unserer* M_n^o

$$f < 0, \quad x_n - C > 0$$

gegeben durch

$$K_n^o = -\sum' [\Delta'],$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$f = 0, \; f_1 = 0 \ldots f_{n-1} = 0, \; f_n > 0, \; x_n - C > 0.$$

Die Charakteristik der ganzen durch das Innengebiet $f < 0$ *gegebenen* M_n^i *wird entsprechend:*

$$K_n^i = -\sum' [\Delta'],$$

die Summation verstanden über:

$$f = 0, \; f_1 = 0 \ldots f_{n-1} = 0, \; f_n > 0.$$

Nun lässt sich aber die Summation auch in umgekehrter Richtung *mit wachsenden* C vornehmen. Dabei sind dann lediglich die Punkte,

*) Wir fügen das Minuszeichen zu, um in Analogie mit den Kronecker'schen Formeln pag. 298 zu bleiben.

für welche $f_n < 0$, in Betracht zu ziehen, während die Punkte $f_n > 0$ keinen Beitrag für die Charakteristik liefern. So erhalten wir, wenn wir gleich die Charakteristik K_n^i des ganzen Innenraumes M_n^i formuliren, auch

$$K_n^i = -\sum [\Delta'],$$

die Summation ausgedehnt über

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \ldots f_{n-1} = 0, \quad f_n < 0$$

und daraus folgt schliesslich die schon oben angeführte (aus Formel (1) pag. 295) durch die Kronecker'sche Umformung erhaltene Formel:

$$K_n^i = -\frac{1}{2}\sum [\Delta'],$$

wobei die Summation sich auf alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \ldots f_{n-1} = 0, \quad f_n \gtrless 0$$

erstreckt.

§ 7.

Zusammenstellung. Relationen zwischen den singulären Punkten.

Analoge Betrachtungen an der kanonischen Form der singulären Punkte führen nun auch zu den Charakteristiken der übrigen oben (pag. 299) bezeichneten Mannigfaltigkeiten von $(n-1)$ und $(n-2)$ Dimensionen. In der nachfolgenden Tabelle sind einmal die „Punktcharaktere" der Sprungstellen dieser Charakteristiken und dann diese selbst durch die Summenformeln zusammengestellt.

Fig. 3.

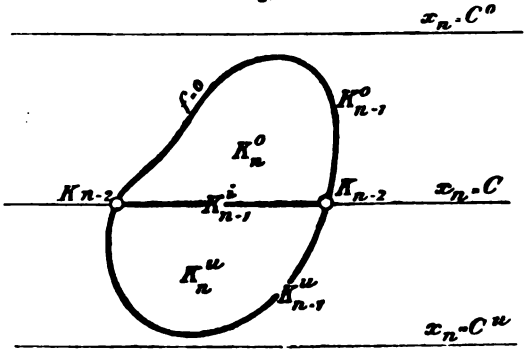


Tabelle II

die Charakteristiken unserer Mannigfaltigkeiten, bei der Abzählung auf $f = 0$.

die hlung annig- keit:	ist der *Punktcharakter* der Sprungstellen gegeben durch:		Daraus folgt die *Charakteristik:*
M_n^o	$-[\Delta']$		$K_n^o = -\sum[\Delta']$ Σ über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0,\ f_n > 0,$ $x_n - C > 0.$
M_n^i	$-[\Delta']$		$K_n^i = -\sum[\Delta'] = -\frac{1}{2}\sum'[\Delta']$ Σ über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0,\ f_n > 0.$ Σ' über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0.$
	n gerade	n ungerade	n gerade ‖ n ungerade
$^o_{n-1}$	$-[f_n \cdot \Delta']$	$-[\Delta']$	$K_{n-1}^o = -\sum[f_n \cdot \Delta']$ ‖ $K_{n-1}^o = -\sum[\Delta']$ Σ über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0,$ $x_n - C > 0.$
$_{n-1}$	$-[f_n \cdot \Delta']$	$-[\Delta']$	$K_{n-1} = -\sum[f_n.\Delta'] = 0$ ‖ $K_{n-1} = -\sum[\Delta'] = 2K_n^i$ Σ über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0.$
$^i_{n-1}$	$-[f_n \cdot \Delta']$	$-[f_n \cdot \Delta']$	$K_{n-1}^i = -\sum[f_n \cdot \Delta'] = K_{n-1}^o$ ‖ $K_{n-1}^i = -\sum[f_n \cdot \Delta']$ Σ über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0,$ $x_n - C > 0.$ Dabei ist: $\sum[f_n \cdot \Delta'] = 0,$ Σ über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0.$
$_{n-2}$	$-2\cdot[f_n \cdot \Delta']$	0	$K_{n-2} = -2\sum[f_n \cdot \Delta'] = 2K_{n-1}^i$ ‖ $K_{n-2} = 0,$ Σ über: $f = 0,\ f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0,$ $x_n - C > 0.$

Es ergeben sich dabei für die Anzahl der auf der Mannigfaltigkeit M_{n-1} $f = 0$ vorhandenen singulären Stellen zwei Relationen:

$$\text{I.} \quad -\sum [\Delta'] = 2K_n^i,$$

$$\text{II.} \quad \sum [f_n \,.\, \Delta'] = 0$$

die Summen über diese Stellen:

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \ \ldots \ f_{n-1} = 0$$

verstanden.

Die Relation I ergiebt K_n^i (bes. bei ungeradem n auch K_{n-1}) als Kronecker'sche Charakteristik des speciellen Functionensystems:

$$f = 0, \ f_1 = 0, \ \ldots \ f_{n-1} = 0, \quad f_n = 0.$$

Die Relation II ist die bekannte von Kroncecker für ein solches System aufgestellte Beziehung.

Diese letztere Relation folgt hier direct aus der oben gegebenen Bedeutung der

$$-\sum [f_n \,.\, \Delta'] = K_{n-1}^i,$$

falls die Summation nur über die Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \ \ldots \ f_{n-1} = 0, \quad x_n - C > 0$$

erstreckt wird: als der Charakteristik der Mannigfaltigkeit

$$M_{n-1}^i: \qquad f = 0, \quad x_n = C.$$

Diese *entsteht* nämlich und *verschwindet*, wie oben erwähnt, innerhalb des Intervalls von $x_n = C^0$ bis $x_n = C^u$, in welchem das Gebiet $f = 0$ sich erstreckt.

§ 8.

Schlussbemerkungen.

Durch die Zurückführung unserer Abzählungen auf die *Kronecker'sche Darstellung* ist deren invariante Bedeutung (bei Abänderung der zu Grunde gelegten Entstehungsprocesse, sowie bei Umformungen der Mannigfaltigkeiten im Sinne der Analysis situs) erwiesen. Für die Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen war es nun möglich, speciell auch auf geometrischem Wege die invariante Bedeutung dieser charakteristischen Zahlen (ganz unabhängig von der Kronecker'schen Formulirung) zu erweisen. Es war nämlich, wie schon in der Einleitung erwähnt, möglich, für alle Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen *Normalformen* herzustellen, an welchen direct die charakteristischen Zahlen abgelesen werden konnten.

Die gleiche Darstellung für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension würde auch hier die Aufstellung von Normalformen verlangen, als Repräsentanten aller möglichen Mannigfaltigkeiten. Eine solche scheint

aber zunächst noch nicht zu bewältigende Schwierigkeiten zu bieten. In der That ist die Frage nach solchen Normalformen eine viel umfassendere. Sie erfordert die Berücksichtigung *aller* Charakteristiken, welche eine M_n bis auf eindeutige Umformungen (im Sinne der Analysis situs) charakterisiren und dazu ist durch die vorliegenden Untersuchungen nur erst ein erster Schritt gemacht. So erscheint es naturgemäss, die invariante Bedeutung unserer Zahlen durch ihre Zurückführung auf Kronecker'sche Charakteristiken — welchen als solchen diese invariante Bedeutung zukommt — zu bezeichnen.

Es wird in gleicher Weise die Aufgabe weiterer Untersuchungen auf diesem Gebiete sein, auch andere charakteristische Zahlen einer M_n — ich erwähne die von Riemann (Fragmente aus der Analysis situs; Werke, Seite 448 ff.) und Betti (Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di Matematica, Serie II, Bd. 4) aufgestellten — mit Hülfe Kronecker'scher Charakteristiken analytisch darzustellen.

Die gegenwärtigen Untersuchungen bedürfen aber noch in einer anderen Richtung der Weiterführung. Wir haben uns hier in der analytischen Darstellung im Wesentlichen auf die durch eine Gleichung bez. eine Ungleichung im Gebiete von n unabhängigen Veränderlichen definirten Mannigfaltigkeiten M_{n-1} bez. M_n beschränkt. In allgemeinster Form ist *ein beliebiges System von Gleichungen und Ungleichungen* für die Definition einer Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen. Von den dadurch nothwendigen Erweiterungen unserer analytischen Formulirungen, auf die ich bei späterer Gelegenheit einzugehen denke, sei hier kurz nur auf die eine aufmerksam gemacht, welche wieder die Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten mit nicht umkehrbarer und mit umkehrbarer Indicatrix betrifft: Wenn wir im Gebiete von n Veränderlichen eine Mannigfaltigkeit M_{n-1} durch eine Gleichung $f = 0$ definiren, und (wie dies in den vorstehenden Untersuchungen geschehen ist) die $f = 0$ als „endlich" voraussetzen, weiter singuläre Vorkommnisse auf $f = 0$ ausschliessen, so ist die so definirte Mannigfaltigkeit stets eine solche *mit nicht umkehrbarer Indicatrix**). Dies gilt nicht mehr, wenn wir jene allgemeineren Mannigfaltigkeiten in Betracht ziehen; hier ist (ebenso wie schon in unseren früheren Untersuchungen) die Frage nach der Classe der betr. Mannigfaltigkeit zu entscheiden. In dem in § 4 des I. Abschn. gegebenen Beispiel und bei den im folgenden Abschnitt zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten zweiten Grades treten Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indicatrix ohne singuläre Stellen noch in einer andern Form auf. *Indem wir nämlich die Mannigfaltigkeit der n Variablen $x_1 \ldots x_n$ im projectiven Sinne auffassen, erscheinen*

*) Vergl. Annalen 32, pag. 489.

durch's Unendliche gehende Mannigfaltigkeiten M_{n-1}, für welche die durch das Unendliche mit einander vereinigten Gebiete auch noch auf einem endlichen Wege zusammenhängen, als Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer bez. mit nicht umkehrbarer Indicatrix, je nachdem n ungerade oder gerade ist, ein Satz, der sich in analoger Weise wie der in § 4 pag. 283 für die projectiven Mannigfaltigkeiten P_n gegebene entwickeln lässt.

III. Abschnitt.

Analysis situs der Mannigfaltigkeiten zweiten Grades.

§ 1.

Kanonische Formen für die Mannigfaltigkeiten zweiten Grades. Unterscheidung derjenigen mit nicht umkehrbarer und derer mit umkehrbarer Indicatrix.

In den Entwickelungen des § 2 (pag. 293 ff.) haben wir die $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M^2_{n-1}:

$$(1)\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \cdots - x_n^2 - 1 = 0,$$

zunächst durch eine Centralprojection auf das „sphärische" Gebiet:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \cdots - x_n^2 > 0, \end{cases}$$

umkehrbar eindeutig abgebildet und dieses sphärische Abbild wieder durch die Transformation durch reciproke Radien:

$$(3)\quad x_1 = \frac{4\xi_1}{\sum_1^n \xi_i^2},\quad x_2 = \frac{4\xi_2}{\sum_1^n \xi_i^2},\quad \cdots\ x_n + 1 = \frac{4\xi_n}{\sum_1^n \xi_i^2}$$

in die „lineare" Mannigfaltigkeit R^i_{n-1}

$$(4)\quad \begin{cases} \xi_n = 2, \\ \left(4 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 - 32(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_\nu^2) < 0. \end{cases}$$

Dabei sind, wenn wir die Mannigfaltigkeit der $x_1, x_2, \ldots x_n$ im „projectiven" Sinne als P_n auffassen, die unendlich fernen Punkte der Mannigfaltigkeit (1) abgebildet auf das Begrenzungsgebiet der Mannigfaltigkeit (4), die R_{n-2}:

$$(5)\quad \left(4 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 - 32(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_\nu^2) = 0,$$

so zwar, dass je den beiden diametral entgegengesetzten unendlich weiten Punkten, deren Lage durch

$$(6) \qquad \begin{matrix} \cdot & x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_n \\ \text{und} & & & & & \\ & -x_1, & -x_2, & -x_3, & \cdots & -x_n \end{matrix}$$

auf der Kugel (2) fixirt ist und welche dem „asymptotischen" Gebilde

$$(7) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0$$

genügen, in (5) zwei Punkte

$$(8) \qquad \begin{gathered} \xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \ldots \ \xi_{n-1}, \quad (\xi_n = 2), \\ \xi_1' = \frac{-4\xi_1}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2}, \quad \xi_2' = \frac{-4\xi_2}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2}, \ \cdots \ \xi_{n-1}' = \frac{-4\xi_{n-1}}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2}, \quad (\xi_n' = 2) \end{gathered}$$

entsprechen.

Fassen wir nun die M_{n-1}^2 als geschlossenes Gebilde auf, indem wir je diese in diametraler Richtung unendlich weiten Punkte einander zuordnen, so entspricht dem in unserer transformirten Mannigfaltigkeit (4) eben die Zuordnung der Punkte ξ_i und ξ_i'. Diese Zuordnung stellt sich, wie die Formeln (8) sofort erkennen lassen, auf die einfachste Weise dar, indem die ξ_i' aus den ξ_i hervorgehen durch eine Transformation durch reciproke Radien an der sphärischen Mannigfaltigkeit

$$(9) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 - 4 = 0$$

in Verbindung mit einer Verwandelung je des transformirten Punktes in seinen diametralen Gegenpunkt.

Greifen wir nun noch auf die in § 5 Abschn. I gegebene Beschreibung der Mannigfaltigkeiten zurück, so lassen sich die verschiedenen im Sinne der Analysis situs zu unterscheidenden Formen der Mannigfaltigkeiten zweiten Grades M_{n-1}^2 sehr übersichtlich charakterisiren:

Man denke sich die sämmtlichen „sphärischen" Mannigfaltigkeiten $S_0, S_1, S_2 \ldots S_{\nu-1} \ldots$ *der verschiedenen Dimensionen*

$$(10) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_\nu^2 = r^2$$

als „Kernformen" dadurch zu Mannigfaltigkeiten von $(n-1)$ *Dimensionen umgestaltet, dass man die Punkte derselben — wenn dieser Ausdruck gestattet ist — „mit* $n-1$ *dimensionaler Masse belegt" denkt, präciser gesprochen, dass man eine Elementarmannigfaltigkeit von* $(n-1)$ *Dimensionen*

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \cdots + \xi_{n-1}'^2 - \varrho^2 < 0 \qquad (\varrho < r)$$

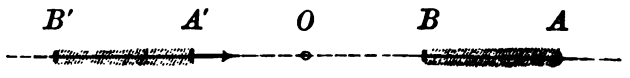
mit ihrem Mittelpunkt je die sphärischen Mannigfaltigkeiten $S_0, S_1 \ldots S_{n-1}$

*durchlaufen lässt**), *dann entstehen die Gebilde* R^i_{n-1} *von* $(n-1)$ *Dimensionen, die punktweise eindeutig auf die* M^2_{n-1}

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \cdots - x_n^2 - 1 = 0$$

bezogen werden können. Die Begrenzung derselben entspricht den unendlich weiten Elementen der M^2_{n-1}, *deren paarweise Zuordnung sich auf's einfachste ergiebt, insoferne jeder Radius vector* $\xi_i = \lambda \bar{\xi}_i$ *durch den Coordinatenanfang (soferne überhaupt) in 4 Punkten die Begrenzung schneidet. Lage und Zuordnung dieser Punkte erläutert die untenstehende Figur, in welcher die schraffirten Theile das „Innengebiet" bezeichnen.*

Fig. 4.



Wir erhalten dabei, wenn wir ν die Werthe $1, \ldots n$ ertheilen (von der imaginären Mannigfaltigkeit für $\nu = 0$ sehen wir natürlich ab) die verschiedenen Fälle in je *zwei Formen*, den Werthen

$$\nu = 1, \quad \nu = n;$$

$$\nu = 2, \quad \nu = n - 1 \text{ u. s. w.}$$

entsprechend.

Die in Figur (4) angedeutete Zuordnung der Punkte der Begrenzung durch die Radienvectoren von O aus lässt weiter erkennen, *dass von Mannigfaltigkeiten* M^2_{n-1} *diejenigen ungerader Dimension mit Ausschluss der einen für* $\nu = 1$ $(\nu = n)$

$$x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 - 1 = 0$$

*Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indicatrix sind***).

Fixiren wir nämlich (analog wie bei Betrachtung der Mannigfaltigkeiten P_n) in dem Punkte A der Begrenzung in der dort tangirenden linearen Mannigfaltigkeit L_{n-2} ein rechtwinkliches Axensystem, so werden die $n-2$ Axenrichtungen desselben im entsprechenden Punkte A' in die entgegengesetzten verwandelt; aber auch der $n-1^{\text{ten}}$, auf dieser orthogonalen Richtung des Radius vector, von A aus etwa in den Innenraum gezogen (vergl. Fig. 4), entspricht in A' die entgegengesetzte, so dass $n-1$ Richtungen bei diesem Uebergang sich umkehren. Nun gelangen wir aber von A nach A' auf einem ganz innerhalb unseres Gebietes (4) verlaufenden Wege. Wir gehen nämlich z. B.

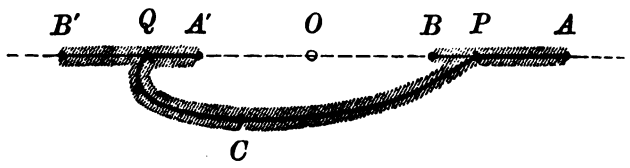
---

*) Vergl. pag. 278.

**) Mit Zuziehung des auf pag. 307, 308 ausgesprochenen allgemeinen Satzes kann diese Eigenschaft selbstverständlich auch direct an den Formen (1) unserer Mannigfaltigkeiten abgelesen werden.

(vergl. Fig. 5) von A auf dem Radius vector $\overline{AO}$ fort bis zum Schnitt P mit der innerhalb (4) gelegenen Grenzmannigfaltigkeit $S_{\nu-1}$ (10),

Fig. 5.



auf dieser zum Punkte Q derselben und von da nach A'. Dieser Weg ist durch die Zuordnung von A und A' ein geschlossener. Die „Indicatrix" unserer Mannigfaltigkeit wird daher auf demselben, wenn wir ihn etwa von einem Punkte C an durchlaufen und dabei die oben charakterisirte Umkehrung der entsprechenden Richtungen im Punkte A, A' berücksichtigen, umgekehrt, bez. nicht umgekehrt, je nachdem $n-1$ ungerade bez. gerade ist.

Nur der Fall $\nu = 1$ (bez. der gleichwerthige $\nu = n$) bildet eine Ausnahme. Für $\nu = 1$ besteht nämlich die sphärische Mannigfaltigkeit $S_{\nu-1} = S_0$ gerade 'nur aus den beiden Punkten P und P', die von zwei, die R^i_{n-1} bildenden Elementarmannigfaltigkeiten E_{n-1} umgeben sind. Die Zuordnung der Begrenzungsmannigfaltigkeit ist zwar den allgemeinen Entwickelungen entsprechend, aber je die diametral zugeordneten Punkte hängen nicht mehr durch einen Weg PCQ zusammen. Für $\nu = n$ ist die Begrenzungsmannigfaltigkeit imaginär geworden*) und die ganze lineare Mannigfaltigkeit L_{n-1} der $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ das Bild der für $\nu = n$ kommenden sphärischen Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1,$$

ein Typus, der selbstverständlich zweckmässig an die Stelle des für $\nu = 1$ aus dem Punktepaar entstehenden zu setzen ist.

§ 2.

Beispiel: Die zwei- und drei-dimensionalen M^2.

Wir umfassen alle verschiedenen Fälle der M^2, wenn wir (in Gl. (1) des vorigen Paragraphen) ν die Werthe 1 bis $\frac{n}{2}$ (bez. $\frac{n+1}{2}$) ertheilen.

*) Die Formel (5) (und analog (4)), bei deren Ableitung ausdrücklich der Summenindex $\nu \leqq n-1$ vorausgesetzt ist, muss in diesem Fall ersetzt werden durch

$$\left(\sum_1^{n-1} \xi_i^2 + 4\right)^2 = 0.$$

So hat man *bei zwei Dimensionen* (für $n = 3$) zunächst als „Kernformen" (Gl. (10) des vorigen Paragraphen):

1) die S_0, ein Punktepaar $\xi_1^2 = r^2$,
2) die S_1, eine Kreislinie $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$.

Sie geben, wenn wir eine Kreisscheibe

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 = \varrho$$

mit ihrem Mittelpunkt die S_0 bez. S_1 durchlaufen lassen, für unsere R_2^i

1) Ein Kreispaar,
2) Eine ebene Ringfläche,

deren punktweise Zuordnung der Ränder sofort die Flächen herstellt, auf welche sich einmal das *Ellipsoid*, dann das *einschalige Hyperboloid* punktweise eindeutig beziehen lässt.

Bei drei Dimensionen (für $n = 4$) benütze man als „Kernformen" ebenfalls 1. das obengenannte Punktepaar S_0, 2^a. die Kreislinie S_1, um sie dadurch, dass wir sie „dreidimensional" auffassen, umzugestalten in:

1) Ein Paar von Kugeln,
2^a) Einen dreidimensionalen Kreisring.

Sie repräsentiren, wenn wir wieder die Begrenzungspunkte paarweise einander zuordnen, die typischen Formen für die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Wir betrachten hier noch kurz als Kernfläche

2^b) Die S_2, die Kugelfläche $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r^2$,

welche wir an Stelle der S_1 zu Grunde legen können. Indem wir dieselbe dreidimensional auffassen, entsteht ein von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzter Raum. Die Uebereinstimmung des hier entstehenden geschlossenen Gebildes mit dem oben betrachteten Kreisring 2^b (Fig. 6^b) (die Zuordnung der Begrenzung der beiden Gebilde ist in den nebenstehenden Figuren 6^a, 6^b angedeutet) ist leicht zu erweisen: Man durchschneide den Raum 2^b (Fig. 6^b) durch eine Ebene durch den Mittelpunkt. Die (in Fig. 6^b schraffirte) ebene ringförmige Schnittfigur kann dann im Sinne der Analysis situs der ringförmigen Begrenzung des Raumes 2^a (Fig. 6^a) entsprechend gesetzt werden. Durchschneidet man ebenso den ringförmigen Raum 2^a durch eine Ebene durch die Axe des Ringes, so erhält man zwei Kreise (in Fig. 6^a schraffirt), welche den begrenzenden Kugeln des Raumes 2^b (Fig. 6^b) äquivalent sind. Wir erhalten diese Kugelflächen selbst als neue Begrenzungsflächen, wenn wir nun die beiden Ringhälften I und II in Fig. 6^a, (welche den entsprechend bezeichneten Gebieten in 6^b äquivalent sind), mit dem

ringförmigen Theil ihrer Oberfläche aneinander schliessen. Es ist aber dabei zu beachten, dass (sowohl in Fig. 6[a], wie in 6[b]) den die Indicatrix betreffenden Ausführungen des vorigen Paragraphen zufolge die Zuordnung der Oberflächen (nämlich sowohl der Ringhälften,

Fig. 6a.

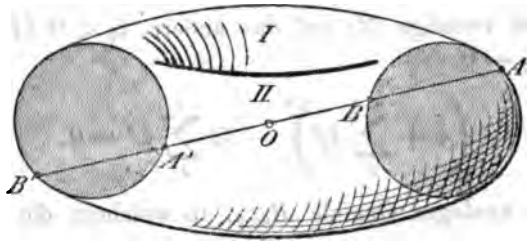
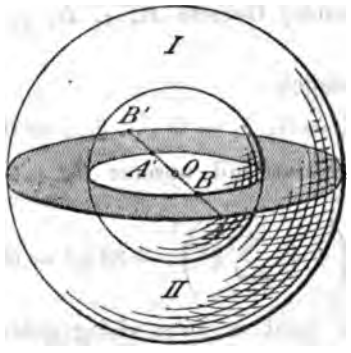


Fig. 6b.



wie der Kugelhälften) eine *inverse* ist, dass also zunächst die eine Theilfigur in ihre symmetrische zu verwandeln ist, ehe (in unserem dreidimensionalen Raum) die Vereinigung der Begrenzungen und damit die gemeinte Umformung thatsächlich ausgeführt werden kann.

§ 3.

Abzählung der Charakteristik.

Um die *Charakteristik der* M^2_{n-1} abzuzählen, müssen wir die Zuordnung der Punkte der Begrenzungsfläche R_{n-2}:

$$(1) \qquad \left(4 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 - 32 \sum_1^{\nu} \xi_i^2 = 0$$

durch:

$$\xi_i' \sim \frac{-4\xi_i}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2} \tag{2}$$

noch etwas näher betrachten.

Das Gebiet von R_{n-2} für welches $\xi_1 > 0$ ist, es sei durch R_{n-2}^+ bezeichnet, ist vermöge (2) auf das andere $\xi_1 < 0$ (R_{n-2}^-) bezogen. Das Gebiet $\xi_1 = 0$:

$$\left(4 + \sum_2^{n-1} \xi_i^2\right)^2 - 32 \sum_2^{\nu} \xi_i^2 = 0, \tag{3}$$

ein der R_{n-2} analoges Gebilde R_{n-3}, in welchem die Gebiete R_{n-2}^+ und R_{n-2}^- zusammenhängen, ist auf sich selbst bezogen, so zwar, dass wir in ihm wieder durch $\xi_2 > 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_2 = 0$ drei (mit einander zusammenhängende) Gebiete R_{n-3}^+, R_{n-3}^-, R_{n-4} unterscheiden können u. s. f.

Setzen wir schliesslich

$$\xi_1 = 0, \ \xi_2 = 0 \ \ldots \ \xi_{\nu-1} = 0,$$

so erhalten wir als Schnitt mit unserer R_{n-2} noch eben ein reelles Gebilde

$$\left(4 + \sum_{\nu}^{n-1} \xi^2\right)^2 - 32\,\xi_\nu^2 = 0. \tag{4}$$

Dasselbe *zerfällt* aber jetzt in zwei völlig getrennte Stücke $\xi_\nu > 0$ und $\xi^\nu < 0$, da der Schnitt desselben mit $\xi_\nu = 0$ imaginär ist.

So können wir also, von der den Innenraum von (1) bildenden R_{n-1}^i ausgehend, die paarweise Aneinanderschliessung je der begrenzenden Gebiete

$$R_{n-2}^+, \ R_{n-2}^-; \ \ R_{n-3}^+, \ R_{n-3}^- \ \ldots \ R_{n-(\nu+1)}^+, \ R_{n-(\nu+1)}^-$$

in folgende symbolische Formel für unsere so entstehende *geschlossene*, der M_{n-1}^2 äquivalente Mannigfaltigkeit R_{n-1}^g zusammenfassen:

$$R_{n-1}^g = R_{n-1}^i + R_{n-2}^+ + R_{n-3}^+ + \cdots + R_{n-(\nu+1)}^+. \tag{5}$$

Die Einschaltung der Mannigfaltigkeiten R_{n-2}^+, $R_{n-3}^+ \ldots$ u. s. w. ist in dem Sinne unserer allgemeinen Entwickelungen in § 3 des ersten Abschnittes zu verstehen. Wir können somit dieser Formel sofort eine entsprechende für die gesuchte *Charakteristik* der R_{n-1}^g — welche auch die der M_{n-1}^2 ist — an die Seite stellen:

$$K_{n-1}^2 = K_{n-1}^i - K_{n-2}^+ + K_{n-3}^+ - \cdots \pm K_{n-(\nu+1)}^+, \tag{6}$$

wobei die K je die Charakteristiken der entsprechenden R bezeichnen und die alternirenden Zeichen sich aus der in pag. 282 gegebenen allgemeinen Regel ergeben.

Die Abzählung der K^+_{n-x} lässt sich aber sehr leicht bewerkstelligen, wenn wir wieder auf unsere geschlossenen Gebiete $R_{n-1}, R_{n-2}, \ldots R_{n-x}$ zurückgreifen. Wir haben hier

$$R_{n-2} = R^+_{n-2} + R^-_{n-2} + R_{n-3},$$
$$R_{n-3} = R^+_{n-3} + R^-_{n-3} + R_{n-4}$$

u. s. w. bis endlich kommt:

$$R_{n-(\nu+1)} = R^+_{n-(\nu+1)} + R^-_{n-(\nu+1)}.$$

Diese Formeln setzen sich sofort um in die entsprechenden Charakteristikenformeln, bei welchen nur zu beachten ist, dass die Charakteristiken je der R^+ und R^- gleich sind. Also kommt:

$$K_{n-2} = 2K^+_{n-2} - K_{n-3},$$
$$K_{n-3} = 2K^+_{n-3} - K_{n-4}$$

u. s. f.; die letzte Formel lautet:

$$K_{n-(\nu+1)} = 2K^+_{n-(\nu+1)}.$$

a) Ist nun $n-1$ *gerade*, so sind alle Charakteristiken der ungeraden geschlossenen Mannigfaltigkeiten (R_{n-2}, R_{n-4} ...) gleich Null (pag. 295) und es folgt:

$$K^+_{n-2} = K^+_{n-3},$$
$$K^+_{n-4} = K^+_{n-5}$$

u. s. f. Wenn nun ν *gerade*, so heben sich in der obigen symbolischen Gleichung (6) alle Glieder vom zweiten ab paarweise auf *und es folgt einfach:*

(6a) $$K^2_{n-1} = K^i_{n-1}.$$

Dieselbe Formel gilt aber auch für ν ungerade, denn hier bleibt zunächst als letztes Glied in (6) $K^+_{n-(\nu+1)}$. Dabei ist aber

$$K_{n-(\nu+1)} = 2K^+_{n-(\nu+1)} = 0,$$

wieder als Charakteristik einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ungerader Dimension. Die Charakteristiken K^i_{n-1} — der Gebiete R^i_{n-1} — sind uns nun nach den Abzählungen des § 6 Abschn. I wohlbekannt und so folgt schliesslich:

Die Charakteristik K^2_{n-1} der projectiven Mannigfaltigkeiten zweiten Grades M^2_{n-1} ($n-1$ gerade)

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \cdots - x_n^2 - 1 = 0$$

ist gleich 0, beziehungsweise gleich 2, je nachdem ν gerade oder ungerade ist.

b) Ist dagegen $n-1$ *ungerade*, so hat man

$$K^+_{n-3} = K^+_{n-4},$$
$$K^+_{n-5} = K^+_{n-6}$$

u. s. w., und die Gleichung (6) lässt sich (in analoger Weise wie vorhin) sowohl *für ν gerade* als auch *für ν ungerade* reduciren auf

$$K^2_{n-1} = K^i_{n-1} - K^+_{n-2}. \tag{6b}$$

Hier ist nun nach den früheren Abzählungen (§ 6, Abschn. I)

$$K^i_{n-1} = K^+_{n-2} = 2 \quad \text{für } \nu \text{ gerade},$$
$$K^i_{n-1} = K^+_{n-2} = 0 \quad \text{für } \nu \text{ ungerade}.$$

Somit ergiebt sich in beiden Fällen die Charakteristik K^2_{n-1} unserer M^2_{n-1} ($n-1$ ungerade) als gleich Null.

Es steht dieser Satz in Uebereinstimmung mit dem auf pag. 295 (unten) abgeleiteten, welcher dort nur für *endliche* geschlossene Mannigfaltigkeiten M_{n-1}, ungerader Dimension ausgesprochen ist, die durch eine Gleichung $f = 0$ im Gebiete L_n der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ definirt werden.

München, im Mai 1890.

Ueber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gleichen Charakteristiken.

Von

Josef Kürschák in Budapest.

1. Herr Julius Vályi hat in seiner Inauguraldissertation*) bewiesen, dass die Differentialgleichung des Problems:

$$\delta \iint V(p, q)\, dx\, dy = 0$$

unter der Voraussetzung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\right)^2 = 0$$

erste Integrale im engeren Sinne besitzt und daher nach der Methode von Monge lösbar ist. Dies Resultat soll hier ausgedehnt werden auf die Differentialgleichung des Problems:

$$\delta \iint V(x\ y\ z\ p\ q)\, dx\, dy = 0.$$

Es handelt sich also um die Integration der Gleichung:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 V}{\partial p^2} r + 2\,\dfrac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\, s + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^2}\, t \\ + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial p} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial q} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial p}\, p + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial q}\, q - \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array}\right.$$

in dem Falle, wo die beiden Wurzeln ihrer *charakteristischen Gleichung:*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\,\mu^2 + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\,\mu + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$$

einander gleich sind.

Es kann dann höchstens einer der beiden Differentialquotienten $\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}$ verschwinden, sonst würde wegen

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\right)^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}$$

*) Klausenburg 1880 (Ungarisch).

überhaupt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$$

und daher die Gleichung (1) gar keine Differentialgleichung mehr sein. Die Bezeichnung kann immer so gewählt werden, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}$ von 0 verschieden ist.

2. Erstes Integral — im engeren Sinne — ist eine Differentialgleichung

$$u(x, y, z, p, q) = \text{const.},$$

von der jede Lösung auch die gegebene Differentialgleichung 2. 0. befriedigt.

. Die ersten Integrale von (1) sind die gemeinsamen Lösungen folgenden Systems von partiellen Differentialgleichungen:

$$S \quad \begin{cases} \mu u_p + u_q = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}(u_x + p u_z) + \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}(u_y + q u_z) - U u_p = 0 \end{cases}$$

(mit der Beschränkung, dass in u die Variable p wirklich enthalten sei.)

Es ist hier μ die einzige Wurzel der charakteristischen Gleichung, und zugleich der folgenden zweien:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\mu + \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}\mu + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0,$$

weiter ist:

$$U = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial q} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial p} p + \frac{\partial V}{\partial q} q - V\right),$$

endlich sind u_x, u_y etc. Differentialquotienten von u nach dem Index genommen.

Die Integration von S wird nicht einfacher, aber doch übersichtlicher durch die Kenntniss der allgemeinen Lösung der ersten Gleichung. Es sind x, y und z drei unabhängige Lösungen, und eine vierte von p unabhängige Lösung ist z. B.

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial p} y - \frac{\partial V}{\partial q} x$$

oder, wenn

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} y - \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} x = 0,$$

dann

$$\omega = px + qy - z.$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung von S ist eine beliebige Function von x, y, z und ω.

Nun sollen statt x, y, z, p und q die Variablen x, y, z, ω und q eingeführt werden.

Die Grössen

$$\frac{\partial V}{\partial p}, \quad \frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\partial V}{\partial p}p + \frac{\partial V}{\partial q}q - V$$

genügen sämmtlich der ersten Gleichung von S, enthalten also nach der Transformation q nicht mehr. Daher wird:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \varphi(x,y,z,\omega); \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \psi(x,y,z,w); \quad \frac{\partial V}{\partial p}p + \frac{\partial V}{\partial q}q - V = \chi(x,y,z,\omega);$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial p}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} = \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial p}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}p + \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}q = \frac{\partial \chi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial p},$$

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Werden die Differentialquotienten von u nach den neuen Variablen durch horizontale Striche markirt, so ist:

$$u_x = \bar{u}_x + \bar{u}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad u_y = \bar{u}_y + \bar{u}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad u_z = \bar{u}_z + \bar{u}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial z},$$

$$u_p = \bar{u}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad u_q = \bar{u}_q + \bar{u}_\omega \frac{\partial \omega}{\partial q}.$$

Und das System S lautet dann:

$$\begin{cases} \bar{u}_q = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial p}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\bar{u}_x + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\bar{u}_y + \frac{\partial \chi}{\partial \omega}\bar{u}_z - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\bar{u}_\omega\right] = 0. \end{cases}$$

Nunmehr aber ist evident, dass *S drei unabhängige Lösungen hat, nämlich die der Gleichung:*

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}u_x + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}u_y + \frac{\partial \chi}{\partial \omega}u_z - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)u_\omega = 0.$$

(Die Unterscheidung durch Linien scheint hier überflüssig.)

Dies genügt bekanntlich, um die allgemeine Lösung von (1) durch die Methode von Monge gewinnen zu können.

3. *Aus zwei ersten Integralen ergiebt sich das dritte durch Quadratur.*

Die Gleichung (2) besitzt nämlich den Jacobi'schen Multiplicator: 1.

Aus drei ersten Integralen ergiebt sich die allgemeine Lösung ohne Integration.

Denn sind u, u_1, u_2 drei unabhängige Lösungen des S Systems, so bilden bekanntlich die beiden Gleichungen mit je einer willkürlichen Function

$$(3) \qquad u_1 = f_1(u), \qquad u_2 = f_2(u)$$

ein Jacobi'sches System. Sie enthalten aber p und q nur in der einen Verbindung ω; die Elimination von ω würde daher die allgemeine Lösung z der Gleichung (1) liefern, oder die beiden Gleichungen (3)

stellen zusammen selbst schon die endliche allgemeine Integralgleichung von (1) dar.*)

Wir sehen demnach:

Wenn die partielle Differentialgleichung (1), *welche das Problem*

$$\delta \iint V(x\, y\, z\, p\, q)\, dx\, dy = 0$$

löst, eine charakteristische Gleichung mit gleichen Wurzeln hat, so ist sie nach der Methode von Monge lösbar, und zwar nach Ermittelung zweier ersten Integrale vermöge einer einzigen Quadratur.

4. Es hat weitere Vereinfachungen zur Folge, wenn in V irgendwelche Variable fehlen, nur hat man dann auch ω entsprechend zu wählen. Man kann dies stets erreichen, indem man in ω die Variablen x, y und z nach Bedürfniss durch Constanten ersetzt.

Kommt in V (und ω) z. B. z nicht vor, dann hat die Gleichung (2) zwei von z unabhängige Lösungen, nämlich die von

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} u_x + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} u_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) u_\omega = 0.$$

Auch von dieser Gleichung kennt man den Multiplicator: 1. Also ergiebt sich aus einer Lösung die andere durch Quadratur.

Ist V ausserdem z. B. auch noch von y unabhängig, dann kann man die erste Lösung unmittelbar angeben, sie ist: φ, oder wenn dies x nicht enthält, dann ω.

Enthält endlich V nur p und q, so braucht man überhaupt keine Integration. Ein erstes Integral ist ω. Zwei andere sind von der Form

$$Ax + By + Cz,$$

wo die Coefficienten der einzigen Bedingung unterworfen sind:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} A + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} B + \frac{\partial \chi}{\partial \omega} C = 0. \quad -$$

*) Vgl. G. Boole, Treatise on differential equations, supplementary volume, London 1865, p. 141.

Ueber eine Verallgemeinerung der Kreistheilung.

Von

L. Stickelberger in Freiburg i. Br.

Unter den merkwürdigen Beziehungen zwischen Algebra und Zahlentheorie, welche Gauss in der siebenten Section der *Disquisitiones arithmeticae* aufgedeckt hat, findet sich schon eine solche zwischen einer Aufgabe der Kreistheilung und der Darstellung einer Zahl durch eine quadratische Form. In Artikel 358 ist für jede Primzahl $p = 3n + 1$ die Vertheilung der $p$ten Einheitswurzeln in drei Perioden, d. h. die algebraische Bestimmung dieser Perioden, abhängig gemacht von der Darstellung der Zahl $4p$ durch die Form $t^2 + 27u^2$. In der ersten Abhandlung über die biquadratischen Reste hat Gauss einen ähnlichen Zusammenhang zwischen der Darstellung einer Primzahl $p = 4n + 1$ durch die Form $x^2 + y^2$ und der Vertheilung der $p$ten Einheitswurzeln in vier Perioden nachgewiesen, und zugleich die Reste der ungeraden unter den darstellenden Zahlen nach den Moduln 4 und p bestimmt.

Bevor noch die genannte Gauss'sche Abhandlung selbst erschienen war, hat Jacobi auf Grund der Gauss'schen Anzeige vom Jahre 1825, in welcher auf die Kreistheilung ausdrücklich hingewiesen war, dessen Idee erfasst, wie aus der 1827 erschienenen Note: „*De residuis cubicis commentatio numerosa*" hervorgeht. Dieser folgte 1832 die: „*Observatio arithmetica de numero classium divisorum quadraticorum formae* $y^2 + Az^2$", in welcher auf die aus der Kreistheilung gewonnene Darstellung gewisser Primzahlpotenzen durch die genannte Form eine Vermuthung gegründet wird, die sich später so glänzend bestätigen sollte, und 1837 die Note: „*Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie*".

Inzwischen hatte auch Cauchy sich mit Anwendungen der Kreistheilung auf die Zahlentheorie beschäftigt, namentlich in dem 1830 der Académie des sciences vorgelegten, aber erst 1840 veröffentlichten: „*Mémoire sur la théorie des nombres*"; besonders ist hervorzuheben, dass Cauchy auch beliebig zusammengesetzte Determinanten behandelt.

Während es sich bis dahin immer nur um die Darstellung von Potenzen der Primzahlen $p = mx + 1$ durch die Hauptform der Determinante $-m$ handelte, trat 1848 Eisenstein mit einer Abhandlung hervor: „*Zur Theorie der quadratischen Zerfällungen der Primzahlen* $8n + 3$, $7n + 2$, $7n + 4$", in der mittels, allgemeinerer Principien, welche einige Aehnlichkeit mit denen der Kreistheilung haben," ein von Herrn Stern durch Induction gefundener Satz über die Primzahlen $8n + 3$ bewiesen wird und analoge Sätze über die beiden andern im Titel genannten Arten von Primzahlen gewonnen werden. Im Jahre 1852 gab sodann Herr Kummer in einer Abhandlung: „*Ueber die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen*" eine Verallgemeinerung der Kreistheilung, welche sich auf die von Jacobi durch $\psi(\alpha)$ bezeichneten Zahlen bezieht.

Der vorliegenden Abhandlung, welche durch die für 1885 und 1888 ausgeschriebene Preisfrage der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranlasst ist, liegt eine Verallgemeinerung der Kreistheilungs*resolvente* zu Grunde, nämlich eine aus $m$ten und $p$ten Einheitswurzeln gebildete Zahl, welche ganz ähnliche Eigenschaften besitzt wie die gewöhnliche Resolvente; dabei bedeutet p eine Primzahl und m eine beliebig zusammengesetzte, aber durch p nicht theilbare Zahl. Zu diesen Resolventen stehen die Kummer'schen Zahlen Ψ in ähnlicher Beziehung, wie die Jacobi'schen ψ zu den gewöhnlichen Resolventen. Ferner zerlegen sich unsere Resolventen stets in zwei Factoren, deren einer entweder eine gewöhnliche Resolvente oder gleich $-p$ ist, während der andere nur von den $m$ten Einheitswurzeln abhängt und in gleicher Weise gebaut ist wie die besonderen von Eisenstein untersuchten Summen, weshalb wir denselben als Eisenstein'sche Summe bezeichnen.

Die Analogie der gewöhnlichen und der verallgemeinerten Resolventen bewährt sich auch bei der Zerlegung derselben in ihre idealen Factoren; wenn p für den Modul m zum Exponenten f gehört, so verhält sich die allgemeine Resolvente ähnlich wie ein Product von f gewöhnlichen Resolventen. Vollständiger wird die Analogie, wenn man eine beliebige „Gruppe" von Resten nach dem Modul m betrachtet; sobald die Primzahl p dieser Gruppe angehört, kann man ein Product von Resolventen herstellen, dessen ideale Primfactoren von jenem Exponenten f gar nicht explicite abhängen, und das Gleiche gilt auch von dem Reste dieses Productes nach der niedrigsten Potenz eines idealen Primfactors von p, durch die das Product nicht theilbar ist.

Ist die Zahl m so beschaffen, dass $-m$ eine Fundamentaldeterminante quadratischer Formen ist, und besteht die Restgruppe aus denjenigen (ungeraden positiven) Zahlen, für die das Jacobi'sche

Zeichen $\left(\frac{-m}{k}\right)$ den Werth $+1$ hat, so werden unsere allgemeineren Producte wie die von Jacobi und Cauchy betrachteten zweiwerthig und geben daher die Darstellung einer gewissen Potenz von p durch die Hauptform jener Determinante; zugleich genügen die darstellenden Zahlen zwei linearen Congruenzen nach dem Modul p, von denen jedoch nur eine von der gewählten Wurzel der Congruenz $x^2 + m \equiv 0 \pmod{p}$ unabhängig ist. Da der Exponent jener Potenz gleich der Classenanzahl der quadratischen Formen ist, so ist die Analogie mit den Sätzen von Jacobi und Cauchy eine vollständige; zur wirklichen Herstellung der quadratischen Zerfällungen reichen freilich unsere Formeln so wenig aus wie die der genannten Mathematiker, sobald die Classenanzahl grösser als Eins ist.

Diese Resultate habe ich im Jahre 1888 der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt in einer Abhandlung: „*Theorie der Eisenstein'schen Summen u. s. w.*", von welcher die gegenwärtige eine Umarbeitung ist. In der neuen Fassung treten die Eisenstein'schen Summen mehr zurück als in der frühern, nachdem es mir seither gelungen ist, die Zerlegung der Resolventen in ihre idealen Primfactoren auf neuem Wege, nämlich ohne die Hilfe jener Summen, zu bewerkstelligen. Dieser neue Beweis findet sich in § 6; er umfasst zugleich den in § 5 gegebenen; wiewohl also § 5 an sich entbehrlich ist, mochte ich ihn nicht beseitigen, da er immerhin das Verständniss von § 6 nicht unwesentlich erleichtern dürfte. Auch sonst ist die Anordnung des zweiten Theils wesentlich geändert und § 4 beträchtlich verkürzt, während in § 1—3 nur untergeordnete redactionelle Aenderungen vorgenommen sind.

Die Theorie der idealen Zahlen ist in derjenigen Form benutzt, die ihr Herr Dedekind zuerst in der zweiten Auflage der Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie gegeben hat. Die wenigen speciell auf Kreistheilungskörper bezüglichen Sätze, welche hier gebraucht werden, finden sich in der dritten Auflage desselben Werkes in der Fussnote zu Seite 587 angegeben.

§ 1.

Restsysteme.

1. Sei Ω ein beliebiger endlicher Zahlkörper, $\mathfrak{o}$ die Gesammtheit der ganzen Zahlen in Ω, und $\mathfrak{p}$ ein solches Ideal in $\mathfrak{o}$, welches in der rationalen Primzahl p aufgeht; eine übersichtliche Darstellung aller nach dem Modul $\mathfrak{p}$ incongruenten Zahlen von $\mathfrak{o}$ erhalten wir dann in folgender Weise. Ist ω_1 irgend eine durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbare Zahl, und durchläuft x_1 p ganze rationale nach p incongruente Werthe, so

stellt $x_1\omega_1$ p Zahlen dar, die nach $\mathfrak{p}$ incongruent sind. Ist ω_2 keiner von diesen congruent, und durchläuft auch x_2 ein gewöhnliches Restsystem (mod. p), so nimmt $x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ p^2 Werthe an, die nach $\mathfrak{p}$ incongruent sind. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schliesslich f Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_f$ von der Art, dass

$$\omega = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_f\omega_f \tag{1}$$

p^f incongruente Zahlen liefert, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_f$ die Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ durchlaufen, und dass jede Zahl in $\mathfrak{o}$ einer von diesen p^f Zahlen congruent ist nach $\mathfrak{p}$. Wir nennen f den Grad des Ideals $\mathfrak{p}$. Solche f Zahlen kann man namentlich unter den Zahlen jedes Fundamentalsystems von $\mathfrak{o}$ finden; die übrigen $n-f$ Basiszahlen kann man dann um Zahlen der Form (1) so vermehren, dass sie durch $\mathfrak{p}$ theilbar werden.

Die einzige Bedingung, der die Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_f$ zu genügen haben, wenn f als bekannt angesehen wird, ist die, dass sie *unabhängig* seien nach dem Modul $\mathfrak{p}$. Wir nennen nämlich irgendwelche g Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_g$ unabhängig (mod. $\mathfrak{p}$), wenn kein Aggregat der Form $x_1\omega_1 + \cdots + x_g\omega_g$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, ohne dass die einzelnen Zahlen $x_1, \ldots, x_g$ durch p theilbar sind. Ein einfaches Kriterium der Unabhängigkeit lässt sich für den Fall angeben, wo $\mathfrak{p}$ ein *Primideal* ist, was wir von jetzt an voraussetzen.

2. Sind nämlich zunächst $\omega_1, \ldots, \omega_g$ von einander abhängig, besteht also eine Congruenz

$$x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_g\omega_g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

in welcher die ganzen rationalen Zahlen x nicht alle durch p theilbar sind, so ergeben sich durch Potenzirung die weiteren Congruenzen

$$\begin{aligned} x_1\omega_1^{(1)} + x_2\omega_2^{(1)} + \cdots + x_g\omega_g^{(1)} &\equiv 0, \\ x_1\omega_1^{(2)} + x_2\omega_2^{(2)} + \cdots + x_g\omega_g^{(g)} &\equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$\omega^{(h)} = \omega^{p^h} \tag{2}$$

gesetzt ist. Daher muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_g \\ \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \cdots & \omega_g^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{(g-1)} & \omega_2^{(g-1)} & \cdots & \omega_g^{(g-1)} \end{vmatrix} \tag{3}$$

durch $\mathfrak{p}$ theilbar sein. Um nun zu beweisen, dass diese Bedingung auch hinreicht, nehmen wir $g \leqq f$ an, da überhaupt nicht mehr als f unabhängige Zahlen existiren; wir setzen ferner voraus, dass die analoge

Determinante aus den Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_{g-1}$ durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbar sei, da wir andernfalls auf diese die folgenden Schlüsse anwenden könnten. Dann sind aber $\omega_1, \ldots, \omega_{g-1}$ sicher unabhängig, und die Determinante, welche aus (3) hervorgeht, wenn man ω_g durch eine willkürliche Zahl ω von $\mathfrak{o}$ ersetzt, ist in Bezug auf ω wirklich vom Grade p^{g-1}. Diese Determinante wird durch $\mathfrak{p}$ theilbar einerseits für

$$\omega \equiv x_1\omega_1 + \cdots + x_{g-1}\omega_{g-1},$$

andrerseits für

$$\omega \equiv \omega_g;$$

da aber der Modul $\mathfrak{p}$ als Primideal vorausgesetzt ist, können nicht alle diese $p^{g-1}+1$ Zahlen incongruent sein, vielmehr ist ω_g congruent einer der übrigen p^{g-1} Zahlen. Wir haben also den Satz gewonnen:

I. *Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ als Modul sind g Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$ abhängig oder unabhängig, je nachdem die Determinante* (3) *durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist oder nicht.*

Für den Fall $g=f$ ist diese Bedingung von Herrn Hensel abgeleitet in § 2 der Abhandlung: *„Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines Gattungsbereiches u. s. w.“**). Aus dem Obigen folgt auch:

Sind $\omega_1, \ldots, \omega_g$ unabhängig, so sind die p^g Zahlen $x_1\omega_1 + \cdots + x_g\omega_g$ die Wurzeln der Congruenz

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \omega & \omega_1 & \cdots & \omega_g \\ \omega^{(1)} & \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_g^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega^{(g)} & \omega_1^{(g)} & \cdots & \omega_g^{(g)} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

3. Die p^g Zahlen $x_1\omega_1 + \cdots + x_g\omega_g$ haben die Eigenschaft, sich durch Addition zu reproduciren. Für $g=f$ reproduciren sie sich (mod. $\mathfrak{p}$) auch durch Multiplication. Soll für einen kleineren Werth von g den p^g Zahlen auch diese Eigenschaft zukommen, so müssen zufolge bekannter Schlüsse die $p^g - 1$ Zahlen, die nach Ausscheidung der Null übrig bleiben, Wurzeln der binomischen Congruenz

$$\omega^{p^g-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

sein. Diese Congruenz hat aber dann und nur dann die verlangte Anzahl von Wurzeln, wenn $p^g - 1$ ein Theiler von $p^f - 1$ und mithin auch g ein Theiler von f ist.

II. *Ein System von p^g Zahlen, welche sich durch Addition und Multiplication reproduciren nach dem Modul $\mathfrak{p}$, besteht aus den Wurzeln der Congruenz*

$$(5) \qquad \varrho^{p^g} \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{p}},$$

in welcher g irgend einen Divisor von f, dem Grade des Primideals $\mathfrak{p}$, bezeichnet.

---

*) Journal f. r. u. a. Math. Bd. 101.

Ist der Divisor g beliebig gewählt, und bedeuten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ **Wurzeln** der Congruenz (5), so kann man den Begriff der **Unabhängigkeit** so abändern, dass man h Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_h$ **abhängig oder unabhängig** nennt, je nachdem zwischen ihnen eine Relation der Form

$$\varrho_1\omega_1 + \varrho_2\omega_2 + \cdots + \varrho_h\omega_h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

besteht oder nicht. In diesem Sinne **unabhängige Zahlen giebt es** genau $\frac{f}{g}$; auch gewinnt man leicht eine Bedingung der **Unabhängigkeit**, welche der früheren ganz analog ist.

4. Seien wieder in dem ursprünglichen Sinne $\omega_1, \ldots, \omega_f$ **unabhängig** (mod. $\mathfrak{p}$), sodass die Congruenz

$$\omega \equiv x_1\omega_1 + \cdots + x_f\omega_f \pmod{\mathfrak{p}} \tag{6}$$

für eine beliebig gegebene Zahl ω von $\mathfrak{o}$ durch ganze rationale Zahlen $x_1, \ldots, x_f$ befriedigt wird; diese Zahlen, die Coordinaten von ω in Bezug auf den Modul $\mathfrak{p}$ und die Basis $\omega_1, \ldots, \omega_f$, sind nach dem Modul p bestimmt, sobald ω (mod. $\mathfrak{p}$) gegeben ist; da sie rational sind, genügt es aber, sie (mod. $\mathfrak{p}$) zu bestimmen. Eine solche Bestimmung gewinnt man leicht, wenn man die Congruenz (6) $f-1$ Mal auf die $p$te Potenz erhebt; denn dadurch erhält man f lineare Congruenzen, deren Determinante nach Satz I durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbar ist. Daher werden $x_1, \ldots, x_f$ linearen homogenen Functionen von $\omega, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(f-1)}$ congruent (mod. $\mathfrak{p}$), wenn wir uns wieder der Bezeichnung (2) bedienen.

Allgemeiner kann man, wenn $\beta_1, \ldots, \beta_f$ beliebige Zahlen von $\mathfrak{o}$ bedeuten, die lineare Function $\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_f x_f$ in die Form

$$\Phi(\omega) \equiv \alpha_0\omega + \alpha_1\omega^{(1)} + \cdots + \alpha_{f-1}\omega^{(f-1)} \pmod{\mathfrak{p}} \tag{7}$$

bringen; das Umgekehrte ergiebt sich unmittelbar. Beide Ausdrücke, die also von gleicher Allgemeinheit sind, kann man betrachten als Darstellungen einer Function $\Phi(\omega)$, deren Werthe dem Gebiete $\mathfrak{o}$ angehören und zugleich mit ω nach dem Modul $\mathfrak{p}$ bestimmt sind, und die ausserdem die Congruenz

$$\Phi(\omega+\omega') \equiv \Phi(\omega) + \Phi(\omega') \pmod{\mathfrak{p}} \tag{8}$$

befriedigt. Denn aus diesen Bedingungen folgt in bekannter Weise

$$\Phi(x_1\omega_1 + \cdots + x_f\omega_f) \equiv x_1\Phi(\omega_1) + \cdots + x_f\Phi(\omega_f) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Giebt man speciell den Zahlen $\Phi(\omega_1), \ldots, \Phi(\omega_f)$ ganze rationale Werthe, so ist allgemein

$$\Phi(\omega)^p \equiv \Phi(\omega) \pmod{\mathfrak{p}};$$

stellt man aber $\Phi(\omega)$ in der Form (7) dar, so zerfällt diese Congruenz in f einzelne:

$$\alpha_1 \equiv \alpha_0^p,\ \alpha_2 \equiv \alpha_1^p, \ldots, \alpha_0 \equiv \alpha_{f-1}^p \pmod{\mathfrak{p}},$$

und diese ergeben

$$\alpha_1 \equiv \alpha_0^p,\ \alpha_2 \equiv \alpha_0^{p^2}, \ldots, \alpha_{f-1} \equiv \alpha_0^{p^{f-1}} \pmod{\mathfrak{p}},$$

während α_0 willkürlich bleibt. Verstehen wir daher, wie in der Folge allgemein geschehen soll, unter $S(\omega)$ irgend eine derjenigen ganzen rationalen Zahlen, welche der Summe

$$\omega + \omega^p + \cdots + \omega^{p^{f-1}} \tag{9}$$

congruent sind Modulo $\mathfrak{p}$, so wird vermöge dieser Nebenbedingung

$$\Phi(\omega) \equiv S(\alpha\omega) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

III. *Eine Function $\Phi(\omega)$, deren Werthe ganz und rational und* (mod. p) *bestimmt sind, sobald ω* (mod. $\mathfrak{p}$) *bestimmt ist, und die ferner die Congruenz*

$$\Phi(\omega + \omega') \equiv \Phi(\omega) + \Phi(\omega') \pmod{p}$$

befriedigt, ist congruent $S(\alpha\omega)$, wenn S die soeben erklärte Bedeutung hat und α eine willkürliche aber feste Zahl von $\mathfrak{o}$ bezeichnet.

Diese Zahl α ist (mod. $\mathfrak{p}$) bestimmt, sobald Φ gegeben ist, sie vertritt die f rationalen Zahlen $\Phi(\omega_1), \ldots, \Phi(\omega_f)$. Setzt man der Reihe nach $\Phi(\omega)$ congruent $x_1, x_2, \ldots, x_f$, so erhält man f specielle Werthe von α, die wir durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_f$ bezeichnen. Die Congruenz

$$x_i \equiv S(\eta_i\omega) \equiv S\big(\eta_i(x_1\omega_1 + \cdots + x_f\omega_f)\big) \pmod{p}$$

zerlegt sich in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} S(\eta_i\omega_i) &\equiv 1 \\ S(\eta_i\omega_k) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{p}, \tag{10}$$

wobei i, k ungleich vorausgesetzt sind. Vermöge der Bedeutung des Zeichens S definiren diese Congruenzen die Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_f$ nach dem Modul $\mathfrak{p}$ als Determinantenquotienten. Man kann dieselben auch simultan erklären durch die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} \eta_1\omega_1 &+ \cdots + \eta_f\omega_f &&\equiv 1 \\ \eta_1\omega_1^p &+ \cdots + \eta_f\omega_f^p &&\equiv 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_1\omega_1^{p^{f-1}} &+ \cdots + \eta_f\omega_f^{p^{f-1}} &&\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{11}$$

Zu erwähnen ist, dass $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_f$ gleichfalls unabhängig sind nach dem Modul $\mathfrak{p}$, und dass die Beziehung zwischen den beiden Systemen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_f$ und $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_f$ gegenseitig ist. Diese Beziehung entspricht genau derjenigen zwischen den complementären Basen des Körpers Ω, welche Herr Dedekind in der Abhandlung „*Ueber die Discriminanten endlicher Körper*“*) eingeführt hat. Diese Analogie hat ihren Grund in dem Satze, dass jede Congruenz nach dem Modul $\mathfrak{p}$ mit rationalen Coefficienten, welche durch eine Zahl ω befriedigt wird, auch ω^p zur Wurzel hat.

*) Abhandl. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, Bd. 29 (1882).

5. Die Function $S(\omega)$ kann nach Definition nur einer der Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ congruent sein nach dem Modul p oder $\mathfrak{p}$; da sie nach dem letzteren einer ganzen Function p^{f-1}ten Grades von ω congruent ist, so kann sie denselben Werth höchstens für p^{f-1} incongruente Werthe von ω annehmen. Lässt man daher ω ein volles Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{p}$ durchlaufen, so muss $S(\omega)$ jeden jener p Werthe, und jeden p^{f-1} Mal annehmen.

IV. *Durchläuft ω ein vollständiges Restsystem nach dem Primideal $f$ten Grades $\mathfrak{p}$ als Modul, so nimmt die Function $S(\omega)$ jeden der Werthe $0, 1, \ldots, p-1$ genau p^{f-1} Mal an.*

Bringt man die Congruenz

$$S(\omega) \equiv S(\omega)^p \pmod{\mathfrak{p}},$$

auf welcher der letzte Schluss beruht, in die Form

$$S(\omega - \omega^p) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

so ist in gleicher Weise zu schliessen, dass man jede der p^{f-1} Wurzeln der Congruenz $S(\tau) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ p Mal erhält, wenn man $\tau = \omega - \omega^p$ setzt und ω ein vollständiges Restsystem durchlaufen lässt.

Aehnlich wie den Satz IV erhält man den allgemeineren Satz:

V. *Bezeichnet g einen Divisor von f, und lässt man ω ein volles Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{p}$ durchlaufen, so wird der Ausdruck*

$$\omega + \omega^{p^g} + \omega^{p^{2g}} + \cdots + \omega^{p^{f-g}}$$

je p^{f-g} Mal congruent jeder der p^g Wurzeln der Congruenz

$$\varrho^{p^g} \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Auch diesem Satze steht ein zweiter zur Seite in ähnlicher Weise wie dem Satze IV. Die hier angewandten Principien führen auch leicht zu einem viel allgemeineren Satze, den wir aber übergehen.

§ 2.

Restcharaktere.

1. Sei, wie in § 1, $\mathfrak{p}$ ein Primideal $f$ten Grades in dem endlichen Körper Ω, und seien m, n zwei complementäre Divisoren von $p^f - 1$, also

$$p^f - 1 = mn. \tag{1}$$

Da die Congruenz $\omega^{mn} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ mn Wurzeln besitzt, so schliesst man in bekannter Weise, dass ω^n, wenn ω jene mn Werthe durchläuft, nur m incongruente Werthe annimmt, nämlich die Wurzeln der Congruenz

$$\tau^m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{2}$$

aber jeden dieser Werthe n Mal. Demnach können die Zahlen ω classificirt werden nach den Resten von ω^n; jede der m Classen enthält n Zahlen, und eine der Classen, für welche nämlich $\omega^n \equiv 1$ ist, besteht aus den $m$ten Potenzresten.

Enthält der Körper Ω eine primitive $m$te Einheitswurzel Θ, so sind die Wurzeln von (2) die Potenzen von Θ; in der That sind diese incongruent, da ihre Differenzen Divisoren von m sind. Wir bezeichnen nun durch $[\omega]$ diejenige Potenz von Θ, welche der Potenz ω^n congruent ist; die charakteristischen Eigenschaften dieses Symbols sind also

$$[\omega]^m = 1, \tag{3}$$

$$[\omega] \equiv \omega^n \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{4}$$

Demnach ist stets

$$[1] = 1, \tag{5}$$

$$[\Theta] = \Theta^n, \tag{6}$$

und ferner, wenn die Primzahl p *ungerade* ist,

$$[-1] = (-1)^n; \tag{7}$$

Denn unter dieser Voraussetzung ist mindestens eine der Zahlen m, n gerade. Für $p = 2$ dagegen ist $[-1] = 1$. Weiter ist

$$[\omega] = [\omega_1] \quad \text{für} \quad \omega \equiv \omega_1 \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{8}$$

und allgemein

$$[\omega\omega_1] = [\omega][\omega_1]. \tag{9}$$

Das Symbol $[\omega]$ gehört daher zu den „Charakteren" der durch die $p^f - 1$ Zahlclassen nach dem Modul $\mathfrak{p}$ gebildeten Abel'schen Gruppe. Die Gesammtzahl dieser Charaktere ist nach Herrn Weber*) gleich $p^f - 1$; wir haben es aber hier nur mit den Potenzen eines derselben, nämlich mit $[\omega]^a$, zu thun. Diese m Charaktere bilden eine Untergruppe und zwar die einzige Untergruppe der Ordnung m, weil die ganze Gruppe aus den Potenzen eines einzigen primitiven Charakters besteht. Aus dem nämlichen Grunde sind diese Charaktere die einzigen dem Körper Ω angehörenden, wenn dieser keine höheren als die $m$ten Einheitswurzeln enthält.

Da die Zahl Θ nach dem Modul $\mathfrak{p}$ zum Exponenten m gehört, so kann man nach dem von Gauss**) gelehrten Verfahren eine *primitive* Wurzel der Congruenz

$$\omega^{p^f-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

so bestimmen, dass zugleich $\omega^n \equiv \Theta$ ist. Sei γ eine solche primitive Wurzel, also

*) Mathem. Ann. Bd. 20, S. 307.

**) Disq. arithm. art. 71.

(10) $$\gamma^n \equiv \Theta \pmod{\mathfrak{p}}, \quad [\gamma] = \Theta.$$

Setzt man dann

$$\omega \equiv \gamma^{\mathrm{Ind}\,\omega} \pmod{\mathfrak{p}},$$

so wird

$$\omega^n \equiv \gamma^{n\,\mathrm{Ind}\,\omega} \equiv \Theta^{\mathrm{Ind}\,\omega},$$

und folglich

(11) $$[\omega] = \Theta^{\mathrm{Ind}\,\omega}.$$

Da $[\omega]$ jeden der Werthe $1, \Theta, \ldots, \Theta^{m-1}$ n Mal annimmt, falls ω ein Restsystem durchläuft, so ist

$$\sum [\omega]^a = n(1 + \Theta^a + \Theta^{2a} + \cdots + \Theta^{(m-1)a}),$$

also gleich $p^f - 1$ oder 0, je nachdem a durch m theilbar ist oder nicht.

2. Wir untersuchen jetzt speciell die Charaktere derjenigen $p^g - 1$ Zahlen ϱ, welche die Congruenz

(12) $$\varrho^{p^g - 1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

befriedigen, in welcher wieder g einen ganzen rationalen Theiler von f bedeuten soll. Ist

$$\varrho_2 \equiv \varrho\,\varrho_1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

so ist jede der Gleichungen

$$[\varrho_2]^a = [\varrho_1]^a, \quad [\varrho]^a = 1$$

eine Folge der andern; daher nimmt $[\varrho]^a$ alle überhaupt vorkommenden Werthe ebenso oft an wie den speciellen Werth 1. Soll aber $[\varrho]^a = 1$ sein, so ist ϱ eine gemeinsame Wurzel der Congruenzen $\varrho^{an} \equiv 1$ und (12). Bezeichnet man also durch d den grössten gemeinsamen Theiler von an und $p^g - 1$, so wird $[\varrho]^a$ jeden seiner verschiedenen Werthe d Mal annehmen, und die

$$\frac{p^g - 1}{d} = e$$

verschiedenen Werthe werden die $e$ten Wurzeln der Einheit sein, weil $an \cdot e$ durch $p^g - 1$ theilbar und somit

$$([\varrho]^a)^e \equiv \varrho^{an \cdot e} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist. Bequemer lässt sich das Ergebniss ausdrücken, wenn man den Bruch

(13) $$\frac{an}{p^g - 1} = \frac{a}{m} \cdot \frac{p^f - 1}{p^g - 1} = \frac{a(1 + p^g + \cdots + p^{f-g})}{m}$$

einführt; der wahre Nenner dieses Bruches, d. h. der Nenner des ihm gleichen reducirten Bruches, ist nämlich gleich e.

Ist e der wahre Nenner des Bruches (13), *dann sind die Charaktere* $[\varrho]^a$ *aller Wurzeln der Congruenz* (12) *$e$te Einheitswurzeln, und zwar*

tritt jede dieser Einheitswurzeln gleich oft auf. Daher ist auch $\sum[\varrho]^a$ *gleich* p^g-1 *oder* 0, *je nachdem* an *durch* p^g-1 *theilbar ist oder nicht.*

Zu demselben Resultat führt die Gleichung (11). Die Potenz

$$\gamma^{1+p^g+\cdots+p^{f-g}}$$

ist nämlich eine primitive Wurzel der Congruenz (12), und ihr Charakter hat den Werth

$$\Theta^{1+p^g+\cdots+p^{f-g}}.$$

Für $g=1$ lautet der vorige Satz:

Durchläuft ε *die rationalen Zahlen* $1, 2, \ldots, p-1$, *so wird der Charakter* $[\varepsilon]^a$ *nur dann beständig gleich* 1, *wenn* an *durch* $p-1$, *d. h.* $a(1+p+p^2+\cdots+p^{f-1})$ *durch* m *theilbar ist; in diesem Falle ist* $\sum[\varepsilon]^a = p-1$, *in jedem andern Falle hat die Summe den Werth Null.*

Sei z. B. $m=8$, $p\equiv 3 \pmod 8$, $f=2$, $g=1$. Dann ist $\frac{n}{p-1}=\frac{p+1}{8}$, also $e=2$ bei ungeradem, $e=1$ bei geradem a. Dabei ist

$$[\varepsilon]\equiv\varepsilon^{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{4}}\equiv\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

d. h. der Charakter $[\varepsilon]$ stimmt überein mit dem Legendre'schen Zeichen.

Ist dagegen $m=7$, p congruent 2 oder 4 (mod. 7), $f=3$, $g=1$, so ist $p-1$ prim zu m, und daher n durch $p-1$ theilbar; somit ist hier für jeden Werth von a $e=1$, $[\varepsilon]=1$.

Diese beiden Specialfälle sind von Eisenstein in § 1 und 7 der zu Anfang erwähnten Abhandlung betrachtet.

Allgemein sei noch erwähnt, dass e für jeden Werth von a gleich 1 ist, wenn p^g-1 zu m theilerfremd ist.

§ 3.

Resolventen und Eisenstein'sche Summen.

1. Ist p eine Primzahl, m ein Theiler von $p-1$, sind Θ, ξ respective primitive $m$te und $p$te Einheitswurzeln, dann stellt der Ausdruck

$$\sum_1^{p-1}\Theta^{a\,\mathrm{Ind}\,s}\xi^s = F(\Theta^a, \xi)$$

die sogenannte Kreistheilungsresolvente dar, deren wichtigste Eigenschaften durch Jacobi, Cauchy und namentlich durch Herrn Kummer festgestellt worden sind; die hier gewählte Schreibweise ist besonders

von Eisenstein*) benutzt worden. Wegen der Eigenschaften der Indices ist $\Theta^{\mathrm{Ind}\,s}$ einer der Charaktere, welche der Gruppe der Zahlclassen nach dem Modul p entsprechen, und wir können denselben leicht unter die in § 2 behandelten einreihen. In dem Körper, welcher aus Θ durch die rationalen Operationen entspringt — im Rationalitätsbereiche (Θ) nach der Terminologie des Herrn Kronecker — zerfällt nach der Kummer'schen Theorie die Primzahl p in $\varphi(m)$ ideale Factoren, wobei $\varphi(m)$ die Euler'sche zahlentheoretische Function bedeutet; für einen und nur für einen dieser Factoren ist, wenn $\frac{p-1}{m} = n$ gesetzt wird, die $n$te Potenz der primitiven Congruenzwurzel, auf welche sich die Indices beziehen, congruent Θ, und daher auch allgemein $s^n \equiv \Theta^{\mathrm{Ind}\,s}$. Deshalb bezeichnet auch schon Cauchy zu Anfang seines Mémoire sur la theorie des nombres**) $\Theta^{\mathrm{Ind}\,s}$ durch das Zeichen $\left[\frac{s}{p}\right]$; genauer wäre die Bezeichnung $\left[\frac{s}{\mathfrak{p}}\right]$. Die Eigenschaften des andern Factors ξ^s, welche beim Beweise der Haupteigenschaften der Resolvente gebraucht werden, sind

$$\xi^r \cdot \xi^s = \xi^{r+s}, \quad \xi^p = 1.$$

2. Von jetzt ab sei m nicht mehr ein Divisor von $p-1$, sondern erst von $p^f - 1$, sodass p nach dem Modul m zum Exponenten f gehört; wir setzen, wie in § 1:

$$p^f - 1 = mn. \tag{1}$$

Bezeichnet wiederum Θ eine primitive $m$te Wurzel der Einheit, so zerfällt in dem durch Θ bestimmten Körper die Zahl p (oder das Hauptideal $\mathfrak{o}p$) in $\frac{\varphi(m)}{f}$ verschiedene Primideale, welche sämmtlich conjugirt und vom Grade f sind. Unter diesen greifen wir irgend eines heraus, das wir durch $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Als f unabhängige Zahlen bieten sich zunächst die Potenzen $1, \Theta, \Theta^2, \ldots, \Theta^{f-1}$ dar; in speciellen Fällen kann es vortheilhaft sein, eine andere Wahl zu treffen.

Um nun die Kreistheilungsresolvente zu verallgemeinern, ersetzen wir den ersten Factor ihres allgemeinen Gliedes durch den in § 2 definirten Restcharakter $[\omega]^a$, indem wir zugleich ω ein vollständiges Restsystem mit Ausschluss der Null durchlaufen lassen. Der zweite Factor ξ^s aber ist zu ersetzen durch eine Function $\Psi(\omega)$, welche ungeändert bleibt, wenn ω durch eine nach $\mathfrak{p}$ congruente Zahl ersetzt wird, und welche ausserdem der Gleichung $\Psi(\omega)\Psi(\omega_1) = \Psi(\omega + \omega_1)$ genügt. Aus der vorigen Gleichung folgt aber $\Psi(\omega)^s = \Psi(s\omega)$, und

*) Allgem. Untersuchungen üb. d. F. dritten Grades u. s. w., Journal f. Math. Bd. 28, S. 289.

**) Mémoires de l'acad. d. sc., t. 17 (1840).

speciell mit Rücksicht auf die erste Eigenschaft $\Psi(\omega)^p = 1$. Wir führen daher eine primitive $p$te Einheitswurzel ξ ein und setzen

$$\Psi(\omega) = \xi^{\Phi(\omega)};$$

dann ist zu fordern, dass $\Phi(\omega)$ stets ganz und rational sei, ferner bestimmt nach p, sobald ω nach $\mathfrak{p}$ als Modul bestimmt ist, und ausserdem, dass

$$\Phi(\omega) + \Phi(\omega_1) \equiv \Phi(\omega + \omega_1) \pmod{p}$$

sei. Die allgemeinste derartige Function ist aber nach Satz III, § 1

$$\Phi(\omega) \equiv S(\alpha\omega).$$

3. Wir lassen zunächst α beliebig und bilden die Summe

$$F_\alpha(\Theta^a, \xi) = \sum [\omega]^a \xi^{S(\alpha\omega)}, \tag{2}$$

in welcher ω ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{p}$ mit Ausschluss der Null durchläuft; diese Summe bezeichnen wir als *verallgemeinerte Resolvente*, oft auch kurzweg als Resolvente. Sie ist der Werth, welchen die Summe $\sum t^{\mathrm{ind}\,\omega} \xi^{S(\alpha\omega)}$ für $t = \Theta^a$ annimmt; da aber Θ^a jede Wurzel der Gleichung $t^m = 1$ sein kann, so wollen wir unter $F_\alpha(t, \xi)$ den Rest der zuletzt angegebenen Summe nach dem Modul $t^m - 1$ verstehen, also eine ganze Function vom Grade $m - 1$, deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von ξ sind. Die *Coefficienten* dieser Function sind dann völlig bestimmt durch die *Werthe*, welche sie für $t = 1, \Theta, \ldots, \Theta^{m-1}$ annimmt; aus diesem Grunde ist es auch vortheilhaft, von vornherein keinen Werth von a auszuschliessen, wiewohl namentlich der Werth $a = 0$ vielfach einen Ausnahmefall bildet.

Für $\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ erhält man

$$F_0(\Theta^a, \xi) = \sum [\omega]^a,$$

also gleich $p^f - 1$ oder 0, je nachdem a durch m theilbar ist oder nicht.

Ist dagegen α durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbar, so durchläuft $\omega_1 \equiv \alpha\omega$ zugleich mit ω ein volles Restsystem; da hierbei $[\omega_1] = [\alpha][\omega]$ ist, so ergiebt sich

$$F_\alpha(\Theta^a, \xi) = [\alpha]^{-a} F_1(\Theta^a, \xi). \tag{3}$$

Im Allgemeinen reicht es also aus, die besondere Function F_1 zu betrachten; wir schreiben deshalb zur Vereinfachung

$$F(\Theta^a, \xi) = F_1(\Theta^a, \xi) = \sum [\omega]^a \xi^{S(\omega)}. \tag{4}$$

Als besonderer Fall der Gleichung (3) stellt sich die folgende dar, in welcher s eine durch p nicht theilbare ganze rationale Zahl bezeichnet:

(5) $$F(\Theta^a, \xi^\nu) = [\nu]^{-a} F(\Theta^a, \xi);$$

nach § 2 folgt hieraus, dass die e^{te} Potenz von $F(\Theta^a, \xi)$ von ξ frei ist, wenn e den wahren Nenner des Bruches $\frac{an}{p-1}$ bedeutet.

Setzt man weiter $\omega_1 \equiv \omega^p$, so durchläuft wiederum ω_1 zugleich mit ω ein vollständiges Restsystem nach $\mathfrak{p}$; da

$$[\omega]^p = [\omega_1], \quad S(\omega) \equiv S(\omega_1) \pmod{p}$$

ist, so wird

(6) $$F(\Theta^a, \xi) = F(\Theta^{ap}, \xi).$$

Weniger einfach gestaltet sich die Beziehung zwischen $F_\alpha(\Theta^a, \xi)$ und $F_\alpha(\Theta^{ap}, \xi)$, wenn α beliebig ist.

4. Wir gehen zur Untersuchung des Productes

$$F(\Theta^a, \xi) F(\Theta^b, \xi) = \sum_{\omega} \sum_{\omega_1} [\omega]^a [\omega_1]^b \xi^{S(\omega+\omega_1)}$$

über, und zwar ordnen wir die Glieder der Doppelsumme nach den Potenzen von ξ. Die Glieder, für welche $\omega + \omega_1$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, liefern den Beitrag

$$[-1]^a \sum [\omega]^{a+b}.$$

Für die übrigen Glieder setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \sigma &\equiv \omega + \omega_1 \\ \omega &\equiv \sigma\tau, \quad \omega_1 \equiv \sigma(1-\tau) \end{aligned}\right\} \pmod{\mathfrak{p}};$$

den $(p^f-1)(p^f-2)$ Werthepaaren ω, ω_1, für die weder ω noch ω_1 noch $\omega + \omega_1$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, entsprechen eindeutig die Combinationen von $p^f - 1$ Werthen von σ mit $p^f - 2$ Werthen von τ, indem τ keinen der Werthe 0, 1 annehmen darf. Durch diese Substitution wird aber

$$[\omega]^a [\omega_1]^b \xi^{S(\omega+\omega_1)} = [\tau]^a [1-\tau]^b \cdot [\sigma]^{a+b} \xi^{S(\sigma)}.$$

Im Ganzen erhält man also

(7) $$F(\Theta^a, \xi)\, F(\Theta^b, \xi) = [-1]^a \sum [\omega]^{a+b} + \Psi_{a,b}(\Theta) F(\Theta^{a+b}, \xi),$$

wenn man zur Abkürzung

(8) $$\Psi_{a,b}(\Theta) = \sum [\tau]^a [1-\tau]^b$$

setzt. Allgemein soll unter $\Psi_{a,b}(t)$ diejenige ganze Function $(m-1)$ten Grades von t verstanden werden, welche nach dem Modul $t^m - 1$ der Summe

$$\sum t^{a \operatorname{Ind} \tau + b \operatorname{Ind}(1-\tau)}$$

congruent ist. Alsdann ist

$$\Psi_{a,b}(t^k) \equiv \Psi_{ak,bk}(t)$$

nach $t^m - 1$; ferner bleibt Ψ ungeändert, wenn man a, b um Vielfache von m ändert.

Die wichtigeren Fälle der Gleichung (7) sind folgende.

a) *Wenn $a + b$ durch m nicht theilbar ist, so wird*

$$F(\Theta^a, \xi)\, F(\Theta^b, \xi) = \Psi_{a,b}(\Theta)\, F(\Theta^{a+b}, \xi); \tag{7a}$$

denn unter dieser Annahme ist

$$\sum [\omega]^{a+b} = 0.$$

b) *Wenn a durch m nicht theilbar ist, so ist*

$$F(\Theta^a, \xi)\, F(\Theta^{-a}, \xi) = [-1]^a p'. \tag{7b}$$

Denn zunächst ist

$$\sum [\omega]^0 = p' - 1 \quad \text{und} \quad F(\Theta^0, \xi) = -1.$$

Ausserdem aber geht $\Psi_{a,b}(\Theta)$, wenn man $\tau \equiv (1-\tau)\tau_1$ setzt, wobei τ_1 ein volles Restsystem mit Ausschluss der Zahlen 0 und -1 durchläuft, über in

$$\sum [\tau_1]^a = \sum [\omega]^a - [-1]^a = -[-1]^a,$$

und somit die rechte Seite der Gleichung (7) in $[-1]^a (p' - 1 + 1)$, w. z. b. w. Die Gleichung (7b) kann man zufolge (5) auch in die Form setzen

$$F(\Theta^a, \xi)\, F(\Theta^{-a}, \xi^{-1}) = p', \tag{7c}$$

in welcher die beiden Factoren der linken Seite conjugirt imaginär sind.

5. Die complexen Zahlen $\Psi_{a,b}$ sind von Herrn Kummer als Verallgemeinerung der in der Kreistheilung auftretenden $\psi(\Theta)$ eingeführt und in ihre idealen Primfactoren zerlegt in § 2 der Abhandlung „Ueber die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen"*). Man kann sie in sechs im Allgemeinen verschiedenen Formen darstellen mittelst der Substitutionen $\tau \equiv 1 - \tau_1$, $\tau \equiv \frac{1}{\tau_1}$. Setzt man nämlich

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{m}, \tag{9}$$

so erhält man die Gleichungen

$$\Psi_{a,b} = \Psi_{b,a}, \tag{10}$$

$$[-1]^a \Psi_{b,c} = [-1]^b \Psi_{c,a} = [-1]^c \Psi_{a,b}, \tag{11}$$

von denen im Grunde schon vorhin unter b) Gebrauch gemacht ist. Bei Herrn Kummer a. a. O. fehlen die Vorzeichen, weil m und p ungerade sind, sodass n gerade und $[-1] = +1$ ist; das Nämliche gilt übrigens auch für $p = 2$.

---

*) Journal f. r. u. a. Mathem. 41, S. 106—121.

Sehr leicht ergeben sich die Gleichungen

$$\Psi_{a,b}(\Theta) = \Psi_{a,b}(\Theta^p), \tag{12}$$

$$\Psi_{a,b}(\Theta)\,\Psi_{a,b}(\Theta^{-1}) = p^f, \tag{13}$$

die letztere mit der Beschränkung, dass keine der Zahlen a, b, $a+b$ durch m theilbar sein darf. Endlich drücken sich genau wie in der gewöhnlichen Theorie gewisse Potenzen und Producte von Resolventen $F(\Theta^a, \xi)$ durch die Zahlen Ψ aus; namentlich ist, wenn durch ca das kleinste gemeinsame Vielfache von a und m bezeichnet und $c > 2$ angenommen wird,

$$F(\Theta^a, \xi)^c = [-1]^a p^f \Psi_{a,a}\Psi_{a,2a}\cdots\Psi_{a,(c-2)a}; \tag{14}$$

der Fall $c = 2$ erledigt sich unmittelbar durch die Formel (7b). Uebrigens wird in der Folge von den Zahlen Ψ kein weiterer Gebrauch gemacht.

6. Wenn es Exponenten k giebt, für welche $ap^k \equiv -a \pmod m$ ist, so ist der kleinste g unter diesen Exponenten ein Divisor von f. Die Gleichungen (6) und (7b) liefern dann zunächst

$$F(\Theta^a, \xi)^2 = [-1]^a p^f.$$

Ist nun der Quotient $\frac{f}{g}$ *gerade*, so ist

$$an = (p^g - 1)\,\frac{a(p^g+1)}{m}\,(1 + p^{2g} + \cdots + p^{f-2g})$$

durch $p-1$ theilbar; folglich ist $[-1]^a = +1$ und

$$F(\Theta^a, \xi) = \pm p^{\frac{1}{2}f}.$$

Wir werden weiterhin unter der Annahme $ap^{\frac{1}{2}f} \equiv -a \pmod m$ das Vorzeichen in der letzten Gleichung allgemein bestimmen.

Ist dagegen $\frac{f}{g}$ *ungerade*, so ist jedenfalls auch $ap^f \equiv -a \pmod m$; da aber $p^f \equiv 1$ ist, so muss $2a$ durch m theilbar sein. Sehen wir von dem Falle $a \equiv 0 \pmod m$ ab, so muss m gerade, mithin p ungerade, und ausserdem $a \equiv \frac{m}{2} \pmod m$ sein. Dann ist aber $a(p+1)$ durch m theilbar, also $g = 1$ und f ungerade; weiter ist

$$an = \tfrac{1}{2}mn = \frac{p-1}{2}\,(1 + p + \cdots + p^{f-1})$$

$$\equiv \frac{p-1}{2} \pmod{(p-1)}.$$

Somit wird hier

$$F(-1, \xi)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^f,$$

$$F(-1, \xi) = p^{\frac{f-1}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}.$$

7. Ist g ein *beliebiger* Divisor von f, dann können wir die Summation nach ω in zwei einfachere zerlegen, indem wir die Zahlen ω nach den Werthen der Verbindung

$$\omega + \omega^{p^g} + \omega^{p^{2g}} + \cdots + \omega^{p^{f-g}} \equiv \varrho \tag{15}$$

classificiren. Nach Satz V, § 1 umfasst jede Classe p^{f-g} Zahlen ω; für alle diese hat auch $S(\omega)$ den nämlichen Werth, da

$$S(\omega) \equiv \varrho + \varrho^p + \cdots + \varrho^{p^{g-1}} \equiv T(\varrho) \tag{16}$$

ist; ϱ aber durchläuft alle Wurzeln der Congruenz

$$\varrho^{p^g} \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{17}$$

Ist nun ϱ von Null verschieden, so können wir durch die Substitution $\omega \equiv \varrho\tau$ die Congruenz (15) in

$$\tau + \tau^{p^g} + \tau^{p^{2g}} + \cdots + \tau^{p^{f-g}} \equiv 1 \tag{18}$$

überführen. Da in dieser ϱ nicht mehr vorkommt, so sind einfach alle Wurzeln von (17) mit allen von (18) zu multipliciren. Nur für $\varrho \equiv 0$ muss man auf die ursprüngliche Congruenz (15) zurückgehen, von den Wurzeln derselben aber $\omega \equiv 0$ weglassen. Bedient man sich wieder der durch die Gleichung (2) § 1 definirten Abkürzung und setzt ferner

$$M_0(\Theta^a) = \sum [\omega]^a, \quad (\omega + \omega^{(g)} + \cdots + \omega^{(f-g)} \equiv 0,$$

$$M(\Theta^a) = \sum [\tau]^a, \quad (\tau + \tau^{(g)} + \cdots + \tau^{(f-g)} \equiv 1), \tag{19}$$

$$G(\Theta^a, \xi) = \sum [\varrho]^a \xi^{T(\varrho)} \tag{20}$$

so erhält man jetzt

$$F(\Theta^a, \xi) = M_0(\Theta^a) + M(\Theta^a)\, G(\Theta^a, \xi).$$

Bei dieser Umformung ist nur die Gleichung $\xi^p = 1$ benutzt, sodass sie für $\xi = 1$ giltig bleibt. Daher kann man durch Subtraction die Grösse $M_0(\Theta^a)$ fortschaffen und hat dann

$$F(\Theta^a, \xi) - F(\Theta^a, 1) = M(\Theta^a)\big(G(\Theta^a, \xi) - G(\Theta^a, 1)\big). \tag{21}$$

Die durch $G(\Theta^a, 1)$ bezeichnete Summe hat aber nach § 2 den Werth $p^g - 1$ oder Null, je nachdem an durch $p^g - 1$ theilbar ist oder nicht; im ersten Falle reducirt sich der zweite Factor rechter Hand in Gleichung (21) auf $-p^g$. Aehnliches gilt von der linken Seite, nur das es auf die Theilbarkeit von an durch $p^f - 1$, d. h. von a durch m, ankommt. Sieht man also von dem Falle $a \equiv 0 \pmod{m}$ ab, so hat man den Satz:

Je nachdem an durch $p^\varrho - 1$ theilbar ist oder nicht, wird

(21a) $$F(\Theta^a, \xi) = -p^\varrho M(\Theta^a)$$

oder

(21b) $$F(\Theta^a, \xi) = M(\Theta^a)\, G(\Theta^a, \xi).$$

8. Der Factor $G(\Theta^a, \xi)$ besitzt ganz ähnliche Eigenschaften wie der Ausdruck $F(\Theta^a, \xi)$. In der That übertragen sich die Beweise in 3. und 4. dieses Paragraphen ohne Weiteres auf die Summe G, weil die Zahlen ϱ sich durch Addition und Multiplication reproduciren. Namentlich ist also

(22) $$G(\Theta^a, \xi^s) = [s]^{-a}\, G(\Theta^a, \xi),$$

(23) $$G(\Theta^a, \xi) = G(\Theta^{ap}, \xi),$$

(24) $$G(\Theta^a, \xi)\, G(\Theta^{-a}, \xi^{-1}) = p^\varrho;$$

bei der letzten Gleichung ist der bereits erledigte Fall

$$an \equiv 0 \pmod{(p^\varrho - 1)}$$

auszunehmen.

Der andere Factor $M(\Theta^a)$ ist als specieller Werth der ganzen Function $(m-1)$ten Grades $M(t) \equiv \sum t^{\mathrm{Ind}\,\tau} \pmod{(t^m - 1)}$ aufzufassen, wobei τ durch die Congruenz (18) beschränkt ist. Da die einfachsten derartigen Summen von Eisenstein untersucht sind (vgl. den Schluss von § 2), bezeichnen wir sie allgemein als *Eisenstein'sche Summen*. Die zunächst sich darbietenden Eigenschaften derselben sind folgende:

(25) a) $$M(\Theta^a) = M(\Theta^{ap}).$$

b) Das Product $M(\Theta^a)\, M(\Theta^{-a})$ hat den Werth:

(26a) $p^{f-\varrho}$, wenn an durch $p^\varrho - 1$ nicht theilbar ist;

(26b) $p^{f-2\varrho}$, wenn an durch $p^\varrho - 1$, aber nicht durch $p^f - 1$ theilbar ist;

(26c) $p^{2f-2\varrho}$, wenn an durch $p^f - 1$ theilbar ist.

Die Entwicklungen in 7. und 8. gelten auch dann, wenn man statt von der Resolvente F von der Summe G ausgeht; neben der Zahl g ist dann noch ein Theiler h derselben einzuführen. Das Resultat lässt sich so aussprechen:

Zu jedem Divisor g des Grades f des Ideals $\mathfrak{p}$ gehört eine bestimmte „Resolvente"; wenn g durch h theilbar ist und G, H die zu den Zahlen g, h gehörigen Resolventen bezeichnen, so ist auch G durch H theilbar und der Quotient eine nur von Θ abhängende „Eisenstein'sche Summe."

Die Modification, die dieser Satz erleidet, wenn an durch $p^h - 1$ theilbar ist, ist dabei ausser Acht gelassen.

9. Den wichtigsten Fall der Eisenstein'schen Summen erhält man, indem man $g = 1$ nimmt; in diesem Falle wird $G(\Theta^a, \xi)$ eine *gewöhnliche* Resolvente. Setzt man also

$$(27)\quad G(\Theta^a,\xi) = \sum [s]^a \xi^s \quad (s = 1, 2, \ldots, p-1),$$

$$(28)\quad M(\Theta^a) = \sum [\tau]^a \qquad \left(\tau + \tau^p + \cdots + \tau^{p^{f-1}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}\right),$$

so hat man, von $a \equiv 0 \pmod{m}$ abgesehen,

$$(29a)\qquad F(\Theta^a, \xi) = -p\, M(\Theta^a)$$

oder

$$(29b)\qquad F(\Theta^a, \xi) = G(\Theta^a, \xi)\, M(\Theta^a),$$

je nachdem an durch $p-1$ theilbar ist oder nicht. Entsprechend ist auch

$$(30a)\qquad M(\Theta^a)\, M(\Theta^{-a}) = p^{f-2}$$

oder

$$(30b)\qquad M(\Theta^a)\, M(\Theta^{-a}) = p^{f-1},$$

während allgemein die Gleichung (25) gilt.

Die Congruenz $S(\omega) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ hat $f-1$ unabhängige Lösungen $\omega_1, \ldots, \omega_{f-1}$. Nehmen wir zu diesen eine Lösung ω_0 der Congruenz $S(\omega) \equiv 1$ hinzu, so können wir alle Lösungen dieser letzteren durch $\omega_0 + x_1\omega_1 + \cdots + x_{f-1}\omega_{f-1}$ darstellen, wodurch

$$M(\Theta^a) = \sum [\omega_0 + x_1\omega_1 + \cdots + x_{f-1}\omega_{f-1}]^a$$

wird. Dabei sind dann $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{f-1}$ f unabhängige Zahlen von bestimmter Beschaffenheit.

Auf diese Summe kann aber die allgemeinere

$$\overline{M}(\Theta^a) = \sum [\omega_0 + x_1\omega_1 + \cdots + x_{f-1}\omega_{f-1}]^a,$$

in welcher $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{f-1}$ beliebige nach dem Modul $\mathfrak{p}$ unabhängige Zahlen sind, in folgender Weise zurückgeführt werden. Sind $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{f-1}$ die durch die Congruenzen (11) § 1 definirten complementären Zahlen, so sind die p^{f-1} Zahlen $\omega = \omega_0 + x_1\omega_1 + \cdots + x_{f-1}\omega_{f-1}$ die Wurzeln der Congruenz $S(\eta_0\omega) \equiv 1 \pmod{p}$. Setzt man daher $\eta_0\omega \equiv \tau$, so erhält man

$$\overline{M}(\Theta^a) = [\eta_0]^{-a}\, M(\Theta^a),$$

womit die Abhängigkeit der Summe $\overline{M}(\Theta^a)$ von der Wahl der Zahlen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{f-1}$ klar gelegt ist. Die Gleichungen (30) gelten für $\overline{M}$ unverändert, während (25) durch

$$\overline{M}(\Theta^a) = \overline{M}(\Theta^{ap})\, [\eta_0]^{a(p-1)}$$

zu ersetzen ist.

Die Gleichungen (30) kann man auch nach Eisenstein direct beweisen durch ein Verfahren, welches im Grunde mit dem bei den Resolventen benutzten identisch ist; wir verzichten auf die Wiederholung des Beweises und fügen lieber einige Bemerkungen hinzu über die Art, wie Eisenstein in den beiden von ihm behandelten Fällen die f Zahlen $\omega_0, \omega_1 \ldots \omega_{f-1}$ gewählt hat. Er hat die Wahl so getroffen, dass jene Zahlen sämmtlich für gewisse $\frac{\varphi(m)}{f}$ der primitiven Einheitswurzeln Θ den nämlichen Werth und somit im Ganzen nur f verschiedene Werthe annehmen. Eine solche Wahl kann zwar practisch bequem sein, ist aber ohne principielle Wichtigkeit und ist auch nicht immer möglich. Wir geben nur kurz die Bedingung der Möglichkeit an nebst einem Falle, in dem diese Bedingung nicht erfüllt ist. Sie lautet: es darf keine niedrigere als die $f$te Potenz von p ein $f$ter Potenzrest sein; sie ist nicht erfüllt für $m = 15$, $p = 4$. Vgl. *Frobenius und Stickelberger „Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen"* § 3.*)

10. Wir können jetzt auch den in 6. erwähnten Fall vollständig erledigen, in dem

$$a p^{\frac{1}{2}f} \equiv -a \pmod{m}$$

ist, ohne dass a durch m theilbar wäre. Setzen wir nämlich

$$g = \tfrac{1}{2} f, \quad a(p^g + 1) = ml, \tag{31}$$

mithin

$$an = (p^g - 1)\, l,$$

so ist für alle Wurzeln der Congruenz (17) $[\varrho]^a = 1$, und folglich nach Gleichung (21 a)

$$F(\Theta^a, \xi) = -p^g M(\Theta^a),$$

$$M(\Theta^a) = \sum [\tau]^a$$

mit der Bedingung

$$\tau + \tau^{p^g} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Setzt man nun

$$\tau^{p^g - 1} \equiv \sigma,$$

so liefert die Bedingung für τ die Congruenzen

$$\sigma\tau \equiv 1 - \tau, \quad \tau(1 + \sigma) \equiv 1,$$

während

$$\sigma^{p^g + 1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{32}$$

ist. Es findet daher ein eindeutiges Entsprechen zwischen den Wurzeln

*) Journal f. Math. 86, S. 228.

der Congruenzen für τ und σ statt, wobei aber $\sigma = -1$ auszuschliessen ist. Zugleich wird

$$[\tau]^a \equiv \tau^{l(p^g-1)} \equiv \sigma^l.$$

Ist nun h der wahre Nenner des Bruches

$$\frac{l}{1+p^g} = \frac{a}{m},$$

so wird σ^l, während σ *alle* Wurzeln der Congruenz (32) durchläuft, je $(1+p^g):h$ Mal jeder der $h$ten Einheitswurzeln congruent; die Summe aller dieser Einheitswurzeln ist folglich gleich Null. Wegen des oben erwähnten Ausschlusses von $\sigma \equiv -1$ wird also

$$M(\Theta^a) = \sum [\tau]^a = -(-1)^l,$$

$$F(\Theta^a, \xi) = (-1)^l p^g = (-1)^l p^{\frac{1}{2}f}. \tag{33}$$

Eine Ausnahme bildet der Fall $p = 2$, wenn zugleich a ungerade ist. In der That sollte vorhin eigentlich diejenige Potenz von Θ ausgeschlossen werden, welche $\equiv (-1)^l \pmod{\mathfrak{p}}$ ist; diese ist aber *dann* nicht -1, sondern $+1$, wenn l, m zugleich ungerade sind. Wegen Gleichung (31) erfordert dies, dass a und p^g+1 ungerade seien, mithin $p = 2$. Ueberhaupt ist für $p = 2$ und $a\left(p^{\frac{1}{2}f}+1\right) \equiv 0 \pmod{m}$

$$F(\Theta^a, \xi) = +p^{\frac{1}{2}f}.$$

11. Wir betrachten zum Schlusse zwei einfache Beispiele.

Beispiel 1. Für $m = 15$, $p = 2$, $f = 4$ hat man die viergliedrigen Perioden

$$\eta = \Theta + \Theta^2 + \Theta^4 + \Theta^8, \quad \eta_1 = \Theta^{14} + \Theta^{13} + \Theta^{11} + \Theta^7$$

zu betrachten, welche die Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2 - \eta + 4 = 0$$

sind. Für denjenigen Primfactor $\mathfrak{p}$ von 2, für den

$$\eta \equiv 0, \ \eta_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist, wird

$$\Theta^4 + \Theta + 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{34}$$

Setzt man jetzt

$$\omega \equiv x_0 + x_1\Theta + x_2\Theta^2 + x_3\Theta^3, \pmod{\mathfrak{p}},$$

so wird

$$S(\omega) \equiv \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^8 \equiv x_3, \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Zugleich ist $[\omega] \equiv \omega$. Nimmt man also $g = 1$, so sind die Zahlen τ einfach diejenigen Potenzen von Θ, in deren mittels (34) auf den dritten Grad reducirten Ausdrücken Θ^3 einen ungeraden Coefficienten hat. Die Rechnung giebt als Exponenten dieser Potenzen

$$3,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$$

und somit für $g = 1$:

$$M(t) = (t^3 + t^6 + t^9 + t^{12}) + (t^7 + t^{11} + t^{13} + t^{14}).$$

Die besonderen Werthe sind

$$M(\Theta) = M(\Theta^2) = M(\Theta^4) = M(\Theta^8) = -\eta,$$
$$M(\Theta^7) = M(\Theta^{11}) = M(\Theta^{13}) = M(\Theta^{14}) = -\eta_1,$$
$$M(\Theta^3) = -2,$$
$$M(\Theta^5) = +2.$$

Beispiel 2. $m = 15$, $p = 19$, $f = 2$. Wählt man denjenigen Primfactor $\mathfrak{p}$, für den

$$\Theta + \Theta^4 \equiv 2,\quad \Theta^2 + \Theta^8 \equiv 9,\quad \Theta^7 + \Theta^{13} \equiv 6,\quad \Theta^{11} + \Theta^{14} \equiv 3,$$
$$\Theta^3 + \Theta^{12} \equiv 4,\quad \Theta^6 + \Theta^9 \equiv -5,\quad \Theta^5 \equiv 7,\quad \Theta^{10} \equiv -8$$

ist, so wird zugleich

$$\Theta^2 - 2\Theta + 7 \equiv 0;$$

diese Congruenz geht für

$$\Theta - 1 = \zeta$$

über in

$$\zeta^2 + 6 \equiv 0.$$

Setzt man nun $\omega = x + y\zeta$, so wird einerseits

$$\omega + \omega^p \equiv 2x,$$

andererseits

$$[\omega] \equiv \omega^{24} \equiv (x + y\zeta)^5 (x - y\zeta).$$

Die Ausführung der Rechnung liefert allgemein

$$M(t) \equiv 3(t + t^4) + (t^2 + t^8) + (t^7 + t^{13}) + (t^{11} + t^{14}) + 2(t^3 + t^{12}) + 2t^5 + t^{10},$$

und im Besondern

$$M(\Theta) = 2(\Theta + \Theta^4) - 3(\Theta^2 + \Theta^8) - 2(\Theta^7 + \Theta^{13}) - (\Theta^{11} + \Theta^{14}),$$
$$M(\Theta^3) = -1,$$
$$M(\Theta^5) = -2 + 3\Theta^5.$$

§ 4.

Arithmetische Eigenschaften der Facultäten.

In den folgenden Paragraphen bedürfen wir einiger Eigenschaften der Facultäten, die wir hier im Zusammenhange entwickeln wollen. Wir gehen aus von der Darstellung der ganzen positiven Zahl a in dem System, dessen Basis p ist; wir setzen also

(1) $$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$$

mit der Bedingung, dass $a_0, a_1, \ldots$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ sind. Bekanntlich findet man dieselben durch wiederholte Division gemäss den Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= a_0 + pq_1, \\ q_1 &= a_1 + pq_2, \\ q_2 &= a_2 + pq_3, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Aus diesen ergiebt sich unmittelbar die bekannte Gleichung

$$a - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots) = (p-1)(q_1 + q_2 + \cdots), \tag{3}$$

auf welcher u. A. die Neunerprobe beruht.

Von jetzt an sei wieder p eine Primzahl, die zunächst auch gleich Zwei sein darf; wir wollen das Verhalten des Productes $1.2 \ldots a = a!$ zu p untersuchen. Durch p theilbar sind in demselben die Factoren $p, 2p, \ldots, q_1 p$, deren Product $p^{q_1} q_1!$ ist. Das Product der übrigen Factoren ist nach p congruent

$$\big(1 . 2 \ldots (p-1)\big)^{q_1} . 1 . 2 \ldots a_0$$

oder nach dem Wilson'schen Satze congruent $(-1)^{q_1} a_0!$. Somit haben wir

$$\frac{a!}{(-p)^{q_1} q_1!} \equiv a_0! \pmod{p}.$$

Aus gleichen Gründen ist

$$\frac{q_1!}{(-p)^{q_2} q_2!} \equiv a_1! \pmod{p}$$

u. s. w. Durch Multiplication erhalten wir

$$\frac{a!}{(-p)^{q_1+q_2+\cdots}} \equiv a_0!\, a_1!\, a_2! \ldots \pmod{p}. \tag{4}$$

Damit ist nicht allein die höchste in $a!$ aufgehende Potenz von p bestimmt, welche sich schon bei Legendre findet, sondern zugleich der Rest nach der nächst höheren Potenz.

Die Gleichung (4) gestattet eine Umformung, die auf der Einführung einer primitiven $p$ten Einheitswurzel ξ beruht*). Aus der Gleichung

$$p = (1-\xi)(1-\xi^2) \ldots (1-\xi^{p-1})$$

wird bekanntlich geschlossen, dass der Quotient $p : (1-\xi)^{p-1}$ eine algebraische Einheit ist, für welche man zunächst den Ausdruck

$$1 \cdot (1+\xi)(1+\xi+\xi^2) \cdots (1+\xi+\cdots+\xi^{p-2})$$

*) Diese Umformung und der anschliessende Satz sind neu hinzugefügt.

erhält; nach dem Modul $1-\xi$ ist dieser congruent $1 \cdot 2 \ldots (p-1)$, und man hat also mit Rücksicht auf den Wilson'schen Satz

$$\frac{-p}{(1-\xi)^{p-1}} \equiv +1 \pmod{(1-\xi)}. \tag{5}$$

Dieselbe Congruenz erhält man auch, indem man die Gleichung $\xi = 1+(\xi-1)$ auf die $p$te Potenz erhebt und rechts den binomischen Satz anwendet.

Erhebt man jetzt die Congruenz (5) auf die Potenz $q_1+q_2+\cdots$ und multiplicirt sie mit (4), so erhält man

$$\frac{a!}{(1-\xi)^{a-(a_0+a_1+\cdots)}} \equiv a_0!\, a_1! \ldots \pmod{(1-\xi)}, \tag{6}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{(1-\xi)^a}{a!} \equiv \frac{(1-\xi)^{a_0}}{a_0!}\,\frac{(1-\xi_1)^{a_1}}{a_1!} \cdots \pmod{(1-\xi)^{1+a_0+a_1+\cdots}}, \tag{7}$$

In diesen Congruenzen ist der Satz enthalten, der uns in § 6 wesentliche Dienste leisten wird:

I. *Bedeutet a eine positive ganze rationale Zahl, p eine rationale Primzahl, ξ eine primitive $p$te Einheitswurzel, so ist der Bruch $\frac{(1-\xi)^a}{a!}$ gleich einem Bruche, dessen Nenner zu p theilerfremd ist.*

In dieser Form gilt der Satz auch für $a=0$; ist $a>0$, so enthält der Zähler des zweiten Bruches noch die Potenz $(1-\xi)^{a_0+a_1+\cdots}$, also genau die erste, so oft a eine genaue Potenz von p ist.

Zwischen den Werthen von $a!$, welche den Werthen $a=0, 1, \ldots, p-1$ entsprechen, bestehen noch Relationen nach dem Modul p, welche an bekannte Eigenschaften von $\Gamma(\lambda)$ erinnern, wenn λ das Intervall von 0 bis 1 durchläuft. Zunächst ist nach dem Wilson'schen Satze

$$a!\,(p-1-a)! \equiv (-1)^{1+a} \pmod{p}, \tag{8}$$

eine von Jacobi vielfach benutzte Relation.

Ist ferner a eine jener p Zahlen und q irgend eine ganze positive durch p nicht theilbare Zahl, und setzt man zur Abkürzung

$$b_0 = E\left(\frac{a}{q}\right),\quad b_1 = E\left(\frac{a+p}{q}\right),\quad \cdots,\quad b_{q-1} = E\left(\frac{a+(q-1)p}{q}\right),$$

wobei $E(x)$ die grösste x nicht übersteigende ganze Zahl bedeutet, so sind $b_0, b_1, \ldots, b_{q-1}$ ebenfalls Zahlen jener Reihe, und man kann den Bruch

$$F(a) = q^a\,\frac{b_0!\,b_1!\ldots b_{q-1}!}{a!} \tag{9}$$

nach dem Modul p vollständig bestimmen. Ist nämlich $a \geqq 1$ und k diejenige unter den Zahlen $0, 1, \ldots, q-1$, für die $a+kp$ durch q theilbar, also gleich qb_k ist, so hat man

$$E\left(\frac{a+kp}{q}\right) = E\left(\frac{a-1+kp}{q}\right) + 1,$$

während für die übrigen Zahlen i jener Reihe

$$E\left(\frac{a+ip}{q}\right) = E\left(\frac{a-1+ip}{q}\right)$$

ist. Daher ist

$$\frac{F(a)}{F(a-1)} = q \cdot \frac{b_k}{a} = \frac{a+kp}{a} \equiv 1 \pmod{p},$$

folglich auch

$$F(a) \equiv F(a-1) \pmod{p}$$

und

$$F(a) \equiv F(0) \pmod{p}. \tag{10}$$

Diese Relation lässt sich bequemer und zugleich etwas allgemeiner schreiben, wenn man für irgend einen reellen positiven Werth von x durch $P(x)$ das Product der ganzen positiven Zahlen bezeichnet, die x nicht übertreffen, also

$$P(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots E(x) \tag{11}$$

setzt; für $0 \leqq x < 1$ soll $P(x) = 0! = 1$ sein. Der Ausdruck

$$F(x) = q^{E(x)} \cdot \frac{P\left(\frac{x}{q}\right) P\left(\frac{x+p}{q}\right) \ldots P\left(\frac{x+(q-1)p}{q}\right)}{P(x)} \tag{9a}$$

ist dann, so lange $0 \leqq x < p$ bleibt, nach dem Modul p von x unabhängig, also

$$F(x) \equiv P\left(\frac{p}{q}\right) P\left(\frac{2p}{q}\right) \ldots P\left(\frac{(q-1)p}{q}\right) \pmod{p}.$$

Hier kann man, wenn q *ungerade* ist, zufolge der Gleichung

$$E\left(\frac{ip}{q}\right) + E\left(\frac{(q-i)p}{q}\right) = p - 1$$

und der Congruenz (8) die Glieder paarweise zusammenfassen, wodurch man erhält

$$F(x) \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2} + \sum E\left(\frac{ip}{q}\right)} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}\right). \tag{12}$$

Auf gleiche Weise erhält man bei geradem q

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \tfrac{p-1}{2}! \, (-1)^{\frac{q-2}{2} + \sum E\left(\frac{ip}{q}\right)} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{q-2}{2}\right) \\ &\equiv \frac{1}{\frac{p-1}{2}!} (-1)^{\frac{q}{2} + \sum E\left(\frac{ip}{q}\right)} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{q}{2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Ist die Zahl q zusammengesetzt, so lässt sich das zu q gehörige Product $F(x)$ aus den analogen zusammensetzen, welche zu den einzelnen Factoren von q gehören. Wir wollen daher jetzt q als *Primzahl* voraussetzen. Für $q = 2$ haben wir dann unmittelbar

$$(14) \qquad 2^{E(x)} P\left(\frac{x}{2}\right) P\left(\frac{x+p}{2}\right) \equiv P(x)\, P\left(\frac{p}{2}\right) \pmod{p}.$$

Bei ungeradem q dagegen bleibt noch der Factor

$$(-1)^{\sum E\left(\frac{ip}{q}\right)}$$

zu bestimmen; derselbe ist aber durch Gauss' dritten Beweis des Reciprocitätsgesetzes*) bekannt, nämlich gleich dem Restcharakter $\left(\frac{p}{q}\right)$, wobei aber der Fall $p = 2$ auszuschliessen ist, der für unsere Relationen ohne jede Bedeutung ist. Wir haben somit, wenn p, q ungerade Primzahlen sind

$$(15) \quad q^{E(x)} \cdot P\left(\frac{x}{q}\right) P\left(\frac{x+p}{q}\right) \cdots P\left(\frac{x+(q-1)p}{q}\right) \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \cdot P(x) \pmod{p}.$$

Die Beziehungen dieser Sätze zum quadratischen Reciprocitätsgesetze werde ich an anderer Stelle erörtern. Erwähnen muss ich hier noch, dass in Jacobi's Vorlesungen über Zahlentheorie 1836/7, die mir in der zweiten Hälfte der siebziger Jahre durch das Borchardt'sche Heft oder eine Abschrift desselben bekannt geworden sind, die Fälle behandelt werden, in denen $p \pm 1$ durch q theilbar ist.

§ 5.

Zur Theorie der Kreistheilung.

Um das Verständniss der allgemeinen Theorie des folgenden Paragraphen zu erleichtern, betrachten wir in dem gegenwärtigen die Factorenzerlegung der gewöhnlichen Kreistheilungsresolvente, wie sie Herr Kummer ermittelt hat, in grösster Allgemeinheit am Schlusse der Abhandlung: *„Theorie der idealen Zahlen, welche u. s. w."* Die Methode, die wir anwenden, liefert nicht allein die Kummer'schen Resultate in directerer Weise, sondern giebt auch eine Vervollständigung derselben und ist ausserdem leichter auf unsere verallgemeinerten Resolventen zu übertragen.

Sei p eine ungerade Primzahl, m ein Divisor von $p - 1 = mn$; seien ferner Θ, ξ primitive $m$te und $p$te Einheitswurzeln, $\mathfrak{p}$ ein in p aufgehendes Primideal des Körpers Ω, welcher aus der algebraischen Zahl Θ entspringt, endlich $[x]$ diejenige Potenz von Θ, welche nach

*) Werke II, S. 6.

**) Abhandl. der k. pr. Acad. d. W. 1856.

$\mathfrak{p}$ congruent ist der $n$ten Potenz der ganzen rationalen Zahl s. Statt der Resolvente

$$F(\Theta^a, \xi) = \sum_1^{p-1} [s]^a \xi^s \tag{1}$$

betrachten wir zunächst die Function einer Unbestimmten u:

$$F(\Theta^a, 1+u) = \sum_1^{p-1} [s]^a (1+u)^s.$$

Vermöge der Definition des Zeichens $[s]$ und des binomischen Lehrsatzes erhalten wir

$$F(\Theta^a, 1+u) \equiv \sum s^{an} (1+u)^s$$
$$\equiv \sum_y \frac{u^y}{y!} \sum_s s^{an} \cdot s(s-1)\ldots(s-y+1) \pmod{\mathfrak{p}},$$

wo s wie vorher die Werthe $1, 2, \ldots, p-1$, y aber die Werthe $0, 1, \ldots, p-1$ annimmt. Nehmen wir jetzt, was keine wesentliche Beschränkung einschliesst,

$$0 < a \lesseqgtr m, \tag{2}$$

so ist die ganze Function $s^{an} \cdot s(s-1)\ldots(s-y+1)$ vom Grade $an+y$ und enthält kein von s freies Glied; so lange daher $an+y<p-1$ ist, ist aus bekannten Gründen die Summe ihrer Werthe für die genannten Werthe von s durch p theilbar, während sie congruent -1 wird für $an+y=p-1$. In der Entwicklung von $F(\Theta^a, 1+u)$ sind somit die Coefficienten derjenigen Potenzen von u, deren Exponenten kleiner als $p-1-an = n(m-a)$ sind, sämmtlich durch $\mathfrak{p}$ theilbar, während der Coefficient der eben bezeichneten Potenz congruent ist $\frac{-1}{(p-1-an)!}$. Wir drücken dies durch die Congruenz aus:

$$F(\Theta^a, 1+u) \equiv -\frac{u^{p-1-an}}{(p-1-an)!} \tag{3}$$
$$\equiv (an)!\,(-u)^{p-1-an} \pmod{\mathfrak{p}, u^{p-an}}.$$

Wollen wir nun $1+u=\xi$ einsetzen, so müssen wir gleichzeitig von dem Körper Ω zu demjenigen Körper $\bar{\Omega}$ vom Grade $(p-1)\varphi(m)$ übergehen, welcher aus den Einheitswurzeln Θ, ξ entspringt. Bezeichnet $\bar{\mathfrak{o}}$ die Gesammtheit der ganzen Zahlen dieses Körpers, so ist

$$\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}^{p-1},$$

während $1-\xi$ nur die erste Potenz des neuen Primideals $\bar{\mathfrak{p}}$ enthält. Vermöge dieser Bemerkungen geht die letzte Congruenz über in

$$F(\Theta^a, \xi) \equiv (an)!\,(1-\xi)^{p-1-an} \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^{p-an}}. \tag{4}$$

Damit ist nicht allein die höchste in F aufgehende Potenz des Primideals $\bar{\mathfrak{p}}$, sondern zugleich der Rest nach der nächst höheren Potenz bestimmt.

Die übrigen Primfactoren erledigen sich leicht, indem man a durch den kleinsten *positiven* Rest $a^{(k)}$ von ak und gleichzeitig Θ durch $\Theta^{k'}$ ersetzt, wobei $kk' \equiv 1 \pmod{m}$ angenommen wird. Bezeichnet man durch $\mathfrak{p}_k$, $\bar{\mathfrak{p}}_k$ diejenigen Ideale, in welche durch diese Substitution die früheren $\mathfrak{p}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ übergehen, so erhält man

$$(5) \qquad F(\Theta^a, \xi) \equiv (a^{(k)}n)!\ (1-\xi)^{p-1-a^{(k)}n} \pmod{\bar{\mathfrak{p}}_k^{p-a^{(k)}n}}.$$

Nimmt man zu diesen Congruenzen die Gleichung

$$(6) \qquad F(\Theta^a, \xi)\, F(\Theta^{-a}, \xi^{-1}) = p$$

hinzu, so lässt sich die Frage beantworten, wie weit durch diese Bedingungen die Zahl $F(\Theta^a, \xi)$ bestimmt ist; dabei wird angenommen, dass a eine feste durch m nicht theilbare Zahl sei, indem der Fall $a \equiv 0 \pmod{m}$ sich von selbst erledigt. Giebt es neben $F(\Theta^a, \xi)$ eine zweite Zahl, welche dieselben Bedingungen befriedigt, so enthalten beide nur die Primideale $\bar{\mathfrak{p}}_k$ und jedes derselben in der gleichen Potenz; ihr Quotient ε ist daher eine algebraische Einheit, und zwar eine solche, welche mit der conjugirt imaginären das Product Eins giebt; nach einem Kronecker'schen Satze*) ist daher ε eine Wurzel aus Eins, und zwar, weil rational aus Θ, ξ gebildet, von der Form $\pm \Theta^\nu \xi^\varrho$; das doppelte Vorzeichen ist dabei überflüssig, sobald m gerade ist. Zufolge der Congruenz (4) muss aber auch $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\bar{\mathfrak{p}}}$, d. h. $\pm \Theta^\nu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ sein, was nur möglich ist, wenn $\pm \Theta^\nu = 1$ ist. Daher ist durch die Gleichung (6) und die Congruenzen (5) die complexe Zahl $F(\Theta^a, \xi)$ bis auf eine Potenz von ξ bestimmt. Nimmt man die Bedingung hinzu, dass F^m die Grösse ξ nicht enthält, so bestimmt sich auch noch diese Potenz von ξ.

Setzt man $m - a$ für a, so ergiebt sich aus (4) die Congruenz

$$(4a) \qquad F(\Theta^{-a}, \xi) \equiv (p-1-an)!\ (1-\xi)^{an} \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^{1+an}},$$

welche für $0 \gtrless a < m$ gilt. Wenn a *zwischen* 0 und m liegt, so erhält man durch Multiplication

$$F(\Theta^a, \xi)\, F(\Theta^{-a}, \xi) \equiv (an)!\ (p-1-an)!\ (1-\xi)^{p-1}$$
$$\equiv -(-1)^{an}\,(1-\xi)^{p-1} \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^p}.$$

Da die linke Seite den Werth $(-1)^{an}p$ hat, so folgt hieraus

$$p \equiv -(1-\xi)^{p-1} \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^p},$$

in Uebereinstimmung mit Formel (5) § 4.

*) Journal f. Mathematik, Bd. 53, S. 176 ff.

Unsere Formel (3) ist, von der Bezeichnung abgesehen, in einer vollständiger enenthalten, die Jacobi in der Note: *„Ueber die Kreistheilung u. s. w."**) angiebt; während aber Jacobi die Entwicklung bis zu den Gliedern mit u^{p-1} treibt, haben wir uns mit dem ersten durch p nicht theilbaren Gliede begnügt und durch die Substitution $u = \xi - 1$ die Relation (4) gewonnen, welche unmittelbarer als die Jacobi'sche die von diesem „lange vergeblich gesuchte" Analogie zwischen Resolventen und Euler'schen Integralen zweiter Gattung zum Ausdruck bringt. Unsere Congruenz liefert denn auch, ohne jede Benutzung der Jacobi'schen Zahlen ψ, die Beweise der von Jacobi a. a. O. mitgetheilten Sätze über Producte von Resolventen, wobei die auftretenden algebraischen Einheiten sich in ähnlicher Weise wie oben (S. 348) bestimmen; namentlich sei auf Jacobi's „allgemeine Formel" S. 168 hingewiesen, bei deren Beweis die Formeln (12) und (13) des § 4 Verwendung finden.

Die Congruenz (4) führt auch zur Bestimmung des Vorzeichens der Gauss'schen Summen für den einfachsten Fall. Setzt man nämlich $m = 2$, $n = \frac{p-1}{2}$, mithin $\mathfrak{p} = p$, so fällt $[s]$ mit dem Legendre'schen Zeichen $\left(\frac{s}{p}\right)$ zusammen, und jene Congruenz verwandelt sich in

$$F(-1, \xi) = \sum \left(\frac{s}{p}\right) \xi^s \equiv \tfrac{p-1}{2}! \, (1-\xi)^{\frac{p-1}{2}} \quad \left(\text{mod. } (1-\xi)^{\frac{p+1}{2}}\right),$$

während zugleich

$$F(-1, \xi)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

ist. Denselben Bedingungen genügt aber auch die Zahl

$$\Phi(\xi) = \xi^{\frac{p-1}{2}\frac{p^2-1}{8}} (1-\xi)(1-\xi^2) \cdots \left(1-\xi^{\frac{p-1}{2}}\right);$$

bezüglich der Congruenz wird dies in gleicher Weise erkannt, wie wir die Relation (5) § 4 bewiesen haben. Zunächst muss also $F(-1, \xi) = \pm \Phi(\xi)$ sein; das Vorzeichen bestimmt sich dadurch, dass der Quotient nach dem Vorhergehenden congruent $+1$ sein muss nach dem Modul $1 - \xi$. Man hat also

$$\sum \left(\frac{s}{p}\right) \xi^p = \xi^{\frac{p-1}{2}\frac{p^2-1}{8}} (1-\xi)(1-\xi^2) \cdots \left(1-\xi^{\frac{p-1}{2}}\right),$$

woraus sich alles andere in bekannter Weise ergiebt. Unser Beweis ist dem Wesen nach identisch mit dem von Herrn Kronecker**) angegebenen.

---

*) Journal f. Math. 30, S. 169.

**) Journal de math. (2) t. 1; 1856.

§ 6.

Congruenzbedingungen für die verallgemeinerten Resolventen.

Wir gehen jetzt zu der verallgemeinerten Resolvente

$$F(\Theta^a, \xi) = \sum [\omega]^a \xi^s \tag{1}$$

über, wie sie durch Gleichung (4) § 3 definirt ist; zur Abkürzung ist dabei s statt $S(\omega)$ geschrieben. Bei gegebenem a ist $F(\Theta^a, \xi)$ eine ganze Zahl desjenigen Körpers $\overline{\Omega}$ vom Grade $(p-1)\varphi(m)$, der aus den Einheitswurzeln Θ, ξ oder ihrem Producte $\Theta\xi$ entspringt, und sie enthält keine anderen Potenzen von Primidealen als solche, die in p^f aufgehen. Bezeichnet man auch hier durch $\bar{\mathfrak{o}}$ die Gesammtheit der ganzen Zahlen in $\overline{\Omega}$, so gilt wie in § 5 die Gleichung

$$\bar{\mathfrak{o}}\,\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}^{p-1}, \tag{2}$$

während $1-\xi$ die erste Potenz des neuen Primideals $\bar{\mathfrak{p}}$ enthält.

1. Was nun den ersten Factor des allgemeinen Gliedes von F anlangt, so haben wir

$$[\omega] \equiv \omega^n \pmod{\mathfrak{p}},$$

und daher nach bekannter Schlussweise

$$[\omega]^{p^f} \equiv \omega^{np^f} \pmod{\mathfrak{p}^{f+1}};$$

da aber $p^f \equiv 1 \pmod{m}$ und $[\omega]^m = 1$ ist, so wird auch

$$[\omega] \equiv \omega^{np^f} \pmod{\mathfrak{p}^{f+1}}. \tag{3}$$

Eine Vereinfachung lässt sich hier dadurch erzielen, dass man ω selbst passend auswählt. Setzt man nämlich zunächst

$$\omega^{p^f} \equiv \omega_1 \pmod{\mathfrak{p}^{f+1}},$$

so ist $\omega_1 \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}}$ und daher

$$\omega_1^{p^f} \equiv \omega^{p^f} \equiv \omega_1 \pmod{\mathfrak{p}^{f+1}}.$$

Die Congruenz

$$\omega^{p^f} \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}^{f+1}} \tag{4}$$

hat daher jedenfalls die p^f Zahlen ω_1 zu Wurzeln. Sie hat aber auch keine andern Wurzeln; denn ist ω eine solche, so ist eben nach (4) ω einer p^ften Potenz congruent. Daraus folgt:

I. *Wählt man die Zahlen ω des Restsystems so, dass sie die Congruenz* (4) *befriedigen, dann ist*

$$[\omega] \equiv \omega^n \pmod{\mathfrak{p}^{f+1}}. \tag{5}$$

Da sich ferner die Zahlen ω, von Null abgesehen, durch Multiplication reproduciren, so erhält man für jede ganze *positive* durch $p^f - 1$ nicht theilbare Zahl t die Congruenz

$$(6) \qquad \sum \omega^t \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{f+1}},$$

während in dem ausgeschlossenen Falle die Summe congruent $p^f - 1$ ist.

2. Eine genauere Bestimmung der rationalen ganzen Zahl $s = S(\omega)$ wird geliefert durch den folgenden Hilfssatz.

II. *Bezeichnet $\mathfrak{p}$ ein solches Primideal eines beliebigen Körpers Ω, dessen Norm gleich der $f$ten Potenz der rationalen Primzahl p ist, ferner $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_f)$ eine ganze und ganzzahlige cyklische Function von f Veränderlichen, und h eine ganze positive Zahl, dann ist für jede ganze Zahl ω von Ω die Zahl*

$$\Phi(\omega^{p^h}, \omega^{p^{h+1}}, \ldots, \omega^{p^{h+f-1}})$$

einer rationalen Zahl congruent nach dem Modul $\mathfrak{p}^{h+1}$.

Setzt man nämlich

$$(7) \qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_f)^p = \Phi(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_f^p) + p\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_f),$$

so ist Ψ eine Function derselben Art wie Φ. Ist daher der Satz für einen bestimmten Werth von h giltig, so sind für

$$x_1 = \omega^{p^h}, \quad x_2 = \omega^{p^{h+1}}, \ldots$$

Φ, Ψ rationalen Zahlen congruent nach $\mathfrak{p}^{h+1}$, folglich Φ^p und $p\Psi$ ebenfalls rationalen Zahlen congruent nach $\mathfrak{p}^{h+2}$; daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit unseres Satzes für $h+1$. Der Fall $h = 0$ ist bekannt; der Beweis beruht ebenfalls auf der Gleichung (7).

Wählen wir nun die Zahlen ω wieder so, dass sie die Congruenz (4) befriedigen, so erhalten wir unmittelbar den speciellen Satz:

III. *Genügen die Zahlen ω wiederum der Congruenz* (4), *dann ist die Summe*

$$(8) \qquad \omega + \omega^p + \cdots + \omega^{p^{f-1}} = \sigma$$

einer rationalen Zahl s congruent nach dem Modul $\mathfrak{p}^{f+1}$.

3. Wir wählen jetzt s überdies positiv, und entwickeln ξ^s nach Potenzen von $(\xi - 1)$ bis zu einer später zu bestimmenden Grenze, setzen also

$$\xi^s \equiv \sum_0^l \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{1.2\ldots k}(\xi-1)^k$$

$$\equiv \sum \frac{(\xi-1)^k}{k!} s(s-1)\ldots(s-k+1) \pmod{(\xi-1)^{l+1}}.$$

Diese Congruenz bleibt auch giltig für den Modul $\bar{\mathfrak{p}}^{l+1}$, wenn $\bar{\mathfrak{p}}$ das zu Anfang definirte Primideal bedeutet. Ferner ist nach Satz III. s der Summe σ congruent nach dem Modul $\mathfrak{p}^{f+1}$ oder $\bar{\mathfrak{p}}^{(f+1)(p-1)}$, während $(\xi-1)^k : k!$ nach Satz I. § 4 gleich ist einem Bruche, dessen Nenner

zu p theilerfremd ist. Daher kann man in der vorigen Darstellung von ξ^s nach dem Modul $\mathfrak{p}^{l+1}$ geradezu s durch σ ersetzen, wenn man den Exponenten l der Bedingung

$$(f+1)(p-1) > l \tag{9}$$

unterwirft. Auf diese Weise erhält man unter Benutzung bekannter Eigenschaften der Binomialcoefficienten

$$\xi^s \equiv \sum_0^l \binom{\sigma}{k} (\xi-1)^k$$

$$\equiv \sum \binom{\omega}{x_0}\binom{\omega^p}{x_1}\cdots\binom{\omega^{p^{f-1}}}{x_{f-1}} (\xi-1)^{x_0+x_1+\cdots+x_{f-1}} \pmod{\mathfrak{p}^{l+1}};$$

dabei sind $x_0, x_1, \ldots, x_{f-1}$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots$, deren Summe kleiner oder gleich l ist. Zu beachten ist hierbei, dass die einzelnen Binomialcoefficienten wie $\binom{\omega}{x}$ auch Potenzen von p im Nenner enthalten, die aber durch die hinzutretende Potenz von $(\xi-1)$ compensirt sind. Setzt man nun für eine Unbestimmte w:

$$w(w-1)\ldots(w-x+1) = \sum C_{x,y} w^{x-y} \quad (0 \leqq y \leqq x),$$

so ist $C_{x,0} = 1$, während die folgenden Coefficienten ganze Zahlen sind. Für ξ^s ergiebt sich also die Darstellung

$$\sum_x \sum_y C_{x_0,y_0} C_{x_1,y_1} \ldots \omega^{(x_0-y_0)+(x_1-y_1)p+\cdots} \frac{(\xi-1)^{x_0+x_1+\cdots}}{x_0!\, x_1! \ldots} \pmod{\mathfrak{p}^{l+1}}; \tag{10}$$

die Summationsbedingungen ergeben sich unmittelbar aus dem Vorangehenden.

4. Wir setzen nun die Werthe (5) und (10) für $[\omega]$ und ξ^s in die allgemeine Resolvente ein. Nehmen wir noch

$$0 < a \leqq m \tag{11}$$

an und bringen an in die Form

$$an = b_0 + b_1 p + \cdots + b_{f-1} p^{f-1}, \tag{12}$$

mit der Bedingung, dass $b_0, b_1, \ldots, b_{f-1}$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ seien, so wird der vollständige Exponent von ω in dem allgemeinen Glied von F:

$$t = (b_0+x_0-y_0) + (b_1+x_1-y_1)\,p + \cdots + (b_{f-1}+x_{f-1}-y_{f-1})\,p^{f-1}$$
$$= t_0 + t_1 p + \cdots + t_{f-1} p^{f-1}.$$

Die Zahlen $t_i = b_i + x_i - y_i$ sind wegen der Summationsbedingungen und der Annahme (11) nicht negativ und auch nicht sämmtlich gleich Null. Führen wir nun die Summation nach ω aus, so wird nach (6)

$\sum \omega^t$ nur dann nicht durch $\mathfrak{p}^{f+1} = \bar{\mathfrak{p}}^{(f+1)(p-1)}$ theilbar, wenn t durch $p^f - 1$ theilbar ist. Wir suchen also die allgemeinste Lösung der Congruenz

$$(13) \qquad t_0 + t_1 p + \cdots + t_{f-1} p^{f-1} \equiv 0 \pmod{(p^f - 1)},$$

aus der sich durch Multiplication mit $p, p^2, \ldots$ noch $f - 1$ ähnliche ergeben.

Setzen wir demgemäss

$$\begin{aligned} t_0 &+ t_1 p + \cdots + t_{f-1} p^{f-1} = (p^f - 1)\, u_0, \\ t_{f-1} &+ t_0 p + \cdots + t_{f-2} p^{f-1} = (p^f - 1)\, u_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1 &+ t_2 p + \cdots + t_0 \quad p^{f-1} = (p^f - 1)\, u_{f-1}, \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$t_0 = p u_{f-1} - u_0, \quad t_1 = p u_{f-2} - u_{f-1}, \ \ldots, \ t_{f-1} = p u_0 - u_1$$

als allgemeinste Lösung der Congruenz (13). Sollen die Zahlen t nicht negativ und auch nicht sämmtlich gleich Null sein, so müssen die Zahlen u *positiv* sein, also jede von ihnen mindestens gleich Eins. Dann ist aber

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_{f-1} = (p - 1)(u_0 + u_1 + \cdots + u_{f-1})$$

mindestens gleich $f(p-1)$, und dieser kleinste Werth tritt nur ein für

$$t_0 = t_1 = \cdots = t_{f-1} = p - 1.$$

Substituiren wir nun wieder $t_i = b_i + (x_i - y_i)$, so erkennen wir, dass $\sum (x_i - y_i)$ mindestens den Werth $\sum (p - 1 - b_i)$ haben muss und diesen nur dann haben kann, wenn für jeden einzelnen Werth von i

$$x_i - y_i = p - 1 - b_i$$

ist. Verfügen wir also endlich über die bisher nur der Ungleichheit (9) unterworfene Zahl l so, dass wir

$$(14) \qquad l = \sum (p - 1 - b_i) = f(p-1) - \sum b_i$$

setzen, so kommt von allen zulässigen Verbindungen der Zahlen x_i, y_i nur die einzige in Betracht, für die

$$x_i = p - 1 - b_i, \quad y_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, f-1)$$

ist. Die zugehörigen Zahlen $C_{x,y}$ sind dann alle gleich Eins, während

$$\sum \omega^t \equiv p^f - 1 \equiv -1 \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^{l+1}}$$

ist, da nach (14) sogar $l < f(p-1)$ ist. Wir haben daher

$$(15) \quad F(\Theta^a, \xi) \equiv -\frac{1}{\Pi(p-1-b_i)!}(\xi - 1)^{\Sigma(p-1-b_i)} \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^{1+\Sigma(p-1-b_i)}}$$
$$(i = 0, 1, \cdots, f-1)$$

oder auch vermöge des Wilson'schen Satzes

$$(15a) \qquad F(\Theta^a, \xi) \equiv (-1)^{f-1} \prod b_i! \, (1-\xi)^{\sum(p-1-b_i)} \left(\text{mod. } \mathfrak{p}^{1+\sum(p-1-b_i)}\right).$$

Ersetzen wir a durch $m - a$, wobei aber $0 \leqq a < m$ sein muss, und entsprechend b_i durch $p - 1 - b_i$, so folgt

$$(15b) \quad F(\Theta^{-a}, \xi) \equiv (-1)^{1+\sum b_i} \cdot \frac{1}{\prod b_i!} (1-\xi)^{\sum b_i} \quad \left(\text{mod. } \mathfrak{p}^{1+\sum b_i}\right).$$

Eine Bestätigung erhält man durch Multiplication der letzten beiden Congruenzen, wenn man auf (7b) § 3, (5) § 4 und den gleich zu entwickelnden Werth von $\sum b_i$ Rücksicht nimmt.

5. Die etwas unbequeme Definition der Zahlen b_i durch die Gleichung (12) können wir nach dem Kummer'schen Vorgang durch eine andere ersetzen. Sind nämlich für ein beliebiges *durch m nicht theilbares* a $a_0, a_1, \ldots, a_{f-1}$ die kleinsten positiven Reste von $a, ap, \ldots, ap^{f-1}$, zu denen noch $a_f = a_0$ hinzugefügt werden mag, dann können wir die Gleichung (12) durch folgendes System ersetzen:

$$\begin{aligned} a_0 n &= b_0 + b_1 p + \cdots + b_{f-1} p^{f-1}, \\ a_1 n &= b_{f-1} + b_0 p + \cdots + b_{f-2} p^{f-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{f-1} n &= b_1 + b_2 p + \cdots + b_0 p^{f-1}. \end{aligned}$$

Aus diesen aber folgt

$$n(pa_i - a_{i+1}) = (p^f - 1)\, b_{f-i-1}$$

oder

$$pa_i - a_{i+1} = m b_{f-i-1},$$

$$(16) \qquad b_{f-i-1} = E\left(\frac{pa_i}{m}\right),$$

$$(17a) \qquad \sum b_i = \sum E\left(\frac{pa_i}{m}\right) = \frac{p-1}{m} \sum a_i,$$

$$(17b) \qquad \sum b_i \equiv an \quad \left(\text{mod. } (p-1)\right),$$

$$(18) \qquad \prod b_i! = \prod P\left(\frac{pa_i}{m}\right),$$

wenn wieder $P(x)$ durch die Gleichung (11) § 4 definirt wird.

IV. *Ist a durch m nicht theilbar, und bedeutet a_i den kleinsten positiven Rest von ap^i nach m, dann ist die Resolvente* $F(\Theta^{-a}, \xi)$

genau durch die $\sum E\left(\frac{p a_i}{m}\right)$*te Potenz des Primideals* $\bar{\mathfrak{p}}$ *theilbar und ist nach der nächst höheren Potenz congruent*

$$(-1)^{1+\sum E\left(\frac{p a_i}{m}\right)} \frac{1}{\Pi\left(P\frac{p a_i}{m}\right)} (1-\xi)^{\sum E\left(\frac{p a_i}{m}\right)}.$$

6. Der Uebergang zu den conjugirten Idealen geschieht wie in § 5. Man ersetzt a durch ak, Θ durch $\Theta^{k'}$, wobei die Zahlen k, k' die Bedingung $kk' \equiv 1 \pmod{m}$ befriedigen. Sind nun $a_0^{(k)}, \ldots, a_{f-1}^{(k)}$ die kleinsten positiven Reste von $ak, \ldots, akp^{f-1}$, ferner $\mathfrak{p}_k$, $\bar{\mathfrak{p}}_k$ die Ideale der Körper Ω, $\overline{\Omega}$, in welche $\mathfrak{p}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ durch jene Veränderung übergehen, *so hat die höchste in* $F(\Theta^{-a}, \xi)$ *aufgehende Potenz von* $\bar{\mathfrak{p}}_k$ *den Exponenten*

$$(19) \quad \sum_i E\left(\frac{p a_i^{(k)}}{m}\right) = \frac{p-1}{m} \sum_i a_i^{(k)} \quad (i = 0, 1, \ldots, f-1).$$

Da allgemein $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_{kp}$ ist, so erhält man hieraus den Satz:

Durchläuft k $\varphi(m)$ *Zahlen, welche incongruent nach* m *und prim zu* m *sind, erhebt man ferner jedes der Primideale* $\bar{\mathfrak{p}}_k$ *auf die Potenz* $E\left(\frac{p a^{(k)}}{m}\right)$, *wobei* $a^{(k)}$ *den kleinsten positiven Rest von* ak *nach* m *bedeutet, so ist das Product dieser Potenzen ein Hauptideal, nämlich* $\bar{\mathfrak{o}} F(\Theta^{-a}, \xi)$. *)

Die Frage, wie weit durch die Gleichung

$$F(\Theta^a, \xi)\, F(\Theta^{-a}, \xi^{-1}) = p^f$$

und die in diesem Paragraphen hergeleiteten Congruenzbedingungen die Zahl $F(\Theta^a, \xi)$ bei gegebenem a bestimmt ist, beantwortet sich ähnlich wie die in § 5 aufgeworfene dahin, dass $F(\Theta^a, \xi)$ bis auf $p$te Einheitswurzeln bestimmt ist; aber auch diese bestimmen sich, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass F^m die Grösse ξ nicht enthält. Die letzte Folgerung gilt nicht für $p = 2$; in diesem Falle lässt sich das Vorzeichen von F auf dem angegebenen Wege nicht bestimmen.

Wenn $\sum a_i$ durch m oder, was dasselbe heisst, an durch $p-1$ theilbar ist, so tritt eine Vereinfachung insofern ein, als dann schon $F(\Theta^a, \xi)$ von ξ frei ist. Entsprechend wird dann auch $\sum b_i$ durch $p-1$ theilbar, und man kann statt des Ideales $\bar{\mathfrak{p}}$ wieder $\mathfrak{p}$ einführen.

*) Vgl. Kummer, Journal f. Math. 35, S. 364—367; 44, S. 121.

Namentlich wird also $F(\Theta^{-a}, \xi)$ genau durch $\mathfrak{p}^{\frac{1}{m}\Sigma a_i}$ theilbar und ist nach der nächst höheren Potenz von $\mathfrak{p}$ congruent

$$-(-p)^{\frac{1}{m}\Sigma a_i} \frac{1}{\Pi P\left(\frac{pa_i}{m}\right)}.$$

Als leicht zu verfolgende Beispiele seien angeführt

1) $m = 11$, $p \equiv 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$;

2) $m = 15$, $p \equiv 2$ oder $8 \pmod{15}$.

7. Die Betrachtungen, welche wir bisher in Betreff der Resolvente $F(\Theta^a, \xi)$ angestellt haben, übertragen sich mit geringen Abänderungen auf die Resolventen, welche nach § 3, 8 den verschiedenen Divisoren g von f entsprechen. Sei g ein solcher Divisor und an durch $p^g - 1$ nicht theilbar (andernfalls ist einfach $G(\Theta^a, \xi) = -1$), so wird man die Zahlen ϱ so wählen, dass sie die Congruenz

$$\varrho^{p^g} \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{p}^{g+1}} \tag{20}$$

befriedigen; dann wird

$$[\varrho] \equiv \varrho^n \pmod{\mathfrak{p}^{g+1}};$$

$$\varrho + \varrho^p + \cdots + \varrho^{p^{g-1}} = \sigma$$

aber wird einer rationalen Zahl s congruent nach demselben Modul. Setzt man nun

$$an = B_0 + B_1 p + \cdots + B_{g-1} p^{g-1} + C_0(p^g - 1), \tag{21}$$

wo $B_0, B_1, \ldots$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ sind, so wird vermöge der früheren Schlüsse

$$G(\Theta^a, \xi) \equiv (-1)^{g-1} \prod B_i! \, (1-\xi)^{\Sigma(p-1-B_i)} \pmod{\mathfrak{p}^{1+\Sigma(p-1-B_i)}}, \tag{22a}$$

$$G(\Theta^{-a}, \xi) \equiv (-1)^{1+\Sigma B_i} \frac{1}{\Pi B_i!} (1-\xi)^{\Sigma B_i} \pmod{\mathfrak{p}^{1+\Sigma B_i}}. \tag{22b}$$

Die Gleichung (21) lässt sich, da

$$\frac{n}{p^g - 1} = \frac{1 + p^g + \cdots + p^{f-g}}{m}$$

ist, auf die Form

$$\frac{a(1 + p^g + p^{2g} + \cdots + p^{f-g})}{m} = \frac{B_0 + B_1 p + \cdots + B_{g-1} p^{g-1}}{p^g - 1} + C_0$$

bringen, in welcher das erste Glied rechter Hand zwischen 0 und 1 liegt. Bezeichnet man also durch A_i den kleinsten positiven Rest von

$$a(p^i + p^{i+g} + \cdots + p^{i+f-g})$$

nach dem Modul m, so wird

$$B_{g-i-1} = \frac{pA_i - A_{i+1}}{m} = E\left(\frac{pA_i}{m}\right), \tag{23}$$

$$B_{g-i-1}! = P\left(\frac{pA_i}{m}\right), \tag{24}$$

$$\sum B_i = \frac{p-1}{m} \sum A_i. \tag{25}$$

An die Congruenzen (22) knüpfen sich analoge Betrachtungen wie früher an (15); es scheint überflüssig, bei diesen besonders zu verweilen.

§ 7.

Anwendung auf die Theorie der quadratischen Formen.

1. Nachdem die verschiedenen in § 3 definirten Resolventen vollständig in ihre idealen Primfactoren zerlegt sind, kann man natürlich dasselbe auch für beliebige Producte, bez. Quotienten leisten; insbesondere für solche, die von ξ frei sind; in jedem Falle geben unsre Formeln zugleich den Rest nach der niedrigsten in der betreffenden Zahl nicht aufgehenden Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ oder $\mathfrak{p}$. Beispielsweise sei auf Gleichung (7a) § 3 hingewiesen. Wir wollen sogleich zu solchen Producten übergehen, bei denen die verschiedenen Exponenten von Θ aus einem unter ihnen durch Multiplication mit Zahlen einer Restgruppe entspringen.

Sei also $\mathfrak{T}$ eine Gruppe von t Zahlen, die zu m theilerfremd sind und sich bis auf Vielfache von m durch Multiplication reproduciren. Sobald p dieser Restgruppe angehört, ist $t = fu$, und man kann bei geeigneter Wahl von $k_1, \ldots, k_{u-1}$ die Gruppe darstellen durch

$$\begin{array}{c} 1, \quad p, \ldots, p^{f-1}, \\ k_1, \quad k_1 p, \ldots, k_1 p^{f-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{u-1}, \; k_{u-1} p, \ldots, k_{u-1} p^{f-1}. \end{array} \tag{1}$$

Das Product

$$(-1)^{t-u} I'(\Theta^a, \xi) F(\Theta^{ak_1}, \xi) \ldots F(\Theta^{ak_{u-1}}, \xi) = T(\Theta^a, \xi) \tag{2}$$

ist eine ganze ganzzahlige Function von Θ^a und ξ; es bleibt ungeändert, wenn man Θ durch Θ^k ersetzt, falls k der Gruppe $\mathfrak{T}$ angehört. Dabei ist

$$T(\Theta^a, \xi)\; T(\Theta^{-a}, \xi^{-1}) = p^t. \tag{3}$$

Bedeutet ferner $a^{(k)}$ den kleinsten positiven Rest von ak nach m (den Fall $a \equiv 0$ schliessen wir wieder aus), so wird $T(\Theta^a, \xi)$ genau durch die

$$(4) \qquad \sum E\left(\frac{p(m-a^{(k)})}{m}\right) = \frac{p-1}{m}\sum (m-a^{(k)})$$

te Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ theilbar und ist nach der nächst höheren Potenz congruent

$$(5) \qquad \prod P\left(\frac{pa^{(k)}}{m}\right)\cdot(1-\xi)^{\frac{p-1}{m}\sum(m-a^{(k)})}.$$

In der Summe wie in dem Product durchläuft k die t Zahlen (1); aus diesen Congruenzen ist daher alles verschwunden, was sich auf den Exponenten f bezieht, zu dem p nach dem Modul m gehört. Nur der Ausdruck (2) von T ist von f abhängig; er enthält um so weniger Factoren, je grösser f ist; im Vergleich mit dem einfachsten Falle $f = 1$ sind in dem allgemeinen je f Factoren durch einen ersetzt. Das Vorzeichen $(-1)^{t-u} = (-1)^{u(f-1)}$ ist der Gleichförmigkeit halber zugefügt; besser noch wäre es vielleicht, sowohl die gewöhnliche wie unsere allgemeine Resolvente mit -1 zu multipliciren.

Ist speciell $\sum k$ durch m theilbar, so kann man in (5) $(1-\xi)^{p-1}$ durch $-p$ ersetzen.

2. Wir betrachten jetzt besonders diejenige Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}\varphi(m)$, welche in der Theorie der quadratischen Formen von negativer Determinante eine so wichtige Rolle spielt und welche Cauchy in den Noten VII, VIII des früher angeführten Mémoire*) ausführlich discutirt hat. Sei nämlich m eine Zahl, die durch keine ungerade Quadratzahl ausser 1 theilbar und ausserdem entweder $\equiv 3 \pmod 4$ oder $\equiv 4, 8 \pmod{16}$ ist; die quadratischen Formen $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2$ von der Determinante $\beta^2 - 4\alpha\gamma = -m$ sind dann nicht unter solchen von kleinerer Determinante enthalten. Setzt man nun mit Herrn Dedekind**) $(-m, p)$ gleich $0, +1, -1$, je nachdem m durch die Primzahl p theilbar oder $-m$ quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist (für $p = 2$ je nachdem $-m \equiv 1$ oder $5 \pmod 8$ ist), und ferner

$$(-m, p_1 p_2 p_3 \cdots) = (-m, p_1)(-m, p_2)\cdots,$$

so soll die Gruppe $\mathfrak{T}$ *aus denjenigen* $\frac{1}{2}\varphi(m)$ *Zahlen bestehen, für die*

$$(6) \qquad (-m, k) = +1$$

ist.

Wir beweisen zunächst nach Cauchy, dass mit Ausnahme von $m = 3, 4, 8$ stets die Summe der $\frac{1}{2}\varphi(m)$ Zahlen k durch m theilbar ist. Der Fall, in dem m eine Primzahl > 3 ist, erledigt sich un-

*) A. a. O., S. 525—588.

**) Zahlentheorie (3. Aufl.) S. 608.

mittelbar durch die Gruppeneigenschaft der k. Ist ferner q ein ungerader Primfactor von $m = qm'$, und $m' > 2$, so giebt es unter den Zahlen k je $\frac{1}{2}\varphi(m')$, welche einer bestimmten der Zahlen $1, 2, \ldots, q-1$ congruent sind nach q; daher ist

$$\sum k \equiv \tfrac{1}{2}\varphi(m')\,(1+2+\cdots+q-1) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Für $m = 4m'$, $m' \equiv 1 \pmod 4$ giebt es ebenso je $\frac{1}{2}\varphi(m')$ Zahlen k, die bez. congruent 1 oder 3 sind (mod. 4), woraus $\sum k \equiv 0 \pmod 4$ folgt. Aehnliches gilt für $m = 8m'$.

Wir wählen jetzt die Zahlen k *zwischen* 0 *und* m, und setzen

$$\sum k = mK. \tag{7}$$

Die Ergänzungen $k' = m - k$ gehören nicht der Gruppe $\mathfrak{T}$ an; setzen wir

$$\sum k' = mK', \tag{8}$$

so ist

$$K + K' = \tfrac{1}{2}\varphi(m). \tag{9}$$

Die Differenz $K' - K$ lässt sich bekanntlich auch durch Abzählung der zwischen 0 und $\frac{1}{2}m$ gelegenen Zahlen k und k' bestimmen, worauf wir hier nicht einzugehen brauchen. Dagegen entlehnen wir aus der Dirichlet'schen Theorie das Resultat, dass $K' - K$ gleich der Classenanzahl der quadratischen Formen von der Determinante $-m$, und dass also $K' > K$ ist.

Weiter ist nach Cauchy

$$\sum \Theta^k - \sum \Theta^{k'} = \sum (-m, z)\Theta^z = \sqrt{-m}. \tag{10}$$

Nun sei p eine Primzahl, welche einer der Zahlen k congruent ist. Das Product (2) ist jetzt, wenn man wieder die Fälle $m = 3, 4, 8$ ausschliesst, von ξ unabhängig und hat nur 2 verschiedene Werthe, indem

$$T(\Theta^k) = T(\Theta), \qquad T(\Theta^{k'}) = T(\Theta^{-1})$$

ist. Die Verbindungen

$$T(\Theta) + T(\Theta^{-1}), \quad \frac{T(\Theta) - T(\Theta^{-1})}{\sqrt{-m}}$$

sind daher auch von Θ unabhängig, folglich rationale Zahlen. Setzen wir demgemäss

$$T(\Theta) = \frac{A + B\sqrt{-m}}{2},$$

so sind wegen der über m gemachten Voraussetzungen A, B ganze Zahlen; zugleich ist $A + mB \equiv 0 \pmod 2$.

Unsere Relationen (3), (5) geben nun

$$4p^{\frac{1}{2}\varphi(m)} = A^2 + mB^2,$$

$$T(\Theta) \equiv (-p)^{K'} \Pi P\left(\frac{pk}{m}\right) \pmod{\mathfrak{p}^{1+K'}},$$

$$T(\Theta^{-1}) \equiv (-p)^{K} \Pi P\left(\frac{pk'}{m}\right) \pmod{\mathfrak{p}^{1+K}}.$$

Hiernach ist noch $T(\Theta)$ durch p^K theilbar. Setzen wir

$$T(\Theta) = (-p)^K \frac{C + D\sqrt{-m}}{2}, \tag{11}$$

so ist der zweite Factor eine ganze algebraische Zahl und genügt den Bedingungen

$$4p^{K'-K} = C^2 + mD^2, \tag{12}$$

$$\frac{C + D\sqrt{-m}}{2} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{K'-K}}, \tag{13}$$

$$\frac{C - D\sqrt{-m}}{2} \equiv \Pi P\left(\frac{pk'}{m}\right) \equiv (-1)^{K'-K} \frac{1}{\Pi P\left(\frac{pk}{m}\right)} \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{14}$$

aus denen noch

$$C \equiv \Pi P\left(\frac{pk'}{m}\right) \pmod p \tag{15}$$

folgt. In diesen Producten durchläuft k, bez. k' diejenigen Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, m-1$, welche prim zu m sind und die Gleichungen $(-m, k) = +1$, $(-m, k') = -1$ befriedigen; das Functionszeichen P ist durch die Gleichung (11), § 4 erklärt. Die gewonnenen Formeln leisten also für jede Primzahl p (einschliesslich $p = 2$), für die $(-m, p) = +1$ ist, dasselbe, was die von Jacobi und Cauchy gegebenen für $p \equiv 1 \pmod m$.

In speciellen Fällen kann man den Congruenzen (13), (14) andere hinzufügen, die sich auf die Primfactoren von m als Moduln beziehen. Wir behandeln hier nur den Fall, wo m *selbst eine Primzahl ist.* Dann ist

$$F(\Theta^a, \xi) \equiv F(1, \xi) \equiv -1 \quad \big(\mathrm{mod.}\,(1-\Theta)\big),$$

und folglich, wenn zunächst die Gruppe $\mathfrak{T}$ beliebig ist,

$$T(\Theta^a, \xi) \equiv (-1)^t \quad \big(\mathrm{mod.}\,(1-\Theta)\big),$$

in unserem besonderen Falle aber

$$T(\Theta^a) \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \quad \left(\text{mod. } (1-\Theta)\right) \tag{16}$$

oder

$$(-p)^K C \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \quad (\text{mod. } m) \tag{17}$$

§ 8.

Untersuchung der Eisenstein'schen Summen.

Wir wenden uns zum Schlusse nochmals zu den Eisenstein'schen Summen, welche in § 3 als Quotienten solcher Resolventen auftraten, die zu verschiedenen Divisoren des Exponenten f gehören; für den einen derselben wählen wir hier durchweg f selbst. Wenn also g einen Divisor von f bezeichnet, so haben wir wieder

$$F(\Theta^a, \xi) = -p^g M(\Theta^a)$$

oder

$$F(\Theta^a, \xi) = G(\Theta^a, \xi)\, M(\Theta^a),$$

je nachdem an durch $p^g - 1$ theilbar ist oder nicht; der triviale Fall $a \equiv 0 \pmod{m}$ ist dabei ausgeschlossen.

Nehmen wir zuerst den *zweiten* Fall, so brauchen wir neben den Resten a_i von ap^i nach dem Modul m noch die Reste der Summen $a(p^i + p^{i+g} + \cdots + p^{i+f-g})$, die wir wie in § 6 durch A_i bezeichnen wollen. Dabei ist

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{f-1} - (A_0 + \cdots + A_{g-1}) = mq, \tag{1}$$

indem q eine ganze nicht negative Zahl bedeutet. Die höchste in $M(\Theta^a)$ aufgehende Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ hat nun nach (22a), (25) § 6 den Exponenten

$$\sum(p-1-b_i) - \sum'(p-1-B_i) = (p-1)(f-g-q).$$

Da $M(\Theta^a)$ von ξ frei ist, führen wir an Stelle von $\bar{\mathfrak{p}}^{p-1}$ das Ideal $\mathfrak{p}$ ein; mit Rücksicht auf die Formel (5) § 4 ergiebt sich

$$M(\Theta^a) \equiv (-1)^q p^{f-g-q} \frac{P\left(\frac{pa_0}{m}\right) \cdots P\left(\frac{pa_{f-1}}{m}\right)}{P\left(\frac{pA_0}{m}\right) \cdots P\left(\frac{pA_{g-1}}{m}\right)} (\text{mod. } \mathfrak{p}^{(f-g-q+1)}). \tag{2}$$

Diese Formel bleibt auch im *ersten* Falle $an \equiv 0 \left(\text{mod. } (p^g - 1)\right)$ bestehen, wenn man $A_0, A_1, \ldots, A_{g-1}$ gleich Null und somit

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{f-1} = mq \tag{1a}$$

setzt. Sie gilt sogar für $a \equiv 0 \pmod{m}$, wenn man sämmtliche $a_i = 0$ setzt.

In den drei nachfolgenden Beispielen, von denen namentlich das dritte eigenen Werth haben dürfte, ist durchweg $g = 1$ angenommen.

Beispiel 1. Sei $m = 12$, $p = 12n + 5$, also $f = 2$; der Buchstabe n hat hier eine andere Bedeutung als in den früheren Paragraphen. Wegen

$$\Theta + \Theta^5 = \Theta^3 = \sqrt{-1}$$

ist $\Theta + \Theta^5$ einer rationalen Zahl congruent (mod. $\mathfrak{p}$); durch die Wahl der Congruenzwurzel ist der Primfactor bestimmt. Wir bestimmen $M(\Theta^a)$ für beliebige Werthe von a, nicht bloss für diejenigen, welche prim zu 12 sind. Zunächst ist

$$M(\Theta^0) = p.$$

Da ferner $6p \equiv 6 \pmod{12}$ und $6 + 6 = 1 \cdot 12$ ist, wird

$$M(\Theta^6) \equiv -\frac{p-1}{2}!\ \frac{p-1}{2}! \equiv +1 \pmod{\mathfrak{p}};$$

weil aber

$$M(\Theta^6)\, M(\Theta^{-6}) = M(\Theta^6)^2 = p^{f-2} = 1$$

ist, wird

$$M(\Theta^6) = +1.$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$M(\Theta^4) = M(\Theta^8) = -1,$$
$$M(\Theta^2) = M(\Theta^{10}) = +1.$$

Dieselben Werthe erhält man auch aus Formel (33) § 3.

Für $a = 3$ hingegen ist $3p \equiv 3$, also $a_0 = a_1 = 3$, $A_0 = 6$, $q = 0$, während für $a = 9$, $a_0 = a_1 = 9$, $A_0 = 6$, $q = 1$ wird. Man hat somit

$$M(\Theta^3)\, M(\Theta^9) = p,$$
$$M(\Theta^3) \equiv p\,\frac{(3n+1)!\,(3n+1)!}{(6n+2)!} \pmod{\mathfrak{p}^2}$$
$$\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$
$$M(\Theta^9) \equiv \frac{(6n+2)!}{(3n+1)!\,(3n+1)!} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Es sind also $M(\Theta^3)$, $M(\Theta^9)$ die beiden conjugirten Primfactoren von p nach der Gauss'schen Theorie, und es erübrigt noch, ihr Verhältniss zu den durch die Kreistheilung definirten Primfactoren zu bestimmen. Letztere werden gewöhnlich bestimmt durch die Relationen

$$(A + B\Theta^3)(A + B\Theta^9) = p,$$
$$A + B\Theta^3 \equiv 0,$$
$$A + B\Theta^9 \equiv -\frac{\frac{p-1}{2}!}{\frac{p-1}{4}!\ \frac{p-1}{4}!} \pmod{\mathfrak{p}}.$$
$$A \equiv -1 \pmod{4}.$$

Durch Vergleichung der beiderseitigen Bedingungen findet sich

$$M(\Theta^3) = -(A+B\Theta^3).$$

Nimmt man endlich $a = 1$, so wird zunächst $M(\Theta) = M(\Theta^5)$, hängt also nur von der vierten Einheitswurzel Θ^3 ab. Da

$$\left.\begin{aligned} &M(\Theta)\,.\,M(\Theta^{11}) = p,\\ &M(\Theta) \equiv 0,\\ &M(\Theta^{11}) \equiv \tfrac{(6n+2)!}{n!\,(5n+2)!} \end{aligned}\right\} \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist, so muss

$$M(\Theta) = (A+B\Theta^3)\Theta^{3h}$$

sein. Um die Einheitswurzel Θ^{3h} genauer zu bestimmen, benutzen wir die Relation (15) des § 4 für $q = 3$, $x = \frac{p}{4}$, und erhalten

$$3^{3n+1}n!\,(5n+2)!\,(9n+3)! \equiv (3n+1)! \pmod{p}$$

oder auch

$$(-3)^{3n+1}n!\,(5n+2)! \equiv -(3n+1)!\,(3n+1)! \pmod{p}.$$

Dadurch wird aber

$$M(\Theta^{11}) \equiv (-3)^{3n+1}(A+B\Theta^9) \pmod{\mathfrak{p}}$$

oder

$$\Theta^{-3h} \equiv (-3)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Die Potenz von $\Theta^3 = \sqrt{-1}$, welche der $\frac{p-1}{4}$ten Potenz einer Zahl congruent ist nach $\mathfrak{p}$, ist geradezu der biquadratische Restcharakter dieser Zahl; wir bezeichnen ihn durch doppelte Klammern, da er von unserm Charakter $[\omega]$ durchaus verschieden ist. Wir haben also endlich

$$\Theta^{-3h} = \left(\left(\tfrac{-3}{\mathfrak{p}}\right)\right),$$

$$M(\Theta) = \left(\left(\tfrac{-3}{\mathfrak{p}}\right)\right)^3(A+B\Theta^3). \tag{3}$$

Eine Prüfung der gewonnenen Resultate und zugleich eine Bestimmung des Restcharakters $\left(\left(\frac{-3}{\mathfrak{p}}\right)\right)$ ergiebt sich aus den Congruenzen

$$M(\Theta^a) + M(\Theta^{a+4}) + M(\Theta^{a+8}) \equiv 0 \pmod{3}, \tag{4}$$

$$M(\Theta^a) + M(\Theta^{a+3}) + M(\Theta^{a+6}) + M(\Theta^{a+9}) \equiv 0 \pmod{4}, \tag{5}$$

die man leicht aus der Ganzzahligkeit der Coefficienten von $M(t)$ ableitet. Namentlich liefert die erste derselben für $a = 3$ die Congruenz

$$(A+B\Theta^3) + \left(\left(\tfrac{-3}{\mathfrak{p}}\right)\right)(A+B\Theta^9) \equiv 0 \pmod{3},$$

die durch Multiplication mit $A + B\Theta^3$ übergeht in

$$\left(\left(\frac{-3}{\mathfrak{p}}\right)\right) \equiv (A+B\Theta^3)^2 \pmod 3,$$

wie es das Reciprocitätsgesetz der biquadratischen Reste verlangt.

Beispiel 2. Sei jetzt $m = 12$, $p = 12n+7$, $f = 2$, $g = 1$. Hier hängt $M(\Theta) = M(\Theta^7) = M(-\Theta)$ nur von Θ^2, also im Grunde von dritten Einheitswurzeln ab, und ebenso alle $M(\Theta^a)$. Wir führen daher sogleich denjenigen Primfactor $(A+B\Theta^4)$ von p ein, welcher in der Kreistheilung auftritt und durch die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} A+B\Theta^4 &\equiv 0 \\ A+B\Theta^8 &\equiv -\frac{\frac{2p-2}{3}!}{\frac{p-1}{3}!\,\frac{p-1}{3}!} \\ A+B\Theta^4 &\equiv -1 \pmod 3 \end{aligned}\right\} \pmod{\mathfrak{p}},$$

bestimmt ist.

Man hat im gegenwärtigen Falle

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^n \pmod p,$$

$$[2] \equiv 2^{\frac{p-1}{3}(8n+2)} \equiv 2^{2\frac{p-1}{3}} \pmod{\mathfrak{p}},$$

und ferner nach (14), § 4 für $x = \frac{p}{6}$, bez. $\frac{p}{3}$ die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} 2^{2n+1}\,.\qquad & n!\,(7n+4)! \equiv (2n+1)!\,(6n+3)! \\ 2^{4n+2}\,.\,(2n+1)!\,(8n+4)! &\equiv (4n+2)!\,(6n+3)! \end{aligned}\right\} \pmod p,$$

aus denen noch

$$2^{6n+3}\,.\,n!\,(7n+4)!\,(8n+4)! \equiv (4n+2)! \pmod p$$

folgt. Durch ähnliche Schlüsse wie im vorigen Beispiel findet man mit Hilfe dieser Relationen

$$\begin{aligned} &M(\Theta^6) = -1, \\ &M(\Theta^3) = (-1)^{n+1} = \left(\frac{-2}{p}\right), \\ &M(\Theta^4) = -(A+B\Theta^4), \\ &M(\Theta^2) = [2]^2(A+B\Theta^4), \qquad M(\Theta^{10}) = [2](A+B\Theta^8), \\ &M(\Theta) = \left(\frac{2}{p}\right)(A+B\Theta^4). \end{aligned}$$

Zur Prüfung dienen die Congruenzen (4), (5), welche zugleich eine Bestimmung des Restcharakters [2] liefern. Namentlich giebt die zweite derselben für $a = 1$

$$(A+B\Theta^4) + [2](A+B\Theta^8) \equiv 0 \pmod 4,$$

wofür man auch

$$[2](A+B\Theta^4)+[2]^2(A+B\Theta^8)\equiv 0 \pmod 4$$

schreiben kann. Daraus folgt zunächst

$$[2]\equiv(A+B\Theta^4)^2 \pmod 2,$$

im Einklang mit dem cubischen Reciprocitätsgesetze, wenn man die abweichende Bedeutung von [2] berücksichtigt. Ausserdem lehren jene Congruenzen, dass $[2](A+B\Theta^4)$ auf die Form $C+D\sqrt{-3}$ gebracht werden kann, und dass dann C gerade ist; letzteres folgt auch aus

$$p=C^2+3D^2\equiv 3 \pmod 4.$$

Beispiel 3. Wir nehmen $m=15$, $p=15n+4$, $f=2$. Zunächst erhalten wir in bekannter Weise

$$M(\Theta^3)=-1.$$

Dagegen ist $M(\Theta^5)M(\Theta^{10})=p$, und die Factoren hängen nur von dritten Einheitswurzeln ab. Bedeutet wieder $A+B\Theta^5$ denjenigen Primfactor von p, welcher durch $\mathfrak{p}$ theilbar und dabei $\equiv -1 \pmod 3$ ist, so giebt unsre Congruenz (2) in bekannter Weise

$$M(\Theta^5)=-(A+B\Theta^5).$$

Für $M(\Theta)$ und die conjugirten Zahlen aber haben wir die Gleichungen

$$M(\Theta)\,M(\Theta^{14})=M(\Theta^2)\,M(\Theta^{13})=p \tag{6}$$

nebst den Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} M(\Theta)&=M(\Theta^4)\equiv p\,\frac{n!\,(4n+1)!}{(5n+1)!}\\ M(\Theta^2)&=M(\Theta^8)\equiv p\,\frac{(2n)!\,(5n+1)!}{(7n+1)!}\end{aligned}\right\}\pmod{\mathfrak{p}^2},$$

$$\left.\begin{aligned} M(\Theta^7)&=M(\Theta^{13})\equiv\frac{(7n+1)!}{(2n)!\,(5n+1)!}\\ M(\Theta^{11})&=M(\Theta^{14})\equiv\frac{(5n+1)!}{n!\,(4n+1)!}\end{aligned}\right\}\pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ersetzt man Θ durch Θ^2, wodurch $\mathfrak{p}$ in eines der drei andern Primideale übergeht, durch die p theilbar ist, so ergiebt sich, dass $M(\Theta)$, $M(\Theta^2)$ durch dieselben zwei Primideale $\mathfrak{p}(\Theta)$, $\mathfrak{p}(\Theta^2)$ theilbar, mithin associirt sind; der Quotient $\varepsilon(\Theta)$ muss wegen (6) eine einfache Einheit, d. h. eine Potenz von $-\Theta$, sein und zugleich wegen $M(\Theta)=M(\Theta^4)$ die Gleichung $\varepsilon(\Theta)=\varepsilon(\Theta^{-2})$ befriedigen; er muss also eine dritte oder sechste Einheitswurzel sein. Die Bestimmung derselben wird durch die Congruenz (15), § 4 ermöglicht, wenn man in derselben $q=5$, $x=\frac{p}{3}$ setzt; man erhält auf diese Weise

$$5^{5n+1}\cdot n!\,(4n+1)!\,(7n+1)!\,(10n+2)!\,(13n+3)!\equiv(5n+1)!$$

oder einfacher

$$5^{5n+1}n!\,(4n+1)!\,(7n+1)!\equiv(2n)!\,(5n+1)!\,(5n+1)! \pmod p.$$

Daher wird

$$\frac{M(\Theta^5)}{M(\Theta)} \equiv 5^{5n+1} = 5^{\frac{p-1}{3}} \equiv [5] \pmod{\mathfrak{p}}$$

oder vielmehr

$$M(\Theta^5) = [5]\,M(\Theta).$$

Somit bleibt $[5]^2 M(\Theta)$ ungeändert, wenn man Θ durch Θ^2, Θ^4, Θ^8 ersetzt und lässt sich durch die Perioden

$$\Theta + \Theta^2 + \Theta^4 + \Theta^8, \quad \Theta^{14} + \Theta^{13} + \Theta^{11} + \Theta^7$$

linear ausdrücken, deren Werthe $\frac{1+\sqrt{-15}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{-15}}{2}$ sind. Da die Form $x^2 + 15y^2$ für ungerade Werthe von x und y durch 8 theilbar ist, erkennt man leicht, dass

$$[5]^2 M(\Theta) = C + D\sqrt{-15}$$

sein muss; vollständiger hat man

$$C+D\sqrt{-15} = [5]^2 M(\Theta) = [5]M(\Theta^2) = [5]^2 M(\Theta^4) = [5]M(\Theta^8),$$
$$C-D\sqrt{-15} = [5]^2 M(\Theta^7) = [5]M(\Theta^{11}) = [5]^2 M(\Theta^{13}) = [5]M(\Theta^{14}).$$

Für die Zahlen C, D erhält man nun zunächst die Relationen

$$(7) \qquad \left.\begin{aligned} C^2 + 15D^2 &= p, \\ C + D\sqrt{-15} &\equiv 0, \\ C - D\sqrt{-15} &\equiv [5]\,\tfrac{(5n+1)!}{n!\,(4n+1)!} \end{aligned}\right\} \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$(8) \qquad 2C \equiv 5^{\frac{p-1}{3}}\,\frac{(5n+1)!}{n!\,(4n+1)!} \pmod{p}.$$

Weitere Bedingungen folgen aus den Congruenzen

$$M(\Theta) + M(\Theta^6) + M(\Theta^{11}) \equiv 0 \pmod 3,$$
$$M(\Theta) + M(\Theta^4) + M(\Theta^7) + M(\Theta^{10}) + M(\Theta^{13}) \equiv 0 \pmod 5,$$

die man auf gleichem Wege wie (4), (5) in Beispiel 1 erschliesst. Die erste derselben liefert, da jedenfalls

$$1 + [5] + [5]^2 \equiv 0, \quad ([5] - [5]^2)\sqrt{-15} \equiv 0 \pmod 3$$

ist, nur eine Bedingung

$$(9) \qquad C \equiv -1 \pmod 3;$$

die zweite aber, welche die Form

$$[5]\,C \equiv -(A + B\Theta^{10}) \pmod 5$$

annimmt, lässt sich in zwei spalten, indem man sie quadrirt und cubirt. Mit Rücksicht auf

$$C^2 = p - 15D^2 \equiv -1 \pmod 5$$

wird

$$[5]^2 \equiv -(A + B\Theta^{10})^2$$

oder

$$[5] \equiv -(A+B\Theta^5)^2 \pmod 5, \tag{10}$$

in Uebereinstimmung mit dem cubischen Reciprocitätsgesetze. Zugleich aber muss

$$C \equiv (A+B\Theta^{10})^3 \pmod 5 \tag{11}$$

sein. — Nun ist

$$p = (A+B\Theta^5)(A+B\Theta^{10}) \equiv (A+B\Theta^5)^6 \equiv -1 \pmod 5,$$

also $A+B\Theta^5$ eine der sechs Wurzeln der Congruenz $\omega^6 \equiv -1$, welche sich in zwei Reihen von je dreien ordnen:

$$\begin{array}{ccc} 2, & 2\Theta^5, & 2\Theta^{10}, \\ -2, & -2\Theta^5, & -2\Theta^{10}; \end{array}$$

wir haben also das Resultat:

Je nachdem $A+B\Theta^5$ einer Zahl der ersten, zweiten oder dritten Colonne dieser Tabelle congruent ist (mod. 5), *ist der cubische Restcharakter* [5] *gleich* $1, \Theta^{10}, \Theta^5$; *dagegen ist C congruent* -2 *oder* $+2$ (mod. 5), *je nachdem $A+B\Theta^5$ einer Zahl der ersten oder zweiten Zeile congruent ist nach demselben Modul.*

Freiburg i. Br., 31. März 1890.

Ueber gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen.

Von

L. Kiepert in Hannover.

In meiner Abhandlung „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade" (Math. Ann., Band 32, S. 1—135) habe ich *Parameter* von der Form

$$\xi = L(D_1)^{\delta_1} L(D_2)^{\delta_2} L(D_3)^{\delta_3} \ldots$$

eingeführt, welche den Vorzug besitzen, dass ihr *Charakter* eine verhältnissmässig kleine Zahl ist, d. h. man kann die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ so bestimmen, dass der Grad einer Gleichung zwischen zwei solchen Parametern ξ und η in Bezug auf jeden von ihnen wesentlich niedriger wird als z. B. der Grad der Jacobi'schen Modulargleichungen.

Die Vereinfachung, welche sich daraus für die Transformation n^{ten} Grades ergiebt, kann noch weiter geführt werden, wenn man bei der Wahl der Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ erst in *zweiter* Linie darauf achtet, dass der *Charakter* möglichst klein wird, während man es in *erster* Linie zu erreichen sucht, dass zwischen den verschiedenen Wurzeln der Parametergleichung *Relationen* bestehen. Dadurch gelingt es dann, die Parametergleichung zwischen ξ und η durch eine Gleichung zwischen x und y zu ersetzen, wobei x eine rationale Function von ξ, und y eine rationale Function von η ist. Diese Gleichung zwischen x und y ist bedeutend einfacher und kann deshalb auch viel leichter gefunden werden. Der tiefere Einblick in den Bau der Parametergleichung, welcher sich von selbst daraus ergiebt, fördert auch beträchtlich die Anwendungen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen.

Aus dem Gesagten ersieht man schon, dass die hier folgenden Untersuchungen eine Fortsetzung der oben citirten Abhandlung sind. Um den Anschluss zu erleichtern, empfiehlt es sich daher wohl, fortlaufende Nummern der Abschnitte, Paragraphen und Gleichungen zu benutzen und beide Abhandlungen am Schlusse durch ein kurz gefasstes Inhaltsverzeichniss zu einer zu verschmelzen.

Dritter Theil.

Vereinfachung der Parametergleichungen.

XII. Abschnitt.

Beziehungen zwischen den verschiedenen Wurzeln einer Parametergleichung.

§ 54.

Vereinfachungen bei beliebiger Zusammensetzung des Transformationsgrades.

Es sei D' irgend ein Theiler von n, und der Parameter ξ mit dem Charakter ch habe die Eigenschaft, dass er in

$$\xi' = \frac{a}{\xi} \tag{517}$$

übergeht, wenn man ω mit $\frac{\omega}{D'}$ vertauscht. Dass es solche Parameter wirklich giebt, wird in den späteren Paragraphen gezeigt werden. Ferner habe der Parameter η mit dem Charakter 2β die Eigenschaft, dass er bei dieser Vertauschung *unverändert* bleibt, dass also

$$\eta' = \eta \tag{518}$$

wird. Die Parametergleichung zwischen ξ und η hat dann die Form

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0} (c_{\nu,2\beta}\xi^{2\beta} + c_{\nu,2\beta-1}\xi^{2\beta-1} + \cdots + c_{\nu,1}\xi + c_{\nu,0})\eta^\nu = 0, \tag{519}$$

oder wenn man durch ξ^β dividirt,

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0} \left(c_{\nu,2\beta}\xi^\beta + c_{\nu,2\beta-1}\xi^{\beta-1} + \cdots + \frac{c_{\nu,1}}{\xi^{\beta-1}} + \frac{c_{\nu,0}}{\xi^\beta}\right)\eta^\nu = 0. \tag{519a}$$

Diese Gleichung bleibt richtig, wenn man ξ mit ξ' und η mit η' vertauscht, weil ξ' und η' zu demselben primitiven Periodenpaare $\frac{2\omega}{D'}$, $2\omega'$ gehören; d. h. die Gleichung (519a) bleibt noch richtig, wenn man ξ mit $\frac{a}{\xi}$ vertauscht. Dies giebt

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0} \left(c_{\nu,2\beta}\frac{a^\beta}{\xi^\beta} + c_{\nu,2\beta-1}\frac{a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu,1}\xi^{\beta-1}}{a^{\beta-1}} + \frac{c_{\nu,0}\xi^\beta}{a^\beta}\right)\eta^\nu = 0. \tag{520}$$

Die beiden Gleichungen (519a) und (520) müssen, von einem constanten Factor C abgesehen, mit einander übereinstimmen, es muss also

$$c_{\nu,2\beta-\varkappa}\cdot a^{\beta-\varkappa} = C\cdot c_{\nu,\varkappa} \quad \text{und} \quad \frac{c_{\nu,\varkappa}}{a^{\beta-\varkappa}} = C\cdot c_{\nu,2\beta-\varkappa}$$

sein. Daraus folgt durch Multiplication

$$C^2 = 1, \quad \text{oder} \quad C = \pm 1. \tag{521}$$

Die Gleichung (519a) reducirt sich daher auf

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0}\left[c_{\nu,2\beta}\left(\xi^\beta \pm \frac{a^\beta}{\xi^\beta}\right) + c_{\nu,2\beta-1}\left(\xi^{\beta-1} \pm \frac{a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{c_{\nu,\beta}}{2}(1\pm 1)\right]\eta^\nu = 0. \tag{522}$$

Wenn in dieser Gleichung das *untere* Vorzeichen zu nehmen wäre, so könnte man den Factor $\xi - \frac{a}{\xi}$ absondern. Dadurch würde aber der Grad der Parametergleichung in Bezug auf ξ um *zwei* Einheiten verkleinert, und η hätte nicht den Charakter 2β sondern $2\beta - 2$. Dies widerstreitet der Voraussetzung, folglich gilt das *obere* Vorzeichen, und die Gleichung (522) geht über in eine Gleichung zwischen

$$x = \xi + \frac{a}{\xi} \quad \text{und} \quad \eta,$$

welche in Bezug auf x nur noch den Grad β hat. Setzt man nämlich

$$\xi + \frac{a}{\xi} = x, \quad \xi^2 + \frac{a^2}{\xi^2} = x_2, \quad \xi^3 + \frac{a^3}{\xi^3} = x_3, \cdots, \tag{523}$$

so ist bekanntlich $x_\varkappa$ eine ganze rationale Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von x, und die Gleichung (522) geht über in

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0}(c_{\nu,2\beta}x_\beta + c_{\nu,2\beta-1}x_{\beta-1} + \cdots + c_{\nu,\beta+1}x + c_{\nu,\beta})\eta^\nu = 0. \tag{522a}$$

Es kann auch der Fall vorkommen, dass bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{D'}$ die Parameter ξ und η bezw. in

$$\xi' = \frac{a}{\xi} \quad \text{und} \quad \eta' = -\eta$$

übergehen; dann wird die Gleichung (519a) die Form

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0}(-1)^\nu\left(c_{\nu,2\beta}\frac{a^\beta}{\xi^\beta} + c_{\nu,2\beta-1}\frac{a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu,1}\xi^{\beta-1}}{a^{\beta-1}} + \frac{c_{\nu,0}\xi^\beta}{a^\beta}\right)\eta^\nu = 0 \tag{524}$$

erhalten. Daraus folgt

$$(-1)^\nu c_{\nu,2\beta-\varkappa}\cdot a^{\beta-\varkappa} = C\cdot c_{\nu,\varkappa}, \quad (-1)^\nu\frac{c_{\nu,\varkappa}}{a^{\beta-\varkappa}} = C\cdot c_{\nu,2\beta-\varkappa},$$

also

$$C^2 = 1, \quad C = \pm 1, \quad (-1)^\nu c_{\nu,2\beta-\varkappa}\cdot a^{\beta-\varkappa} = \pm c_{\nu,\varkappa}. \tag{525}$$

Die Gleichung (519a) reducirt sich daher in diesem Falle auf

$$(526)\quad \sum_{\nu=ch}^{\nu=0}\left[c_{\nu,2\beta}\left(\xi^\beta \pm \frac{(-1)^\nu a^\beta}{\xi^\beta}\right)+c_{\nu,2\beta-1}\left(\xi^{\beta-1}\pm\frac{(-1)^\nu a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}}\right)+\cdots\right]\eta^\nu=0.$$

Setzt man jetzt

$$(527)\qquad \xi-\frac{a}{\xi}=\bar{x},\quad \xi^2-\frac{a^2}{\xi^2}=\bar{x}_2,\quad \xi^3-\frac{a^3}{\xi^3}=\bar{x}_3,\cdots$$

und bezeichnet man in dem Folgenden mit $F_{\lambda,\mu}(u,v)$ eine ganze rationale Function von u und v, welche in Bezug auf u höchstens vom Grade λ und in Bezug auf v höchstens vom Grade μ ist, so nimmt die Gleichung (526) für $ch=2\alpha$ entweder die Form

$$(528)\qquad F_{\beta,\alpha}(x,\eta^2)+\bar{x}\eta F_{\beta-1,\alpha-1}(x,\eta^2)=0,$$

oder

$$(528a)\qquad \bar{x}F_{\beta-1,\alpha}(x,\eta^2)+\eta F_{\beta,\alpha-1}(x\eta^2)=0$$

an, jenachden das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

Für $ch=2\alpha+1$ würde man erhalten entweder

$$(529)\qquad \bar{x}\eta F_{\beta-1,\alpha}(x,\eta^2)+F_{\beta,\alpha}(x,\eta^2)=0,$$

oder

$$(529a)\qquad \eta F_{\beta,\alpha}(x,\eta^2)+\bar{x}F_{\beta-1,\alpha}(x,\eta^2)=0.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo *gleichzeitig* auf den zweiten Parameter η ähnliche Schlüsse angewendet werden können wie auf ξ. Dabei möge der Charakter von ξ eine *gerade* Zahl sein; es sei also

$$ch=2\alpha.$$

Ist dann D'' gleichfalls ein Theiler von n, und haben die Parameter ξ und η bezw. die Eigenschaft, dass sie bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{D''}$ in

$$\xi''=+\xi \text{ und } \eta''=\frac{b}{\eta}$$

übergehen, so reducirt sich die Gleichung (519) auf eine Gleichung zwischen ξ und $y=\eta+\frac{b}{\eta}$, welche in Bezug auf y nur noch den Grad α hat.

Gehen dagegen bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{D''}$ die Parameter ξ und η bezw. in

$$\xi''=-\xi \text{ und } \eta''=\frac{b}{\eta}$$

über, und setzt man

$$(530)\quad \begin{cases} \eta + \frac{b}{\eta} = y, & \eta^2 + \frac{b^2}{\eta^2} = y_2, & \eta^3 + \frac{b^3}{\eta^3} = y_3, \cdots, \\ \eta - \frac{b}{\eta} = \bar{y}, & \eta^2 - \frac{b^2}{\eta^2} = \bar{y}_2, & \eta^3 - \frac{b^3}{\eta^3} = \bar{y}_3, \cdots, \end{cases}$$

so reducirt sich die Gleichung (519) entweder auf

$$(531)\qquad F_{\beta,\alpha}(\xi^2, y) + \xi\bar{y}F_{\beta-1,\alpha-1}(\xi^2, y) = 0,$$

oder auf

$$(531a)\qquad \bar{y}F_{\beta,\alpha-1}(\xi^2, y) + \xi F_{\beta-1,\alpha}(\xi^2, y) = 0.$$

Man hat daher die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

I. $\xi' = \frac{a}{\xi}, \quad \eta' = +\eta; \quad \xi'' = +\xi, \quad \eta'' = \frac{b}{\eta};$

II. $\xi' = \frac{a}{\xi}, \quad \eta' = -\eta; \quad \xi'' = +\xi, \quad \eta'' = \frac{b}{\eta};$

III. $\xi' = \frac{a}{\xi}, \quad \eta' = +\eta; \quad \xi'' = -\xi, \quad \eta'' = \frac{b}{\eta};$

IV. $\xi' = \frac{a}{\xi}, \quad \eta' = -\eta; \quad \xi'' = -\xi, \quad \eta'' = \frac{b}{\eta}.$

Im Falle I kann man die Parametergleichung zwischen ξ und η auf die Form

$$(532)\qquad F_{\beta,\alpha}(x, y) = 0$$

bringen; in den Fällen II, III und IV tritt eine entsprechende Vereinfachung ein, die Form der Gleichung ist aber noch davon abhängig, ob α und β gerade oder ungerade sind. Ausserdem bleibt es bei den allgemeinen Betrachtungen noch unentschieden, ob für $\xi' = \frac{a}{\xi}$ und $\eta' = -\eta$ die Gleichung (528) oder die Gleichung (528a) gilt; und ebenso bleibt es unentschieden, ob für $\xi'' = -\xi$, $\eta'' = \frac{b}{\eta}$ die Gleichung (531) oder die Gleichung (531a) gilt. Dadurch findet man

im Falle II 4 mögliche Formen der Gleichung,
„ „ III 4 „ „ „ „ „
„ „ IV 16 „ „ „ „ .

Es würde zu weit führen, alle diese Formen hier anzugeben; es möge nur noch erwähnt werden, dass diese Unentschiedenheit bei den hier folgenden Anwendungen von selbst fortfällt. Es ergeben sich nämlich aus der Entwickelung von x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{n}}$ noch weitere Reductionen, und zwar verschwinden, wie man schon aus dem *ersten* Gliede dieser Entwickelungen erkennt, so viele Coefficienten in der Parametergleichung, dass immer nur eine einzige passende Gleichungsform übrig bleibt.

§ 55.

Anwendung auf den Fall $n = a^2$.

Es sei a eine Primzahl und $n = a^2$, dann wird

$$\xi = L(a)^{\delta_1} L(n)^{\delta_2} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^{\delta_1} Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\delta_2}}{Q(\varpi, \varpi')^{\delta_1+\delta_2}}. \tag{533}$$

Der Charakter von ξ ergiebt sich dabei nach den Angaben in § 10 aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -a(a-1)\delta_1 - (a^2-1)\delta_2 &= 24k_0, \\ +(a-1)^2\delta_1 + \quad 0 \quad &= 24k_1, \\ +(a-1)\,\delta_1 + (a^2-1)\delta_2 &= 24k_2. \end{aligned}$$

Setzt man $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \varkappa$, so wird

$$\xi = L(n)^{\varkappa} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\varkappa}}{Q(\varpi, \varpi')^{\varkappa}}, \tag{534}$$

$$-(a^2-1)\varkappa = 24k_0, \quad 0 = 24k_1, \quad (a^2-1)\varkappa = 24k_2. \tag{535}$$

Für positive Werthe von $\varkappa$ hat also ξ den Charakter

$$ch = k_2. \tag{536}$$

Dies giebt

$$\begin{cases} \text{für } a = 2, & \varkappa = 8, & ch = 1, \\ \text{„ } a = 3, & \varkappa = 3, & ch = 1, \\ \text{„ } a = 12\nu+1, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2+\nu, \\ \text{„ } a = 12\nu+5, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2+5\nu+1, \\ \text{„ } a = 12\nu+7, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2+7\nu+2, \\ \text{„ } a = 12\nu+11, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2+11\nu+5. \end{cases} \tag{537}$$

Setzt man dagegen $\delta_1 = 2\lambda$, $\delta_2 = -\lambda$, so erhält man den Parameter

$$\eta = \frac{L(a)^{2\lambda}}{L(n)^{\lambda}} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^{2\lambda}}{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\lambda} Q(\varpi, \varpi')^{\lambda}}, \tag{538}$$

$$\begin{cases} -(a-1)^2\lambda = 24k_0, \\ +2(a-1)^2\lambda = 24k_1, \\ -(a-1)^2\lambda = 24k_2. \end{cases} \tag{539}$$

Bezeichnet man also den Charakter von η mit 2β, so erhält man

$$(540)\quad \begin{cases} \text{für } a = 2, & \lambda = 24, \quad \beta = 1, \\ \text{„ } a = 3, & \lambda = 6, \quad \beta = 1, \\ \text{„ } a = 12\nu + 1, & \lambda = 1, \quad \beta = 6\nu^2, \\ \text{„ } a = 12\nu + 5, & \lambda = 3, \quad \beta = 18\nu^2 + 12\nu + 2, \\ \text{„ } a = 12\nu + 7. & \lambda = 2, \quad \beta = 12\nu^2 + 12\nu + 3, \\ \text{„ } a = 12\nu + 11, & \lambda = 6, \quad \beta = 36\nu^2 + 60\nu + 25. \end{cases}$$

Setzt man in dem Folgenden

$$(541)\qquad \varpi = \omega', \quad \varpi' = -\omega, \quad h^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2\omega' \pi i}{n\omega}} = r$$

und entwickelt man ξ und η nach steigenden Potenzen von r, so findet man

$$(542)\qquad \xi = r^{-ch} + \cdots, \quad \eta = r^{-\beta} + \cdots.$$

Nun gilt ganz allgemein, was auch m sein mag, die Gleichung

$$(543)\qquad Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = \sqrt{m}\, Q(\omega, \omega'),$$

folglich gehen bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{n}$ die Parameter ξ und η in

$$(544)\quad \bar{\xi} = \frac{a^a\, Q(\omega, \omega')^a}{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^a} = \frac{a^a}{\xi^a} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)^{12}}{Q(\omega, \omega')^{\lambda}\, Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^{\lambda}} = \eta$$

über. (Eine solche Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{n}$ wurde bereits in § 11 angewendet; sie führte zu den *complementären* Parametern). Die Gleichung zwischen ξ und η reducirt sich also in diesem Falle auf eine Gleichung zwischen $x = \xi + \frac{a^a}{\xi^a}$ und η, welche in Bezug auf x nur noch den Grad β hat.

§ 56.

Beispiele für den Fall $n = a^2$.

Da man den Grad kennt, den die Gleichung zwischen x und η besitzt, so kann man sie ohne Weiteres mit unbestimmten Coefficienten aufschreiben, die man dann mit leichter Mühe findet, indem man x und η nach steigenden Potenzen von r entwickelt und einsetzt. Es sei z. B.

$$(545)\quad a = 5,\ n = 25, \text{ also } \xi = L(25),\ \eta = \frac{L(5)^6}{L(25)^3},\ ch = 1,\ \beta = 2,$$

dann wird

$$(546)\quad \begin{cases} \eta = r^{-2}(1 + 3r + 9r^2 + 22r^3 + \cdots), \\ x = \xi + 5\xi^{-1} = r^{-1}(1 - r + 4r^2 + \cdots), \\ x_2 = \xi^2 + 25\xi^{-2} = x^2 - 10 = r^{-2}(1 - 2r - r^2 + 2r^3 + \cdots). \end{cases}$$

Die Gleichung zwischen x und η muss die Form

(547) $$(a_1x_2 + a_2x + a_3)\eta + (b_1x_2 + b_2x + b_3) = 0$$

haben; aus dem ersten Gliede in den Entwickelungen von η, x und x_2 nach steigenden Potenzen von r erkennt man aber, dass sie sich auf

(547a) $$\eta - x_2 + b_2x + b_3 = 0$$

reducirt. Nun ist

$$\eta - x_2 = 5r^{-1}(1 + 2r + 4r^2 + \cdots),$$

also in Uebereinstimmung mit Gleichung (236)

(548) $$\eta = x_2 + 5x + 15, \quad \text{oder} \quad \eta = x^2 + 5x + 5.$$

In dieser Weise findet man leicht die folgende Tabelle:

I. $a = 2, \quad n = 4, \quad \xi = L(4)^8, \quad \eta = \frac{L(2)^{48}}{L(4)^{24}}, \quad x = \xi + \frac{256}{\xi},$

(549) $$\eta = x + 32;$$

II. $a = 3, \quad n = 9, \quad \xi = L(9)^3, \quad \eta = \frac{L(3)^{12}}{L(9)^6}, \quad x = \xi + \frac{27}{\xi},$

(550) $$\eta = x + 9;$$

III. $a = 5, \quad n = 25, \quad \xi = L(25), \quad \eta = \frac{L(5)^6}{L(25)^3}, \quad x = \xi + \frac{5}{\xi},$

(551) $$\eta = x^2 + 5x + 5;$$

IV. $a = 7, \quad n = 49, \quad \xi = L(49), \quad \eta = \frac{L(7)^4}{L(49)^2}, \quad x = \xi + \frac{7}{\xi},$

(552) $$\eta^2 - 7(x + 5)\eta - (x^3 + 7x^2 - 49) = 0,$$

oder

(552a) $$2\eta = 7(x + 5) + (x + 7)\sqrt{4x + 21}.$$

Diese Beispiele mögen genügen, um die angegebene Methode zunächst auf den leichter verständlichen Fall anzuwenden, wo sich die Reduction der Parametergleichung nur auf den *einen* Parameter erstreckt. Noch grösser wird der Grad der Vereinfachung, wenn man für *beide* Parameter in der angegebenen Weise neue Hülfsgrössen x und y einführen kann. Wie dies geschieht, soll in den folgenden Paragraphen gezeigt werden.

§ 57.

Anwendung auf den Fall $n = n'n''$.

Es sei $n = n' \cdot n''$, wobei n' und n'' zwei von einander verschiedene Primzahlen sein mögen. Dann kann man zwei ganze Zahlen ν' und ν'' finden, für welche

(553) $$\nu'n'' - \nu''n' = +1$$

wird. Jetzt setze man

$$(554)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{L(n)^{\varkappa} L(n')^{\varkappa}}{L(n'')^{\varkappa}} = \dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\varkappa} Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right)^{\varkappa}}{Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right)^{\varkappa} Q(\varpi, \varpi')^{\varkappa}}, \\ \eta = \dfrac{L(n')^{\lambda} L(n'')^{\lambda}}{L(n)^{\lambda}} = \dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right)^{\lambda} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right)^{\lambda}}{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\lambda} Q(\varpi, \varpi')^{\lambda}}, \\ \zeta = \dfrac{L(n)^{\mu} L(n'')^{\mu}}{L(n')^{\mu}} = \dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\mu} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right)^{\mu}}{Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right)^{\mu} Q(\varpi, \varpi')^{\mu}} \end{cases}$$

und bestimme die Exponenten $\varkappa$, λ, μ so, dass ξ, η, ζ Parameter werden. Zu diesem Zweck benutze man die Auseinandersetzungen in § 10, nach denen $L(n')^{\delta_1} L(n'')^{\delta_2} L(n)^{\delta_3}$ nur dann ein Parameter werden kann, wenn in den Gleichungen

$$(555)\quad \begin{cases} (n''-n)\,\delta_1 + (n'-n)\,\delta_2 + (1-n)\,\delta_3 = 24k_0, \\ (n-n'')\,\delta_1 + (1-n'')\,\delta_2 + (n'-n'')\,\delta_3 = 24k_1, \\ (1-n')\,\delta_1 + (n-n')\,\delta_2 + (n''-n')\,\delta_3 = 24k_2, \\ (n'-1)\,\delta_1 + (n''-1)\,\delta_2 + (n-1)\,\delta_3 = 24k_3 \end{cases}$$

die Grössen k_0, k_1, k_2, k_3 ganze Zahlen sind.

Um ξ zu erhalten, setze man daher $\delta_1 = +\varkappa$, $\delta_2 = -\varkappa$, $\delta_3 = +\varkappa$. Dadurch gehen die Gleichungen (555) über in

$$-(n'-1)(n''+1)\varkappa = 24k_0 = 24k_2,$$
$$+(n'-1)(n''+1)\varkappa = 24k_1 = 24k_3.$$

Bezeichnet man also mit α die kleinste ganze Zahl, welche die Eigenschaft hat, dass 24α durch $(n'-1)(n''+1)$ theilbar ist, so findet man

$$(556)\quad \varkappa = \frac{24\alpha}{(n'-1)(n''+1)},\quad k_0 = k_2 = -\alpha,\quad k_1 = k_3 = +\alpha.$$

Der Charakter von ξ ist deshalb gleich 2α.

Um η zu erhalten, setze man $\delta_1 = +\lambda$, $\delta_2 = +\lambda$, $\delta_3 = -\lambda$ und bezeichne mit β die kleinste ganze Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, dass sie durch $(n'-1)(n''-1)$ theilbar ist. Dadurch gehen die Gleichungen (555) über in

$$-(n'-1)(n''-1)\lambda = 24k_0 = 24k_3,$$
$$+(n'-1)(n''-1)\lambda = 24k_1 = 24k_2,$$

$$(557)\quad \lambda = \frac{24\beta}{(n'-1)(n''-1)},\quad k_0 = k_3 = -\beta,\quad k_1 = k_2 = +\beta.$$

Der Charakter von η ist deshalb gleich 2β.

Um endlich ζ zu erhalten, setze man $\delta_1 = -\mu$, $\delta_2 = +\mu$, $\delta_3 = +\mu$ und bezeichne mit γ die kleinste ganze Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, dass 24γ durch $(n'+1)(n''-1)$ theilbar ist. Dadurch gehen die Gleichungen (555) über in

$$-(n'+1)(n''-1)\mu = 24k_0 = 24k_1,$$
$$+(n'+1)(n''-1)\mu = 24k_2 = 24k_3,$$

$$(558)\quad \mu = \frac{24\gamma}{(n'+1)(n''-1)}, \quad k_0 = k_1 = -\gamma, \quad k_2 = k_3 = +\gamma.$$

Der Charakter von ζ ist deshalb gleich 2γ.

Die Bedingungen, welche soeben für $\varkappa$, λ, μ aufgefunden wurden, sind *nothwendig*, wenn ξ, η, ζ Parameter werden sollen; sie sind auch ohne Weiteres *hinreichend*, wenn $\varkappa$, λ, μ *gerade* Zahlen sind, denn $\Sigma D(D-1)(D-2)\delta$ hat bezw. die Werthe

$$[+n'(n'-1)(n'-2) - n''(n''-1)(n''-2) + n(n-1)(n-2)]\varkappa,$$
$$[+n'(n'-1)(n'-2) + n''(n''-1)(n''-2) - n(n-1)(n-2)]\lambda,$$
$$[-n'(n'-1)(n'-2) + n''(n''-1)(n''-2) + n(n-1)(n-2)]\mu$$

und ist in allen drei Fällen durch 24 theilbar, gleichviel ob n gerade oder ungerade ist.*)

Aber auch in dem Falle, wo $\varkappa$, λ oder μ *ungerade* Zahlen sind, kann man zeigen, dass ξ, η, ζ unter den angegebenen Bedingungen Parameter sind.

Nach den Angaben in § 4 (vergleiche die Formeln (58) Nr. 5) ist nämlich

$$R = \prod\prod \wp'(lw)$$

eine Transformationsgrösse, wenn sich n in zwei theilerfremde Factoren a und b zerlegen lässt, die beide grösser als 2 sind. Dabei durchläuft l alle Werthe, welche zu n theilerfremd und kleiner sind als $\frac{n}{2}$. Ist $n = 2m+1$ das Product zweier ungeraden Primzahlen $n' = 2m'+1$ und $n'' = 2m''+1$, so wird

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha=m} \wp'(\alpha w) = R \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m'} \wp'(\alpha n'' w) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m''} \wp'(\alpha n' w),$$

oder nach Gleichung (42)

$$(-1)^m f(n)^{-3} = (-1)^{m'+m''} f(n')^{-3} f(n'')^{-3} \cdot R.$$

Nun ist $m = 2m'm'' + m' + m''$, folglich lässt sich die Transformationsgrösse R auf die Form

*) Vergl. die Auseinandersetzungen in § 10.

$$R = \frac{f(n')^3 f(n'')^3}{f(n)^3} = Q^{-12m'm''} \cdot \frac{L(n')^3 L(n'')^3}{L(n)^3}$$

bringen. Ferner ist nach den Gleichungen (58) Nr. 2

$$f(n')^{6m''} = Q^{12m'm''} L(n')^{6m''}$$

gleichfalls eine Transformationsgrösse. Deshalb wird auch $R \cdot f(n')^{6m''}$ eine Transformationsgrösse und zwar eine von der nullten Dimension; d. h.

$$\frac{L(n')^{3n''} L(n'')^3}{L(n)^3}$$

und ebenso

$$\frac{L(n')^3 L(n'')^{3n'}}{L(n)^3}$$

sind Parameter.

Ist $n = 2a$ und a eine ungerade Primzahl, so ist sogar schon

$$\frac{f(2)^a f(a)}{f(2a)} = \frac{L(2)^a L(a)}{L(2a)}$$

ein Parameter, wie bereits in Nr. 8 der Gleichungen (58) angegeben wurde. Daraus folgt ganz allgemein der Satz:

„*Ist* $n = n' \cdot n''$, *und sind* n', n'' *irgend zwei von einander verschiedene Primzahlen, so wird*

$$\xi = L(n')^{\delta_1} L(n'')^{\delta_2} L(n)^{\delta_3}$$

ein Parameter, wenn man die ganzzahligen Exponenten δ_1, δ_2, δ_3 *so bestimmt, dass in den Gleichungen* (555) *die Zahlen* k_0, k_1, k_2, k_3 *ganze Zahlen werden, dass* δ_1, δ_2, δ_3 *entweder alle drei gerade oder alle drei ungerade sind, und dass* $n'(n'-1)(n'-2)\delta_1 + n''(n''-1)(n''-2)\delta_2 + n(n-1)(n-2)\delta_3$ *durch 24 theilbar ist.*“

Nach diesem Satze werden auch die Grössen ξ, η, ζ, welche durch die Gleichungen (554) erklärt sind, immer Parameter, wenn man die ganzen Zahlen α, β, γ so wählt, dass auch

$$(559) \quad \varkappa = \frac{24\alpha}{(n'-1)(n''+1)}, \quad \lambda = \frac{24\beta}{(n'-1)(n''-1)}, \quad \mu = \frac{24\gamma}{(n'+1)(n''-1)}$$

ganze Zahlen werden.

Diese Parameter ξ, η, ζ besitzen nun die folgenden Eigenschaften:

Setzt man $\varpi = \omega'$, $\varpi' = -\omega$ und vertauscht ω mit $\frac{\omega}{n'}$, so gehen mit Rücksicht auf die schon oft benutzte Formel

$$Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = \sqrt{m}\, Q(\omega, \omega')$$

die Parameter ξ, η, ζ über in

$$(560)\qquad \begin{cases} \xi' = \eta'^{\varkappa}\dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\omega\right)^{\varkappa}Q(\omega',-\omega)_4^{\varkappa}}{Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\frac{\omega}{\eta'}\right)^{\varkappa}Q\left(\omega',-\frac{\omega}{\eta'}\right)^{\varkappa}}, \\ \eta' = \dfrac{Q(\omega',-\omega)^{\lambda}\,Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\frac{\omega}{\eta'}\right)^{\lambda}}{Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\omega\right)^{\lambda}\,Q\left(\omega',-\frac{\omega}{\eta'}\right)^{\lambda}}, \\ \zeta' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\omega\right)^{\mu}Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\frac{\omega}{\eta'}\right)^{\mu}}{Q(\omega',-\omega)^{\mu}\,Q\left(\omega',-\frac{\omega}{\eta'}\right)^{\mu}}. \end{cases}$$

Bezeichnet man der Kürze wegen die 24te Wurzel der Einheit $e^{\frac{\pi i}{12}}$ mit ϱ und setzt man

$$\eta''\omega + \eta'\omega' = \varpi, \quad \nu''\omega + \nu'\omega' = \varpi',$$

so erhält man nach der in den Gleichungen (134) und (134a) meiner vor. Abhandlung (Math. Annalen, Bd. 26, S. 421) gegebenen Tabelle

$$(561)\qquad \begin{cases} Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\frac{\omega}{\eta'}\right) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu''\eta', & 1\\ -\nu'\eta'', & 1\end{pmatrix}Q\left(\frac{\varpi}{\eta}, \varpi'\right) = \varrho^{-\nu''\eta'-2}Q\left(\frac{\varpi}{\eta}, \varpi'\right), \\ Q\left(\frac{\omega'}{\eta''},-\omega\right) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu'', & 1\\ -\nu'\eta'', & \eta'\end{pmatrix}Q\left(\frac{\varpi}{\eta'}, \varpi'\right) = \varrho^{-\nu''+\eta'-3}Q\left(\frac{\varpi}{\eta''}, \varpi'\right), \\ Q\left(\omega',-\frac{\omega}{\eta'}\right) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu''\eta', & \eta''\\ -\nu', & 1\end{pmatrix}Q\left(\frac{\varpi}{\eta'}, \varpi'\right) \\ \qquad = \varrho\begin{pmatrix}-\nu', & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix}\eta'', & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}Q\left(\frac{\varpi}{\eta'}, \varpi'\right) \\ \qquad = \varrho^{-\eta''-\nu'}Q\left(\frac{\varpi}{\eta'}, \varpi'\right), \text{*)} \\ Q(\omega',-\omega) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu'', & \eta''\\ -\nu', & \eta'\end{pmatrix}Q(\varpi, \varpi') = \varrho_1\cdot Q(\varpi, \varpi'), \end{cases}$$

*) Die Substitution $x_2 = -\nu''\eta' x + \eta'' y = (1-\nu'\eta'')x + \eta'' y$, $y_2 = -\nu' x + y$ ist hier in die beiden Substitutionen

$$x_1 = -\nu' x + y, \quad y_1 = -x \quad \text{und} \quad x_2 = \eta'' x_1 - y_1, \quad y_2 = x_1$$

zerlegt. Dabei kommt der Werth $q = -1$ vor, während in § 14 und § 15 meiner Abhandlung im 26ten Bande der Mathematischen Annalen die Grösse

$$\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}$$

als 24te Wurzel der Einheit nur unter der Voraussetzung bestimmt worden war, dass q eine *positive* ganze Zahl ist. Diese Beschränkung kann man aber aufheben. Ist nämlich

$$\varpi = p\omega + q\omega', \quad \varpi' = p'\omega + q'\omega',$$

so wird

$$\omega = q'\varpi - q\varpi', \quad \omega' = -p'\varpi + p\varpi'$$

wo ϱ_1 eine 24^{te} Wurzel der Einheit ist, die man für jeden einzelnen Fall noch besonders bestimmen muss. Deshalb wird

$$(562)\qquad \begin{cases} \xi' = n'^{\varkappa} \cdot \varrho_1^{\varkappa} \cdot \varrho^{\varkappa[(n'-1)(\nu''+1)+n''+\nu']} \cdot \dfrac{1}{\xi}, \\ \eta' = \varrho_1^{\lambda} \cdot \varrho^{-\lambda[(n'-1)(\nu''+1)-n''-\nu']} \cdot \dfrac{1}{\eta}, \\ \zeta' = \varrho_1^{-\mu} \cdot \varrho^{-\mu[(n''-1)(\nu'-1)-n'+\nu''+3]} \cdot \xi. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind ξ, η, ζ dem primitiven Periodenpaare $2\varpi = 2n''\omega + 2n'\omega'$, $2\varpi' = 2\nu''\omega + 2\nu'\omega'$ zugeordnet.

Vertauscht man ω mit $\frac{\omega}{n''}$, nachdem man in den Gleichungen (554) wieder $\varpi = \omega'$, $\varpi' = -\omega$ gesetzt hat, so gehen ξ, η, ζ über in

$$(563)\qquad \begin{cases} \xi'' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right)^{\varkappa} Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right)^{\varkappa}}{Q(\omega', -\omega)^{\varkappa}\, Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\varkappa}}, \\ \eta'' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right)^{\lambda} Q(\omega', -\omega)^{\lambda}}{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right)^{\lambda} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\lambda}}, \\ \zeta'' = n''^{\mu} \cdot \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right)^{\mu} Q(\omega', -\omega)^{\mu}}{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right)^{\mu} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\mu}}. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$n'\omega + n''\omega' = \varpi, \quad -\nu'\omega - \nu''\omega' = \varpi',$$

so erhält man

$$(564)\qquad \begin{cases} Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right) = \varrho \begin{pmatrix} \nu' n'', & 1 \\ \nu'' n', & 1 \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \varrho^{\nu' n''-2} Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right), \\ Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right) = \varrho \begin{pmatrix} \nu', & 1 \\ \nu'' n', & n'' \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right) = \varrho^{\nu'+n''-3} Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right), \end{cases}$$

---

die *inverse* Substitution. Aus

$$Q(\varpi, \varpi') = \varrho \begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega')$$

folgt daher

$$Q(\omega, \omega') = \varrho \begin{pmatrix} q', & -q \\ -p', & p \end{pmatrix} Q(\varpi, \varpi'),$$

und dies giebt

$$\varrho \begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} \cdot \varrho \begin{pmatrix} q', & -q \\ -p', & p \end{pmatrix} = +1.$$

$$(564)\quad \begin{cases} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right) = \varrho \begin{pmatrix} \nu' n'', & n' \\ \nu'', & 1 \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right) \\ \qquad\qquad = \varrho \begin{pmatrix} \nu'', & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \varrho \begin{pmatrix} n', & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right) \\ \qquad\qquad = \varrho^{-n'+\nu''} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right), \\ Q(\omega', -\omega) = \varrho \begin{pmatrix} \nu', & n' \\ \nu'', & n'' \end{pmatrix} Q(\varpi, \varpi') = \varrho_2 \cdot Q(\varpi, \varpi'), \end{cases}$$

wobei ϱ_2 wieder eine 24^{te} Wurzel der Einheit ist, die man für jeden einzelnen Fall besonders bestimmen muss. Deshalb wird

$$(565)\quad \begin{cases} \xi'' = \varrho_2^{-\varkappa} \cdot \varrho^{\varkappa[(n'-1)(\nu''+1)+n''+\nu'-3]} \cdot \xi, \\ \eta'' = \varrho_2^{\lambda} \cdot \varrho^{\lambda[(n''-1)(\nu'-1)+n'-\nu']} \cdot \frac{1}{\eta}, \\ \zeta'' = n''^{\mu} \cdot \varrho_2^{\mu} \cdot \varrho^{-\mu[(n''-1)(\nu'-1)-n'+\nu']} \cdot \frac{1}{\zeta}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind ξ, η, ζ dem primitiven Periodenpaare $2\varpi = 2n'\omega + 2n''\omega'$, $2\varpi' = -2\nu'\omega - 2\nu''\omega'$ zugeordnet.

Setzt man in den Gleichungen (554) wieder $\varpi = \omega'$, $\varpi' = -\omega$ und vertauscht ω mit $\frac{\omega}{n}$, so erhält man (mit Anwendung der in § 11 eingeführten Bezeichnung) die *complementären* Parameter

$$\bar{\xi} = n'^{\varkappa} \frac{Q(\omega', -\omega)^{\varkappa} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\varkappa}}{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\varkappa} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^{\varkappa}},$$

$$\bar{\eta} = \frac{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\lambda} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\lambda}}{Q(\omega', -\omega)^{\lambda} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^{\lambda}},$$

$$\bar{\zeta} = n''^{\mu} \frac{Q(\omega', -\omega)^{\mu} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\mu}}{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\mu} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^{\mu}}.$$

Nun ist aber

$$Q(\omega', -\omega) = \varrho \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} Q(\omega, \omega') = \varrho^{-3} Q(\omega, \omega'),$$

folglich wird

$$(566)\quad \bar{\xi} = \frac{n'^{\varkappa}}{\xi}, \quad \bar{\eta} = \eta, \quad \bar{\zeta} = \frac{n''^{\mu}}{\zeta}.$$

§ 58.

Anwendung auf den Fall $n = 2a$.

Es sei $n' = 2$ und $n'' = a = 2b + 1$ eine ungerade Primzahl, also

(567) $n = 2a, \quad \nu' = 1, \quad \nu'' = b, \quad \varrho_1 = \varrho^{-b-1}, \quad \varrho_2 = \varrho^{b-2}.$

Dadurch erhält man in diesem Falle

(568) $$\xi = \frac{L(2a)^{\varkappa} L(2)^{\varkappa}}{L(a)^{\varkappa}}, \quad \eta = \frac{L(a)^{\lambda} L(2)^{\lambda}}{L(2a)^{\lambda}}, \quad \zeta = \frac{L(2a)^{\mu} L(a)^{\mu}}{L(2)^{\mu}};$$

(569) $$\varkappa = \frac{24\alpha}{a+1}, \qquad \lambda = \frac{24\beta}{a-1}, \qquad \mu = \frac{8\gamma}{a-1};$$

(570) $$\begin{cases} \xi' = \dfrac{2^{\varkappa}\varrho^{(a+1)\varkappa}}{\xi}, & \eta' = \dfrac{1}{\eta}, & \zeta' = \zeta, \\ \xi'' = \varrho^{(a+1)\varkappa} \cdot \xi, & \eta'' = \dfrac{1}{\eta}, & \zeta'' = \dfrac{a^{\mu}}{\zeta}, \\ \bar{\xi} = \dfrac{2^{\varkappa}}{\xi}, & \bar{\eta} = \eta, & \bar{\zeta} = \dfrac{a^{\mu}}{\zeta}. \end{cases}$$

Da $(a+1)\varkappa = 24\alpha$ durch 24 theilbar ist, so folgt hieraus, dass man

(571) $$x = \xi + \frac{2^{\varkappa}}{\xi}, \qquad y = \eta + \frac{1}{\eta}, \qquad z = \zeta + \frac{a^{\mu}}{\zeta},$$

in die Parametergleichungen zwischen ξ, η und ζ einführen darf, wodurch dann der Grad in Bezug auf jede der drei Veränderlichen auf die Hälfte reducirt wird.

Es genügt, die Rechnungen an irgend einem Beispiele zu erläutern. Es sei $a = 17$, $n = 34$, dann wird $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$; $\varkappa = 4$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$, also

(572) $$\xi = \frac{L(34)^4 L(2)^4}{L(17)^4}, \quad \eta = \frac{L(17)^3 L(2)^3}{L(34)^3}, \quad \zeta = \frac{L(34) L(17)}{L(2)}.$$

Dabei kann man setzen

(573) $$\begin{cases} x = \xi + \dfrac{16}{\xi}, & y = \eta + \dfrac{1}{\eta}, & z = \zeta + \dfrac{17}{\zeta}, \\ x_2 = \xi^2 + \dfrac{256}{\xi^2}, & y_2 = \eta^2 + \dfrac{1}{\eta^2}, & z_2 = \zeta^2 + \dfrac{289}{\zeta^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\

$$y = r^{-3}(1 + 3r + 6r^2 + 13r^2 + 25r^4 + \cdots),$$
$$y_2 = r^{-4}(1 + 6r + 21r^2 + 62r^3 + 162r^4 + 384r^5 + \cdots),$$
$$z = r^{-3}(1 - r - 2r^2 + r^3 + 17r^4 + \cdots),$$
$$z_2 = r^{-4}(1 - 2r - 3r^2 + 6r^3 + 2r^4 + 0 - r^6 + \cdots)$$

folgt aber, dass $a_1 = 0$ sein muss. Ferner ist

$$yz_2 = r^{-6}(1 + r - 3r^2 - 2r^3 + \cdots),$$
$$y_2 z = r^{-6}(1 + 5r + 13r^2 + 30r^3 + \cdots),$$

also

$$yz_2 - y_2 z = r^{-5}(-4 - 16r - 32r^2 + \cdots).$$

Da sich in der Gleichung (574) kein Glied gegen dieses Glied mit r^{-5} fortheben kann, so müssen auch a_2 und b_1 gleich 0 sein, d. h. die Gleichung (574) reducirt sich auf

(574a) $$a_3 z_2 + (b_2 y + b_3) z + (c_1 y_2 + c_2 y + c_3) = 0.$$

Jetzt erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$z_2 - 2yz + y_2 = r^{-2}(+16 + 64r + 124r^2 + 256r^3 + \cdots),$$
$$-20y + 4z = r^{-2}(-16 - 64r - 128r^2 - 256r^3 - \cdots),$$

also

(575) $$z_2 - 2yz + y_2 - 20y + 4z + 4 = 0,$$

oder

$$(z - y)^2 - 20y + 4z - 32 = 0.$$

§ 59.

Weitere Vereinfachungen.

In manchen Fällen ist noch eine weitere Vereinfachung möglich. Sind nämlich von den Exponenten $\varkappa$, λ, μ zwei, z. B. $\varkappa$ und λ gerade, also

$$\varkappa = 2\varkappa', \qquad \lambda = 2\lambda',$$

so hat man zu untersuchen, ob nicht bereits

$$\vartheta = \sqrt{\xi\eta} = L(\eta)^{\varkappa'-\lambda'} \cdot L(\eta')^{\varkappa'+\lambda'} \cdot L(\eta'')^{\lambda'-\varkappa'}$$

ein Parameter wird. Ist dies der Fall, so folgt aus der Bildung von ϑ sofort, dass die Zahlen k_0, k_1, k_2, k_3, welche zu diesem Parameter gehören, durch die Gleichungen

$$2k_0 = -(\alpha+\beta),\ 2k_1 = +(\alpha+\beta),\ 2k_2 = -(\alpha-\beta),\ 2k_3 = +(\alpha-\beta)$$

bestimmt sind. Daher kann ϑ nur dann ein Parameter sein, wenn α und β entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

Der Charakter von ϑ ist daher gleich α oder gleich β, jenachdem $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$ ist. In beiden Fällen erhält man eine Gleichung zwischen $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$, welche beträchtlich einfacher ist als die zwischen

ξ und η, denn sie ist aus einer Gleichung zwischen η und $\sqrt{\xi\eta}$ oder zwischen ξ und $\sqrt{\xi\eta}$ hervorgegangen, so dass man von vornherein einen grossen Theil der Coefficienten gleich 0 setzen kann.

Dabei kann man die Reductionen, welche früher für die Gleichungen zwischen ξ, η, ζ angegeben wurden, in gleicher Weise auch auf die Gleichungen zwischen $\sqrt{\xi}$, $\sqrt{\eta}$, $\sqrt{\zeta}$ anwenden; man braucht nur noch die Bezeichnungen

$$(576)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi} + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\xi}} = u, & \xi + \dfrac{a}{\xi} = u_2, & (\sqrt{\xi})^3 + \dfrac{(\sqrt{a})^3}{(\sqrt{\xi})^3} = u_3, \ldots, \\ \sqrt{\xi} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\xi}} = \bar{u}, & \xi - \dfrac{a}{\xi} = \bar{u}_2, & (\sqrt{\xi})^3 - \dfrac{(\sqrt{a})^3}{(\sqrt{\xi})^3} = \bar{u}_3, \ldots, \end{cases}$$

$$(577)\quad \begin{cases} \sqrt{\eta} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{\eta}} = v, & \eta + \dfrac{b}{\eta} = v_2, & (\sqrt{\eta})^3 + \dfrac{(\sqrt{b})^3}{(\sqrt{\eta})^3} = v_3, \ldots, \\ \sqrt{\eta} - \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{\eta}} = \bar{v}, & \eta - \dfrac{b}{\eta} = \bar{v}_2, & (\sqrt{\eta})^3 - \dfrac{(\sqrt{b})^3}{(\sqrt{\eta})^3} = \bar{v}_3, \ldots, \end{cases}$$

$$(578)\quad \begin{cases} \sqrt{\zeta} + \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\zeta}} = w, & \zeta + \dfrac{c}{\zeta} = w_2, & (\sqrt{\zeta})^3 + \dfrac{(\sqrt{c})^3}{(\sqrt{\zeta})^3} = w_3, \ldots, \\ \sqrt{\zeta} - \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\zeta}} = \bar{w}, & \zeta - \dfrac{c}{\zeta} = \bar{w}_2, & (\sqrt{\zeta})^3 - \dfrac{(\sqrt{c})^3}{(\sqrt{\zeta})^3} = \bar{w}_3, \ldots, \end{cases}$$

einzuführen.

§ 60.

Beispiele für den Fall $n = 2a$.

Mit Rücksicht auf die Vereinfachungen, welche in dem vorhergehenden Paragraphen angegeben wurden, bringt man die Gleichungen (570) besser auf die Form

$$(579)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = 2^{\frac{\varkappa}{2}} \cdot \varrho^{\frac{(a+1)\varkappa}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'} = \sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = 2^{\frac{(a+1)\varkappa}{2}} \cdot \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = 2^{\frac{\varkappa}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

Sind $\sqrt{\xi\eta}$ und $\sqrt{\eta\zeta}$ Parameter*), so findet man aus diesen Gleichungen ohne Weiteres, welche Form die Gleichungen zwischen $\sqrt{\xi}, \sqrt{\eta}, \sqrt{\zeta}$ haben.

*) Die Entscheidung darüber giebt der allgemeine Satz, welcher in § 57 bewiesen wurde.

Auf diese Weise erhält man die folgenden Resultate:

I. $a = 3,\ n = 6;\quad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1;\quad \varkappa = 6,\ \lambda = 12,\ \mu = 4;$

$$(580)\quad \sqrt{\xi} = \frac{L(6)^3\,L(2)^3}{L(3)^3},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(3)^6\,L(2)^6}{L(6)^6},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(6)^2\,L(3)^2}{L(2)^2};$$

$$(581)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi} + \frac{8}{\sqrt{\xi}} = u, & \sqrt{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} = v, & \sqrt{\zeta} + \frac{9}{\sqrt{\zeta}} = w, \\ \sqrt{\xi} - \frac{8}{\sqrt{\xi}} = \bar{u}, & \sqrt{\eta} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \bar{v}, & \sqrt{\zeta} - \frac{9}{\sqrt{\zeta}} = \bar{w}; \end{cases}$$

$$(582)\quad u - \bar{v} = 0,\quad \bar{u} - \bar{w} = 0,\quad v - w = 0,$$

oder

$$(582a)\quad x = y - 18 = z - 2,$$

wo

$$(583)\quad \begin{cases} x = \xi + \frac{64}{\xi} = u^2 - 16 = \bar{u}^2 + 16, \\ y = \eta + \frac{1}{\eta} = v^2 - 2 = \bar{v}^2 + 2, \\ z = \zeta + \frac{81}{\zeta} = w^2 - 18 = \bar{w}^2 + 18. \end{cases}$$

II. $a = 5,\ n = 10;\quad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1;\quad \varkappa = 4,\ \lambda = 6,\ \mu = 2;$

$$(584)\quad \sqrt{\xi} = \frac{L(10)^3\,L(2)^2}{L(5)^2},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(5)^3\,L(2)^3}{L(10)^3},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(10)\,L(5)}{L(2)};$$

$$(585)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi} + \frac{4}{\sqrt{\xi}} = u, & \sqrt{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} = v, & \sqrt{\zeta} + \frac{5}{\sqrt{\zeta}} = w, \\ \sqrt{\xi} - \frac{4}{\sqrt{\xi}} = \bar{u}, & \sqrt{\eta} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \bar{v}, & \sqrt{\zeta} - \frac{5}{\sqrt{\zeta}} = \bar{w}, \end{cases}$$

$$(586)\quad u - \bar{v} = 0,\quad \bar{u} - \bar{w} = 0,\quad v - w = 0,$$

oder

$$(586a)\quad x = y - 10 = z - 2,$$

wo

$$(587)\quad \begin{cases} x = \xi + \frac{16}{\xi} = u^2 - 8 = \bar{u}^2 + 8, \\ y = \eta + \frac{1}{\eta} = v^2 - 2 = \bar{v}^2 + 2, \\ z = \zeta + \frac{25}{\zeta} = w^2 - 10 = \bar{w}^2 + 10. \end{cases}$$

III. $a = 7,\ n = 14;\quad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 3;\quad \varkappa = 3,\ \lambda = 4,\ \mu = 4;$

$$(588)\quad \xi = \frac{L(14)^3\,L(2)^3}{L(7)^3},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(7)^2\,L(2)^2}{L(14)^2},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(14)^2\,L(7)^2}{L(2)^2};$$

$$(589)\quad \begin{cases} \xi+\frac{8}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{2401}{\zeta}=z, \\ \xi-\frac{8}{\xi}=\bar{x}, & \sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}=v, & \sqrt{\zeta}+\frac{49}{\sqrt{\zeta}}=w, \end{cases}$$

$$(590)\quad \begin{cases} y=x+7, \quad w=v^3-11v, \\ z=x^3+5x^2-32x-62=y^3-16y^2+45y+64. \end{cases}$$

IV. $a=11$, $n=22$; $\alpha=1$, $\beta=5$, $\gamma=5$; $\varkappa=2$, $\lambda=12$, $\mu=4$;

$$(591)\quad \sqrt{\xi}=\frac{L(22)L(2)}{L(11)}, \quad \sqrt{\eta}=\frac{L(11)^6L(2)^6}{L(22)^6}, \quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(22)^2L(11)^2}{L(2)^2};$$

$$(592)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\frac{2}{\sqrt{\xi}}=u, & \sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}=v, & \sqrt{\zeta}+\frac{121}{\sqrt{\zeta}}=w, \\ \sqrt{\xi}-\frac{2}{\sqrt{\xi}}=\bar{u}, & \sqrt{\eta}-\frac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar{v}, & \sqrt{\zeta}-\frac{121}{\sqrt{\zeta}}=\bar{w}, \end{cases}$$

$$(593)\quad \bar{v}=u_5+11(u_3+4u), \quad \bar{w}=\bar{u}_5+3\bar{u}_3-4\bar{u},$$

oder

$$(593\,a)\quad \begin{cases} \bar{v}=u^5+u^3-2u, \quad \bar{w}=\bar{u}^5+13\bar{u}^3+34\bar{u}, \\ (w-v)^5+64[(w+7v)^3-8(w+3v)(w-v)^2]=0, \end{cases}$$

oder

$$(594)\quad v=(u^2+1)\sqrt{u^6-4u^2+4}, \quad w=(u^2-7)\sqrt{u^6-4u^2+4}.$$

V. $a=13$, $n=26$; $\alpha=7$, $\beta=1$, $\gamma=3$; $\varkappa=12$, $\lambda=2$, $\mu=2$;

$$(595)\quad \sqrt{\xi}=\frac{L(26)^6L(2)^6}{L(13)^6}, \quad \sqrt{\eta}=\frac{L(13)L(2)}{L(26)}, \quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(26)L(13)}{L(2)};$$

$$(596)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\frac{64}{\sqrt{\xi}}=u, & \sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}=v, & \sqrt{\zeta}+\frac{13}{\sqrt{\zeta}}=w, \\ \sqrt{\xi}-\frac{64}{\sqrt{\xi}}=\bar{u}, & \sqrt{\eta}-\frac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar{v}, & \sqrt{\zeta}-\frac{13}{\sqrt{\zeta}}=\bar{w}. \end{cases}$$

$$(597)\quad \begin{cases} u=\bar{v}_7-13(\bar{v}_5-4\bar{v}_3+6\bar{v}), \quad w=v_3-4v, \\ \bar{u}(u+11w_4-156w_2+210)=\bar{w}(36u_2+w_6-2w_4-9w_2-8092), \end{cases}$$

oder

$$(597\,a)\quad \begin{cases} u=\bar{v}^7-6\bar{v}^5+\bar{v}^3+20\bar{v}, \quad w=v^3-7v, \\ \bar{u}(u^2+11w^4-728w^2+7856)=w(36u^2+w^6-80w^4+1616w^2-17536). \end{cases}$$

VI. $a=17$, $n=34$; $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=2$; $\varkappa=4$, $\lambda=3$, $\mu=1$;

$$(598)\quad \xi=\frac{L(34)^4L(2)^4}{L(17)^4}, \quad \eta=\frac{L(17)^3L(2)^3}{L(34)^3}, \quad \zeta=\frac{L(34)L(17)}{L(2)};$$

$$(599)\quad \xi+\frac{16}{\xi}=x, \quad \eta+\frac{1}{\eta}=y, \quad \zeta+\frac{17}{\zeta}=z;$$

$$(600)\quad \begin{cases} y^3-34y^2+(-17x+116)y-x^2-34x+440=0, \\ z^3+6z^2-(5x+28)z-(x^2+26x+136)=0, \\ (z-y)^2-20y+4z-32=0. \end{cases}$$

VII. $a=19,\ n=38;\ \alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=9;\ \varkappa=6,\ \lambda=4,\ \mu=4;$

$$(601)\quad \sqrt{\xi}=\frac{L(38)^3\,L(2)^3}{L(19)^3},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(19)^3\,L(2)^3}{L(38)^3},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(38)^3\,L(19)^3}{L(2)^3};$$

$$(602)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\frac{8}{\sqrt{\xi}}=u,\quad \sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}=v,\quad \sqrt{\zeta}+\frac{361}{\sqrt{\zeta}}=w,\\ \sqrt{\xi}-\frac{8}{\sqrt{\xi}}=\bar{u},\quad \sqrt{\eta}-\frac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar{v},\quad \sqrt{\zeta}-\frac{361}{\sqrt{\zeta}}=\bar{w}; \end{cases}$$

$$(603)\quad \begin{cases} \bar{v}_5-u_3+19(-u_2\bar{v}-5uv_2-6\bar{v}_3+2u-5\bar{v})=0,\\ w_3-(3v_3+16v)\,w_2+(3v_6+352v_4+32v_2+449)\,w\\ \qquad -v_9+176v_7-5136v_5-7673v_3-1152v=0, \end{cases}$$

oder

$$(603a)\quad \begin{cases} \bar{v}^5-109\bar{v}^3-95u\bar{v}^2-(19u^2+128)\,\bar{v}-(u^3+128u)=0,\\ (w-v^3)^3-7vw^2+(334v^4-1349v^2)\,w\\ \qquad +185v^7-6395v^5+22667v^3=0. \end{cases}$$

VIII. $a=23,\ n=46,\ \alpha=1,\ \beta=11,\ \gamma=11;\ \varkappa=1,\ \lambda=12,\ \mu=4;$

$$(604)\quad \xi=\frac{L(46)\,L(2)}{L(23)},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(23)^6\,L(2)^6}{L(46)^6},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(46)^3\,L(23)^3}{L(2)^3};$$

$$(605)\quad \xi+\frac{2}{\xi}=x,\quad \eta+\frac{1}{\eta}=y,\quad \zeta+\frac{23^4}{\zeta}=z;$$

$$(606)\quad \begin{cases} y=x_{11}+23(x_{10}+11x_9+78x_8+404x_7+1635x_6\\ \qquad +5384x_5+14808x_4+34616x_3+69584x_2\\ \qquad +121184x+183614),\\ z=x_{11}+7x_{10}+13x_9+2x_8-4x_7-11x_6+8x_5+40x_4\\ \qquad -104x_3+112x_2-32x-46. \end{cases}$$

IX. $a=29,\ n=58;\ \alpha=5,\ \beta=7,\ \gamma=7;\ \varkappa=4,\ \lambda=6,\ \mu=2;$

$$(607)\quad \sqrt{\xi}=\frac{L(58)^2\,L(2)^2}{L(29)^2},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(29)^3\,L(2)^3}{L(58)^3},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(58)\,L(29)}{L(2)};$$

$$(608)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\frac{4}{\sqrt{\xi}}=u,\quad \sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}=v,\quad \sqrt{\zeta}+\frac{29}{\sqrt{\zeta}}=w,\\ \sqrt{\xi}-\frac{4}{\sqrt{\xi}}=\bar{u},\quad \sqrt{\eta}-\frac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar{v},\quad \sqrt{\zeta}-\frac{29}{\sqrt{\zeta}}=\bar{w}; \end{cases}$$

$$(609)\quad \begin{cases} \bar{v}_5-u_7+29[-uv_4+(9u_2-185)\,\bar{v}_3-27u_3v_2\\ \qquad +(23u_4+197u_2+1298)\,\bar{v}\\ \qquad -7u_5-46u_3-430u]=0,\\ \bar{w}_5-9\bar{u}w_4+(37u_2-289)\,\bar{w}_3+(-91\bar{u}_3+1080\bar{u})\,w_2\\ \qquad +(147u_4-2547u_2+15610)\,\bar{w}-\bar{u}_7-143\bar{u}_5\\ \qquad +4258\bar{u}_3-39358\bar{u}=0. \end{cases}$$

X. $a=31,\ n=62;\ \alpha=4,\ \beta=5,\ \gamma=15;\ \varkappa=3,\ \lambda=4,\ \mu=4;$

$$(610)\quad \xi=\frac{L(62)^3\,L(2)^3}{L(31)^3},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(31)^2\,L(2)^2}{L(62)^2},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(62)^2\,L(31)^2}{L(2)^2};$$

$$(611)\quad \begin{cases} \xi+\frac{8}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{31^4}{\zeta}=s, \\ \xi-\frac{8}{\xi}=\bar{x}, & \sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}=v, & \sqrt{\zeta}+\frac{31^2}{\sqrt{\zeta}}=w; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(612)\quad y_4 - x_5 + 31[&-(x+25)\,y_3+(8x_2-256x+1247)\,y_2\\ &+(-13x_3+205x_2-1928x+8146)\,y\\ &+(3x_4-64x_3+637x_2-4430x+17346)]=0.\end{aligned}$$

Die Gleichung zwischen v und w hat die Form

$$\begin{aligned}(613)\quad (w-v^3)^5 &+(a_1vw^4+a_2v^4w^3+a_3v^7w^2+a_4v^{10}w+a_5v^{13})\\ &+(b_1v^2w^3+b_2v^5w^2+b_3v^8w+b_4v^{11})\\ &+(c_1w^3+c_2v^3w^2+c_3v^6w+c_4v^9)\\ &+(d_1vw^2+d_2v^4w+d_3v^7)+(e_1v^2w+e_2v^5)\\ &+(f_1w+f_2v^3)+g_1v=0.\end{aligned}$$

Der Grad dieser Gleichung ist so hoch, dass die Berechnung der noch unbestimmten Coefficienten vorläufig übergangen werden möge*).

*) Es gereicht mir zur ganz besonderen Genugthuung, dass Herr H. Weber in seiner geistvollen und an Resultaten so reichen Abhandlung; „Zur Theorie der elliptischen Functionen", (Acta mathematica, Band 11, Seite 333 — 390) gleichfalls auf solche reducirte Parametergleichungen geführt wird, obgleich er von ganz anderen Gesichtspunkten ausgeht. Die „*Schläfli'schen Modulargleichungen*", welche er für die Transformation vom Grade

$$n=3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17 \text{ und } 19$$

auf Seite 349 gegeben hat, stimmen, bis auf die geänderte Bezeichnung, mit den Gleichungen überein, welche ich für die Parameter ξ und η in dem Vorhergehenden bei der Transformation vom Grade

$$n=6,\ 10,\ 14,\ 22,\ 26,\ 34 \text{ und } 38$$

aufgestellt habe. Dass bei mir der Transformationsgrad doppelt so gross ist wie bei Herrn Weber, liegt nur an den von mir angewendeten Bezeichnungen, welche in die des Herrn Weber durch eine Transformation zweiten Grades übergehen.

Wegen dieses Umstandes brauche ich auch meine Methode nicht auf den Fall zu beschränken, wo $n=2a$ ist, sondern ich bin in der Lage, sie auf den allgemeineren Fall anzuwenden, wo n das Product von zwei beliebigen Primzahlen n' und n'' ist. Selbst auf den Fall, wo n eine beliebig zusammengesetzte Zahl ist, lässt sich dieses Verfahren übertragen. Das grösste Gewicht lege ich aber darauf, dass ich durch meine Methode nicht *zwei*, sondern *drei* Parameter ξ, η, ζ erhalte, zwischen denen so einfache Gleichungen bestehen; denn daraus ergiebt sich ein wesentlicher Vortheil für die Anwendungen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. Benutzt man nämlich die Schläfli'schen Modulargleichungen des Herrn Weber zur Berechnung der singulären Invarianten,

§ 61.

Anwendung auf den Fall $n = 3a$.

Es sei $n' = 3$ und $n'' = a = 3b \pm 1$ eine Primzahl, also $n = 3a$, dann setze man

$$\nu' = \pm 1, \quad \nu'' = \pm b, \quad \text{so dass} \quad \nu' n'' - \nu'' n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho \begin{pmatrix} \mp b, & 3b \pm 1 \\ \mp 1, & 3 \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \mp 1, & +3 \\ 0, & \mp 1 \end{pmatrix} \cdot \varrho \begin{pmatrix} b, & -1 \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \varrho^{-b},$$

$$\varrho_2 = \varrho \begin{pmatrix} \pm 1, & 3 \\ \pm b, & 3b \pm 1 \end{pmatrix} = \varrho^{b-3}.$$

Setzt man also

$$(614) \quad \xi = \frac{L(3a)^{\varkappa} L(3)^{\varkappa}}{L(a)^{\varkappa}}, \quad \eta = \frac{L(a)^{\lambda} L(3)^{\lambda}}{L(3a)^{\lambda}}, \quad \zeta = \frac{L(3a)^{\mu} L(a)^{\mu}}{L(3)^{\mu}},$$

wo

$$(615) \quad \varkappa = \frac{12\alpha}{a+1}, \qquad \lambda = \frac{12\beta}{a-1}, \qquad \mu = \frac{6\gamma}{a-1},$$

so findet man aus den Gleichungen (562), (565) und (566) für das *obere* Zeichen

$$(616) \quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{(2b+2)\varkappa} \cdot \dfrac{\sqrt{3^{\varkappa}}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'} = \sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = \varrho^{(2b+2)\varkappa} \cdot \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''} = \dfrac{\sqrt{a^{\mu}}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\xi} = \dfrac{\sqrt{3^{\varkappa}}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta} = \sqrt{\eta}, & \sqrt{\zeta} = \dfrac{\sqrt{a^{\mu}}}{\sqrt{\zeta}}; \end{cases}$$

und für das *untere* Zeichen

---

so findet man zunächst eine Gleichung, welche noch überflüssige Factoren enthält. Wenn nun Herr Weber behauptet, dass sich diese überflüssigen Factoren *leicht* absondern lassen, so mag diese Behauptung für die behandelten einfachen Fälle richtig sein. Soll aber die Methode auch bei grösseren Werthen von n genügen, so ist es erforderlich, dass man noch eine *zweite* Gleichung angeben kann, von der die gesuchte singuläre Invariante eine Wurzel ist, welche aber mit der *ersten* Gleichung keinen der überflüssigen Factoren gemein hat. Erst dann kann man die Gleichung für die singuläre Invariante unter allen Umständen frei von fremden Factoren erhalten.

Aus den vorstehenden Beispielen erkennt man auch, dass in vielen Fällen die Gleichung zwischen ξ und ζ, oder die zwischen η und ζ einfacher wird als die zwischen ξ und η.

$$(617)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \dfrac{\sqrt{3^x}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \varrho^{(2b-2)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'} = \varrho^{(4b-2)\mu}\cdot\sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \varrho^{-(2b-2)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''} = \varrho^{(4b-2)\mu}\cdot\dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{3^x}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

§ 62.

Beispiele für den Fall $n = 3a$.

I. $a=2,\ n=6;\ \alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1;\ \varkappa=4,\ \lambda=12,\ \mu=6;$

$$(618)\quad \sqrt{\xi} = \frac{L(6)^3\,L(3)^2}{L(2)^2},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(2)^6\,L(3)^6}{L(6)^6},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(6)^3\,L(2)^3}{L(3)^3}.$$

Dieses Beispiel geht also in Beispiel I des § 60 über, wenn man ξ mit ζ vertauscht.

II. $a=5,\ n=15;\ b=2,\ \alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=2;\ \varkappa=2,\ \lambda=3,\ \mu=3;$

$$(619)\quad \xi = \frac{L(15)^2\,L(3)^2}{L(5)^2},\quad \eta = \frac{L(5)^3\,L(3)^3}{L(15)^3},\quad \zeta = \frac{L(15)^3\,L(5)^3}{L(3)^3};$$

$$(620)\quad \begin{cases} \xi + \dfrac{9}{\xi} = x, & \eta + \dfrac{1}{\eta} = y, & \zeta + \dfrac{125}{\zeta} = z, \\ \xi - \dfrac{9}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \dfrac{1}{\eta} = \bar{y}, & \zeta - \dfrac{125}{\zeta} = \bar{z}; \end{cases}$$

$$(621)\quad \bar{y} = x + 5,\quad \bar{z} = \bar{x}(x+1),\quad z = y(\bar{y} - 9),$$

oder

$$(621\text{a})\quad y = \sqrt{x^2 + 10x + 29},\quad z = (x-4)\sqrt{x^2+10x+29}$$

III. $a=7,\ n=21;\ b=2,\ \alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=1;\ \varkappa=3,\ \lambda=2,\ \mu=1;$

$$(622)\quad \xi = \frac{L(21)^3\,L(3)^3}{L(7)^3},\quad \eta = \frac{L(7)^2\,L(3)^2}{L(21)^2},\quad \zeta = \frac{L(21)\,L(7)}{L(3)};$$

$$(623)\quad \begin{cases} \xi + \dfrac{27}{\xi} = x, & \eta + \dfrac{1}{\eta} = y, & \zeta + \dfrac{7}{\zeta} = z, \\ \xi - \dfrac{27}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \dfrac{1}{\eta} = \bar{y}, & \zeta - \dfrac{7}{\zeta} = \bar{z}; \end{cases}$$

$$(624)\quad x = \bar{y}(y-7),\quad \bar{x} = \bar{z}(z-1),\quad y = z + 3.$$

IV. $a=11,\ n=33;\ b=4,\ \alpha=1,\ \beta=5,\ \gamma=5;\ \varkappa=1,\ \lambda=6,\ \mu=3;$

$$(625)\quad \xi = \frac{L(33)\,L(3)}{L(11)},\quad \eta = \frac{L(11)^6\,L(3)^6}{L(33)^6},\quad \zeta = \frac{L(33)^3\,L(11)^3}{L(3)^3};$$

$$(626)\quad \begin{cases} \xi + \dfrac{3}{\xi} = x, & \eta + \dfrac{1}{\eta} = y, & \zeta + \dfrac{1331}{\zeta} = z, \\ \xi - \dfrac{3}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \dfrac{1}{\eta} = \bar{y}, & \zeta - \dfrac{1331}{\zeta} = \bar{z}, \end{cases}$$

$$(627)\qquad \begin{cases} y = x_5 + 11(x_4 + 6x_3 + 23x_2 + 63x + 126), \\ \bar{s} = \bar{x}_5 + 2\bar{x}_4 + 3\bar{x}_3 - 8\bar{x}_2 + 9\bar{x}, \end{cases}$$

oder

$$(627\,a)\qquad \begin{cases} y = x^5 + 11x^4 + 51x^3 + 121x^2 + 144x + 66, \\ \bar{s} = \bar{x}(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 20x + 9), \end{cases}$$

oder

$$(627\,b)\qquad \begin{cases} y - 2 = \bar{v}^2 = (x+1)(x^2 + 5x + 8)^2, \\ y + 2 = (x^3 + 7x^2 + 19x + 17)(x+2)^2, \\ s^2 = \bar{s}^2 + 5324 = (x+1)(x^3 + 7x^2 + 19x + 17) \times \\ \qquad\qquad \times (x^3 - 2x^2 - 9x + 16)^2. \end{cases}$$

Durch Elimination von x aus diesen Gleichungen findet man eine Gleichung zwischen y und s, die noch einfacher wird, wenn man die Grösse $\bar{y}$ durch die Relation

$$\bar{y}^2 = y^2 - 4 = (y-2)(y+2)$$

einführt. Für die Anwendungen genügt die Gleichung

$$(628)\qquad \bar{y}(x^3 - 2x^2 - 9x + 16) = s(x+2)(x^2 + 5x + 8),$$

die sich aus den Gleichungen (627 b) ohne Weiteres ergiebt.

V. $a = 13, n = 39;\ b = 4, \alpha = 7, \beta = 1, \gamma = 2;\ \varkappa = 6, \lambda = 1, \mu = 1;$

$$(629)\qquad \xi = \frac{L(39)^6\, L(3)^6}{L(13)^6}, \quad \eta = \frac{L(13)\, L(3)}{L(39)}, \quad \zeta = \frac{L(39)\, L(13)}{L(3)};$$

$$(630)\qquad \begin{cases} \xi + \frac{729}{\xi} = x, & \eta + \frac{1}{\eta} = y, & \zeta + \frac{13}{\zeta} = s, \\ \xi - \frac{729}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \frac{1}{\eta} = \bar{y}, & \zeta - \frac{13}{\zeta} = \bar{s}; \end{cases}$$

$$(631)\qquad \begin{cases} x = y_7 - 13(y_6 - 4y_5 + 2y_4 + 19y_3 - 28y_2 - 17y + 50), \\ s = y_2 - 3y - 3, \end{cases}$$

oder

$$(631\,a)\qquad \begin{cases} x = y^7 - 13y^6 + 45y^5 + 52y^4 - 493y^3 + 351y^2 \\ \qquad\qquad + 1215y - 1404, \\ s = y^2 - 3y - 5, \end{cases}$$

oder

$$(631\,b)\qquad \begin{cases} x - 54 = \bar{u}^2 = (y-2)(y^2 - 7y + 9)(y^2 - 2y - 9)^2, \\ x + 54 = (y+2)(y^2 + y - 3)(y-3)^2(y-5)^2, \\ s^2 - 52 = \bar{s}^2 = (y^2 - 7y + 9)(y^2 + y - 3). \end{cases}$$

Durch Elimination von y aus diesen Gleichungen findet man eine Gleichung zwischen x und s, die noch einfacher wird, wenn man die Grösse $\bar{x}$ durch die Relation

$$\bar{x}^2 = x^2 - 2916 = (x - 54)(x + 54)$$

einführt. Für die Anwendungen genügt die Gleichung

$$\bar{x} = \bar{y}\bar{z}(y^2 - 2y - 9)(y - 3)(y - 5), \tag{632}$$

die sich aus den Gleichungen (631b) ohne Weiteres ergiebt.

VI. $a = 17, n = 51;\ b = 6, \alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 8;\ \varkappa = 2, \lambda = 3, \mu = 3;$

$$\xi = \frac{L(51)^3 L(3)^3}{L(17)^3}, \quad \eta = \frac{L(17)^3 L(3)^3}{L(51)^3}, \quad \zeta = \frac{L(51)^3 L(17)^3}{L(3)^3}; \tag{633}$$

$$\xi + \frac{9}{\xi} = x, \quad \eta + \frac{1}{\eta} = y, \quad \eta - \frac{1}{\eta} = \bar{y}; \tag{634}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_3 = x_4 + 17[&(x + 14) y_2 + (-2x_2 + 26x - 109)\bar{y} \\ &+ (-2x_3 + 25x_2 - 140x + 504)],\end{aligned} \tag{635}$$

oder

$$\begin{aligned}\bar{y}^3 - 17(x + 14)\bar{y}^2 + (34x^2 - 442x + 1244)\bar{y} \\ - (x^4 - 34x^3 + 389x^2 - 1428x + 1556) = 0.\end{aligned} \tag{635a}$$

Die Gleichungen zwischen ξ und ζ und zwischen η und ζ mögen vorläufig ihres hohen Grades wegen übergangen werden.

VII. $a = 19, n = 57;\ b = 6, \alpha = 5, \beta = 3, \gamma = 3;\ \varkappa = 3, \lambda = 2, \mu = 1;$

$$\xi = \frac{L(57)^3 L(3)^3}{L(19)^3}, \quad \eta = \frac{L(19)^3 L(3)^3}{L(57)^3}, \quad \zeta = \frac{L(57)\, L(19)}{L(3)}; \tag{636}$$

$$\begin{cases} \xi + \frac{27}{\xi} = x, & \eta + \frac{1}{\eta} = y, & \zeta + \frac{19}{\zeta} = z, \\ \xi - \frac{27}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \frac{1}{\eta} = \bar{y}, & \zeta - \frac{19}{\zeta} = \bar{z}; \end{cases} \tag{637}$$

$$\begin{cases} \bar{y}_5 - x_3 + 19[\bar{y}x_2 - (y_3 + 30y_2 + 114y + 169)x \\ \qquad - 4\bar{y}_4 + 48\bar{y}_3 + 350\bar{y}_2 + 499\bar{y}] = 0, \\ \bar{x}_3 + 2\bar{z}x_2 + (4z_3 + 57z_2 + 438z + 2242)\bar{x} \\ \qquad - (\bar{z}_5 + 14\bar{z}_4 + 111\bar{z}_3 + 602\bar{z}_2 + 1885\bar{z}) = 0, \\ z_3 - 3(y+1)z_2 + 3(y_2 - 4y + 9)z - y_3 + 42y_2 + 24 = 0, \end{cases} \tag{638}$$

oder

$$(z - y)^3 - 3z^2 - 12(y + 3)z + (42y^2 + 117y + 54) = 0. \tag{638a}$$

§ 63.

Anwendung auf den Fall $n = 5a$.

Es sei $n' = 5$ und $n'' = a$ irgend eine Primzahl, welche von 5 verschieden ist, also $n = 5a$; dann wird

$$\xi = \frac{L(5a)^\varkappa L(5)^\varkappa}{L(a)^\varkappa}, \quad \eta = \frac{L(a)^\lambda L(5)^\lambda}{L(5a)^\lambda}, \quad \zeta = \frac{L(5a)^\mu L(a)^\mu}{L(5)^\mu}, \tag{639}$$

wobei

$$\varkappa = \frac{6\alpha}{a+1}, \quad \lambda = \frac{6\beta}{a-1}, \quad \mu = \frac{4\gamma}{a-1}. \tag{640}$$

Je nach den Werthen von a sind hier vier Fälle zu unterscheiden:

I. Für $a = 5b + 1$ setze man

$$v' = 1, \quad v'' = b, \quad \text{so dass} \quad v'n'' - v''n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix} -b, & 5b+1 \\ -1, & 5 \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} -1, & +5 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \cdot \varrho\begin{pmatrix} b, & -1 \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \varrho^{-b+2},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix} 1, & 5 \\ b, & 5b+1 \end{pmatrix} = \varrho^{b-5},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(641) \quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{4(b+1)\varkappa} \cdot \dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'} = \sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = \varrho^{4(b+1)\varkappa} \cdot \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

II. Für $a = 5b + 2$ setze man

$$v' = 3, \quad v'' = 3b + 1, \quad \text{so dass} \quad v'n'' - v''n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix} -3b-1, & 5b+2 \\ -3, & +5 \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} -3, & +5 \\ +1, & -2 \end{pmatrix} \cdot \varrho\begin{pmatrix} b, & -1 \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \varrho^{-b-1},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix} 3, & 5 \\ 3b+1, & 5b+2 \end{pmatrix} = \varrho^{b-2},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(642) \quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{(8b+6)\varkappa} \cdot \dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \varrho^{-(4b+2)\lambda} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'} = \varrho^{-6b\mu} \cdot \sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = \varrho^{(8b+6)\varkappa} \cdot \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \varrho^{(4b+2)\lambda} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''} = \varrho^{-6b\mu} \cdot \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

III. Für $a = 5b + 3$ setze man

$$v' = 2, \quad v'' = 2b + 1, \quad \text{so dass} \quad v'n'' - v''n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix} -2b-1, & 5b+3 \\ -2, & +5 \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} -2, & +5 \\ +1, & -3 \end{pmatrix} \cdot \varrho\begin{pmatrix} b, & -1 \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \varrho^{-b-1},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 2b+1, & 5b+3 \end{pmatrix} = \varrho^{b-2},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(643)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{(6b+6)\varkappa}\cdot\dfrac{\sqrt{\delta^{\varkappa}}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \varrho^{-(2b+2)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'} = \varrho^{-3b\mu}\cdot\sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = \varrho^{(6b+6)\varkappa}\cdot\sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \varrho^{(2b+2)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''} = \varrho^{-3b\mu}\cdot\dfrac{\sqrt{a^{\mu}}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{\delta^{\varkappa}}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^{\mu}}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

IV. Für $a = 5b + 4$ setze man

$$\nu' = 4,\quad \nu'' = 4b + 3,\quad \text{so dass}\quad \nu' n'' - \nu'' n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix} -4b-3, & 5b+4 \\ -4, & 5 \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} -4, & +5 \\ +3, & -4 \end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix} b, & -1 \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \varrho^{-b-4},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix} 4, & 5 \\ 4b+3, & 5b+4 \end{pmatrix} = \varrho^{b+1},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(644)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{10(b+1)\varkappa}\cdot\dfrac{\sqrt{\delta^{\varkappa}}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \varrho^{-6(b+1)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'} = \varrho^{-3(3b+1)\mu}\cdot\sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = \varrho^{10(b+1)\varkappa}\cdot\sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \varrho^{6(b+1)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''} = \varrho^{-3(3b+1)\mu}\cdot\dfrac{\sqrt{a^{\mu}}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{\delta^{\varkappa}}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^{\mu}}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

§ 64.

Beispiele für den Fall $n = 5a$.

I. $a = 2,\ n = 10;\ \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1;\ \varkappa = 2,\ \lambda = 6,\ \mu = 4;$

$$(645)\quad \sqrt{\xi} = \frac{L(10)\,L(5)}{L(2)},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(2)^3\,L(5)^3}{L(10)^3},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(10)^2\,L(2)^2}{L(5)^2}.$$

Dieses Beispiel geht also in Beispiel II des § 60 über, wenn man ξ mit ζ vertauscht.

II. $a = 3,\ n = 15;\ \alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 1;\ \varkappa = 3,\ \lambda = 3,\ \mu = 2;$

$$(646)\quad \xi = \frac{L(15)^3\,L(5)^3}{L(3)^3},\quad \eta = \frac{L(3)^3\,L(5)^3}{L(15)^3},\quad \zeta = \frac{L(15)^2\,L(3)^2}{L(5)^2}.$$

Dieses Beispiel geht also in Beispiel II des § 62 über, wenn man ξ mit ζ vertauscht.

III. $a=7,\ n=35;\ \alpha=4,\ \beta=1,\ \gamma=3;\ \varkappa=3,\ \lambda=1,\ \mu=2;$

(647) $$\xi=\frac{L(35)^3\,L(5)^3}{L(7)^3},\quad \eta=\frac{L(7)\,L(5)}{L(35)},\quad \zeta=\frac{L(35)^2\,L(7)^2}{L(5)^2};$$

(648) $$\begin{cases}\xi+\frac{125}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{49}{\zeta}=z,\\ \xi-\frac{125}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\frac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\frac{49}{\zeta}=\bar{z};\end{cases}$$

(649) $$\begin{cases}x=\bar{y}_4-7(y_3-\bar{y}_2-2y),\\ \bar{x}_3+\bar{z}x_2+(z_2-16z-249)\,\bar{x}-\bar{z}_4-\bar{z}_3+58\bar{z}_2+457\bar{z}=0,\\ z=\bar{y}_3-5y_2+5,\end{cases}$$

oder

(649a) $$x=y(\bar{y}^3-7\bar{y}^2+9\bar{y}+7),\quad z=\bar{y}^3-5\bar{y}^2+3\bar{y}-5,$$

oder

(649b) $$\begin{cases}\bar{x}=(\bar{y}-1)\,(\bar{y}-4)\sqrt{(\bar{y}+1)\,(\bar{y}^3-5\bar{y}^2+3\bar{y}-19)},\\ \bar{z}=(\bar{y}-3)\sqrt{(\bar{y}+1)\,(\bar{y}^3-5\bar{y}^2+3\bar{y}-19)}.\end{cases}$$

Daraus folgt noch die für die Anwendungen brauchbare Gleichung

(650) $$(\bar{y}-1)\,(\bar{y}-4)\,\bar{z}=(\bar{y}-3)\,\bar{x}.$$

IV. $a=11,\ n=55;\ \alpha=2,\ \beta=5,\ \gamma=5;\ \varkappa=1,\ \lambda=3,\ \mu=2;$

(651) $$\xi=\frac{L(55)\,L(5)}{L(11)},\quad \eta=\frac{L(11)^3\,L(5)^3}{L(55)^3},\quad \zeta=\frac{L(55)^2\,L(11)^2}{L(5)^2};$$

(652) $$\begin{cases}\xi+\frac{5}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{121}{\zeta}=z,\\ \xi-\frac{5}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\frac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\frac{121}{\zeta}=\bar{z};\end{cases}$$

(653) $$\begin{cases}y_2=x_5+11[(x_2+10x+35)\,y\\ \qquad\qquad +(x_4+5x_3+20x_2+75x+207)],\\ z_2=(x_2-10)\,z+x_5+x_4+25x_2-25x-58,\end{cases}$$

oder

(653a) $$\begin{cases}y^2-11(x+5)^2y-(x^5+11x^4+30x^3+0+125x+629)=0,\\ z^2-(x^2-20)y-(x^5+x^4-25x^3+5x^2+100x-16)=0,\end{cases}$$

oder

(653b) $$\begin{cases}2y-11(x+5)^2=(x^2+18x+61)\sqrt{4x+21},\\ 2z-(x^2-20)=(x^2-2x-4)\sqrt{4x+21}.\end{cases}$$

Daraus findet man noch die für die Anwendungen brauchbare Gleichung

(654) $$\begin{aligned}&[2y-11(x+5)^2]\,(x^2-2x-4)\\ &=[2z-(x^2-20)]\,(x^2+18x+61).\end{aligned}$$

Bemerkenswerth ist es, dass man die vorstehenden Gleichungen auch auf die Form

(655) $$\begin{cases}\bar{y}^2=(x+5)^2\,(11y+x^3+x^2-5x+25),\\ \bar{z}^2=(x^2-20)\,(z+x^3+x^2-5x+25),\\ \bar{y}^2(x^2-20)-\bar{z}^2(x+5)^2+(z-11y)\,(x+5)^2\,(x^2-20)=0\end{cases}$$

bringen kann.

V. $a=13,\ n=65;\ \alpha=7,\ \beta=2,\ \gamma=3;\ \varkappa=3,\ \lambda=1,\ \mu=1;$

$$(656)\qquad \xi=\frac{L(65)^3\,L(5)^3}{L(13)^3},\quad \eta=\frac{L(13)\,L(5)}{L(65)},\quad \zeta=\frac{L(65)\,L(13)}{L(5)};$$

$$(657)\qquad \begin{cases} \xi+\frac{125}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{13}{\zeta}=z, \\ \xi-\frac{125}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\frac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\frac{13}{\zeta}=\bar{z}; \end{cases}$$

$$(658)\qquad \begin{cases} x_2-\bar{y}_7+13[(y_3-2\bar{y}_2)\,x+(2y_6-16\bar{y}_5+36y_4+33\bar{y}_3 \\ \qquad\qquad -108y_2-103\bar{y}+166)]=0, \\ z_2+5yz-\bar{y}_3+10y_2+30=0, \end{cases}$$

oder

$$(658a)\qquad \begin{cases} x^2+13y(\bar{y}-1)^2\,x-(\bar{y}^7-26\bar{y}^6+215\bar{y}^5-624\bar{y}^4+625\bar{y}^3 \\ \qquad\qquad -702\bar{y}^2+1099\bar{y}-88)=0, \\ z^2+5yz-\bar{y}^3+10\bar{y}^2-3\bar{y}+24=0, \end{cases}$$

oder

$$(658b)\qquad \begin{cases} 2x=-13y(\bar{y}-1)^2+(\bar{y}-2)\,(\bar{y}+1)\,(\bar{y}+9)\sqrt{4\bar{y}+1}, \\ 2z=-5y+(\bar{y}-2)\sqrt{4\bar{y}+1}. \end{cases}$$

Die Gleichung zwischen x und z kann man daher ersetzen durch die Gleichung

$$(659)\qquad (2z+5y)\,(\bar{y}+1)\,(\bar{y}+9)=2x+13y(\bar{y}-1)^2.$$

VI. $a=17,\ n=85;\ \alpha=3,\ \beta=8,\ \gamma=4;\ \varkappa=1,\ \lambda=3,\ \mu=1;$

$$(660)\qquad \xi=\frac{L(85)\,L(5)}{L(17)},\quad \eta=\frac{L(17)^3\,L(5)^3}{L(85)^3},\quad \zeta=\frac{L(85)\,L(17)}{L(5)};$$

$$(661)\qquad \begin{cases} \xi+\frac{5}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{17}{\zeta}=z; \\ \xi-\frac{5}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\frac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\frac{17}{\zeta}=\bar{z}; \end{cases}$$

$$(662)\qquad \bar{z}_3-x\bar{z}_2-(x_2-12)\,\bar{z}+8\bar{x}z-\bar{x}_4-13\bar{x}_2=0,$$

oder

$$(662a)\qquad \bar{z}(z^2-xz-x^2+5)=\bar{x}(x^3+3x-8z).$$

Die Gleichungen zwischen ξ und η, bezw. zwischen η und ζ mögen vorläufig übergangen werden.

Ebenso soll die Ausführung weiterer Beispiele an dieser Stelle unterbleiben, weil die Anwendung dieser Untersuchungen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen noch andere Hülfsmittel bieten wird, durch welche man die Rechnungen einfacher gestalten kann.

Hannover, im März 1890.

Inhalts-Verzeichniss.

		Band	Seite
	Einleitung	32	1
	Erster Theil.		
	Allgemeine Untersuchungen.		
	I. Abschnitt.		
	Eigenschaften der Transformationsgleichungen.		
§ 1.	Zurückführung der reducirten Theilungsgleichung auf Transformationsgleichungen	„	8
§ 2.	Berechnung der Theilwerthe n^{ten} Grades der Function $\wp u$	„	15
§ 3.	Einige Sätze über die Bildung von Transformationsgrössen	„	17
§ 4.	Wirkliche Herleitung einiger Transformationsgrössen	„	19
§ 5.	Transformationsgleichungen nullter Dimension oder invariante Multiplicatorgleichungen	„	28
§ 6.	Eigenschaften der Invariantengleichung $F(\overline{J}, J) = 0$	„	31
§ 7.	Der Rang der Invariantengleichung	„	36
§ 8.	Tabelle	„	42.
	II. Abschnitt.		
	Eigenschaften der Parameter.		
§ 9.	Bildung von Parametern	„	44
§ 10.	Definition und Berechnung des Charakters, welchen ein Parameter besitzt	„	49
§ 11.	Complementäre Parameter	„	52
	Zweiter Theil.		
	Anwendungen.		
	III. Abschnitt.		
	Transformation vom Grade 2^α.		
§ 12—16.	Transformation vom Grade 2, 4, 8, 16, 2^α	„	55
	IV. Abschnitt.		
	Transformation vom Grade 3^α.		
§ 17—22.	Transformation vom Grade 3, 9, 27, 81, 243, 3^α	„	65
	V. Abschnitt.		
	Transformation vom Grade a^α, wenn a eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$ ist.		
§ 23—28.	Transformation vom Grade a, a^2, (25, 49) a^3, (125), a^α	„	74
	VI. Abschnitt.		
	Transformation vom Grade $2a$.		
§ 29.	Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $2a$	„	83
§ 30—35.	Transformation vom Grade 6, 10, 14, 22, 11, 26	„	83

VII. Abschnitt.
Transformation vom Grade $4a$.

		Band	Seite
§ 36.	Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $4a$	32	102
§ 37—39.	Transformation vom Grade 12, 20, 28	„	103

VIII. Abschnitt.
Transformation vom Grade $2^{\alpha}.a$.

§ 40—42.	Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $8a$, $16a$, $2^{\alpha}.a$	„	112
§ 43—45.	Transformation vom Grade 24, 48, 96 u. s. w., 40, 80 u. s. w.	„	116

IX. Abschnitt.
Transformation vom Grade $3a$.

§ 46.	Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $3a$	„	120
§ 47—48.	Transformation vom Grade 15, 21	„	120

X. Abschnitt.
Transformation vom Grade $9a$.

§ 49.	Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $9a$	„	126
§ 50—51.	Transformation vom Grade 18, 45	„	126

XI. Abschnitt.
Transformation vom Grade $6a$.

§ 52.	Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $6a$	„	131
§ 53.	Transformation vom Grade 30	„	132

Dritter Theil.
Vereinfachung der Parametergleichungen.

XII. Abschnitt.
Beziehungen zwischen den verschiedenen Wurzeln einer Parametergleichung.

§ 54.	Vereinfachungen bei beliebiger Zusammensetzung des Transformationsgrades	37	369
§ 55.	Anwendung auf den Fall $n = a^2$	„	373
§ 56.	Beispiele für den Fall $n = a^2$ ($n = 4, 9, 25, 49$)	„	374
§ 57.	Anwendung auf den Fall $n = n'n''$	„	375
§ 58.	Anwendung auf den Fall $n = 2a$	„	382
§ 59.	Weitere Vereinfachungen	„	383
§ 60.	Beispiele für den Fall $n = 2a$ ($n = 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62$)	„	384
§ 61.	Anwendung auf den Fall $n = 3a$	„	389
§ 62.	Beispiele für den Fall $n = 3a$ ($n = 6, 15, 21, 33, 39, 51, 57$)	„	390
§ 63.	Anwendung auf den Fall $n = 5a$	„	392
§ 64.	Beispiele für den Fall $n = 5a$ ($n = 10, 15, 35, 55, 65, 85$)	„	394

Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln.

Von

A. Mayer in Leipzig.

Nach der Art, wie man bei Differentialgleichungen von der Form

$$y' = Y(x, y)$$

die singulären Lösungen aus der vollständigen abzuleiten pflegt*), erscheint es als ganz selbstverständlich, dass jeder, von x abhängige Werth der Integrationsconstanten c, welcher die vollständige Lösung:

$$\alpha) \quad y = \varphi(x, c)$$

wiederum in eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung überführt, nothwendig der Bedingung:

$$\beta) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$$

genügen, und folglich die neue Lösung stets eine Enveloppe der Curvenschaar α) darstellen müsse.

Dieser Satz ist indessen durchaus nicht allgemein gültig, vielmehr selbst dann, wenn man sich auf reelle Werthe von c beschränkt, an sehr enge Grenzen gebunden, und ausserhalb derselben giebt es sogar unendlich viele, von x abhängige Werthe der willkürlichen Constanten c, welche die vollständige Lösung α) ebenfalls in eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung transformiren.**)

*) Vgl. z. B. Serret-Harnack II, 2, p. 36.

**) Hiernach hat auch die Fragestellung in der Anmerkung zu p. 375 des Bandes XXII dieser Annalen im Allgemeinen keinen Sinn. Das aber, was durch dieselbe begründet werden sollte, bleibt trotzdem richtig. Denn nach der Definition der Enveloppe als einer Curve, welche die gegebene Curvenschaar umhüllt und berührt, gehört ja jede Lösung y von Enveloppencharakter zu den im neueren Sinne singulären Lösungen, d. h. sie stellt eine solche Integralcurve der gegebenen Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0$$

dar, längs deren zwei Wurzeln y' der Gleichung einander gleich werden, und muss daher, so oft die gegebene Gleichung sich in Bezug auf y und y' wie eine

Dieses eigenthümliche und je nach der Natur der vorgelegten Differentialgleichung völlig verschiedenartige Verhalten der vollständigen Lösungen wird sicher nicht ganz unbemerkt geblieben sein, ist aber, soviel ich weiss, noch nirgends hervorgehoben worden, und daher dürfte der folgende Versuch, die inneren Gründe der auffälligen Erscheinung klar zu legen, Manchem nicht unwillkommen sein. —

In der gegebenen Differentialgleichung

$$y' = Y(x, y) \tag{1}$$

sei *erstens* die rechte Seite eine, wenigstens solange sie reell bleibt, *eindeutige* Function der beiden reellen Variabeln x und y, und *zweitens* besitze die Gleichung selbst eine vollständige Lösung:

$$y = \varphi(x, c), \tag{2}$$

welche, bei jedem gegebenen reellen constanten Werthe von c, der Differentialgleichung für alle Werthe von x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ genüge.

In Folge der zweiten Voraussetzung ist dann für jedes reelle x und c:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv Y(x, \varphi). \tag{3}$$

Soll nun die Gleichung (1) auch dann noch die Lösung (2) zulassen, nachdem man in dieser der willkürlichen Constanten c einen von x abhängigen reellen Werth beigelegt hat, so muss nach der ersten Voraussetzung nothwendig auch:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} \equiv Y(x, \varphi),$$

---

ganze rationale Gleichung ohne vielfache Wurzeln verhält, eben nothwendig zugleich auch eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

sein.

Will man aber diese, dem ganzen Gedankengang meiner früheren Arbeit fremde Ueberlegung nicht benutzen, so braucht man nur zu bedenken, dass, wenn $c = f(x, y)$ die Auflösung der Gleichung $\alpha)$ nach der willkürlichen Constanten, und $c = \Theta(x)$ irgend eine Wurzel der Gleichung $\beta)$ ist, die Function $y = \varphi\big(x, \Theta(x)\big)$ der Gleichung $f(x, y) = \Theta(x)$ und wegen

$$\frac{\partial \varphi\big(x, \Theta(x)\big)}{\partial \Theta(x)} \equiv 0,$$

damit zugleich auch der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi(x, f)}{\partial f} = 0$$

Genüge leistet, woraus sich dann nach p. 371|2 des genannten Bandes sofort wieder das gleiche Resultat ergiebt.

und wegen der Relation (3) daher identisch:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0 \tag{4}$$

werden.

So oft also, wie z. B. für die Differentialgleichung

$y' = y^{\frac{2}{3}}$, deren vollständige Lösung ist: $y = \left(\frac{x-c}{3}\right)^3$,

die beiden obigen Voraussetzungen erfüllt sind, muss jeder reelle, von x abhängige Werth der Integrationsconstanten c, welcher die vollständige Lösung (2) *wiederum in eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung transformirt, stets zugleich auch der Gleichung* (4) *genügen.*

Aber diese beiden Voraussetzungen sind hierzu nicht bloss hinreichend, sondern auch nothwendig: *der Satz verliert seine Gültigkeit, sobald die eine oder andere Voraussetzung nicht erfüllt ist.*

So wird z. B. die vollständige Lösung:

$$y = \frac{4}{(c-x)^2}$$

der Differentialgleichung:

$$y' = y^{\frac{3}{2}}$$

in sich selbst übergeführt durch die reelle Substitution mit der willkürlichen Constanten γ:

$$c = 2x - \gamma.$$

Diese Differentialgleichung widerspricht aber auch unserer ersten Voraussetzung, so lange man das Doppelzeichen der Wurzel willkürlich lässt, und jede der beiden, in ihr enthaltenen eindeutigen Differentialgleichungen:

$$y' = +\sqrt{y^3} \quad \text{und} \quad y' = -\sqrt{y^3}$$

entzieht sich der zweiten Voraussetzung, weil der obige Werth von y der ersten nur für $x < c$, der zweiten nur für $x > c$ genügt.

Genau ebenso muss sich überhaupt jede Gleichung (1) verhalten, welche durch Auflösung nach y' aus einer solchen gegebenen Differentialgleichung:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

erhalten wurde, die mehrere verschiedene reelle Wurzeln y', dabei aber (wie die rationalen Clairaut'schen Differentialgleichungen) nur eine einzige, und zwar eindeutige, vollständige Lösung besitzt. Denn die letztere kann jeder einzelnen, in der gegebenen Gleichung enthaltenen, reellen und eindeutigen Differentialgleichung immer nur in einem solchen Intervalle genügen, in welchem sie den anderen nicht genügt.

Für die ganze Differentialgleichung (5) *selbst aber wird der obige Satz schon dann hinfällig, wenn dieselbe überhaupt nur mehrere verschiedene reelle Wurzeln y' zulässt.*

In der That nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die vorgelegte Differentialgleichung (5), welche die, für jedes reelle x und c gültige, vollständige Lösung (2) besitze, *in Bezug auf y' eine ganze rationale Gleichung von einem Grade $n > 1$ und ohne vielfache Wurzeln bilde.*

Führt man dann durch die Substitution (2) die Grösse c als neue abhängige Variable an Stelle von y ein, so geht die Gleichung (5) über in:

$$F\left(x,\ \varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx}\right) = 0,$$

und verwandelt sich also, wenn man entwickelt und die Ausführung der Substitutionen:

$$y = \varphi,\quad y' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

durch Einschliessung in eckige Klammern anzeigt, wegen der Identität $[F] \equiv 0$ in:

$$(6)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n F}{\partial y'^n}\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx}\right)^{n-1}\right\} = 0.$$

Daher bleibt die vollständige Lösung (2) nicht bloss für die Wurzeln c der Gleichung (4), sondern auch für jede Function c von x, welche der Bedingung:

$$(7)\quad \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n F}{\partial y'^n}\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx}\right)^{n-1} = 0$$

Genüge leistet, immer noch eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (5).

Nun ist die Gleichung (6), da sie aus der algebraischen Gleichung (5) dadurch entstand, dass an Stelle des Parameters y und der Unbekannten y' respective die Grössen c und $\frac{dc}{dx}$ eingeführt wurden, nothwendig wiederum eine Gleichung n^{ten} Grades, die keine vielfachen Wurzeln besitzt, und daher ist (7) stets eine Differentialgleichung 1. O. und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades für die neue unbekannte Function c, und zwar eine Gleichung, die niemals nothwendig $c =$ const. erheischt.

Jede vollständige Lösung c der Gleichung (7) enthält somit sicher x und führt zugleich die gegebene vollständige Lösung (2) stets wiederum über in eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (5), *transformirt also entweder*, wie bei der Gleichung $y'^2 - y^3 = 0$, *die vollständige Lösung* (2) *in sich selbst, oder verwandelt dieselbe in eine andere vollständige Lösung der Gleichung* (5). Letzteres tritt z. B. für

die Differentialgleichung $xy'^2 = 1$ und ihre beiden vollständigen Lösungen $y = \pm 2\sqrt{x} + c$ ein.

So oft daher die Gleichung (5) nicht, wie die Gleichung $y'^3 - y^2 = 0$, nur eine einzige reelle Wurzel y', und damit die Gleichung (7) nicht bloss complexe Wurzeln $\frac{dc}{dx}$ besitzt, existiren neben den etwaigen reellen und variabeln Wurzeln c der Gleichung (4) stets noch unendlich viele andere, von x abhängige, reelle Werthe dieser Constanten, deren Substitution die gegebene vollständige Lösung (2) immer wieder in eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (5) überführt, und diese Differentialgleichung gehorcht also nicht mehr dem Satze, dass jeder reelle, variable Werth von c, für welchen ihre vollständige Lösung (2) noch Lösung bleibt, einer Enveloppe der Curvenschaar (2) angehören müsse. —

Leipzig, den 20. August 1890.

Zur Theorie der Bessel'schen Functionen.

Von

H. Weber in Marburg.

Unter Bessel'schen Functionen im weiteren Sinne versteht man bekanntlich alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\text{I.} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

worin x die unabhängige Veränderliche, n einen Parameter bedeutet, der bei den Bessel'schen Functionen im engeren Sinne eine ganze Zahl ist. Auf diese Differentialgleichung führen verschiedene Probleme der mathematischen Physik, besonders solche, die sich auf die Integration der Potentialgleichung für cylindrische Räume beziehen. Aber auch bei manchen die Kugel betreffenden Aufgaben, z. B. bei der Bewegung der Wärme in einer Kugel tritt dieselbe Differentialgleichung auf, nur dass hier nicht n sondern erst $2n$ eine ganze Zahl ist. Neben der Differentialgleichung I kommt vielfach noch eine zweite Differentialgleichung vor:

$$\text{II.} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

die man aus I erhält, wenn man x durch ix ersetzt (wenn i die Bedeutung $\sqrt{-1}$ hat). Es kommen also die Bessel'schen Functionen sowohl für *reelle* als für *imaginäre* Argumente vor. So hat Riemann in der Abhandlung „über die Nobili'schen Farbenringe" (Gesammelte Werke S. 58) diese letzteren Functionen für $n = 0$ eingeführt, und Entwicklungen dafür gegeben. Unter diesen Entwicklungen sind die nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden, obwohl nur halbconvergent, für die Berechnung bei grösseren Werthen von x sehr gut brauchbar. Herr Dr. Elsass, der bei physikalischen Arbeiten diese Functionen benutzen wollte, hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass die Ableitung dieser Entwickelungen namentlich für die eine der beiden Functionen Schwierigkeiten macht. Diese halbconvergenten Entwicklungen allgemein zu untersuchen ist der hauptsächlichste Zweck der folgenden Mittheilung. Wir setzen dabei das Argument x als unbeschränkt veränderlich (complex) voraus. Auch über n machen wir

keinerlei beschränkende Voraussetzung, nur wollen wir es der Einfachheit halber reell annehmen.

In Bezug auf die benutzte Bezeichnung sei noch bemerkt, dass nach Gauss (Disquisitiones circa seriem infinitam etc. Werke Bd. III, S. 125) unter $\Pi(\alpha)$ die durch die folgenden Gleichungen definirte Function

III. $$\Pi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-s} s^\alpha \, ds, \qquad \Pi\alpha = \alpha\,\Pi(\alpha-1)$$

und unter $\Psi(\alpha)$ die Function

IV. $$\Psi(\alpha) = \frac{d \lg \Pi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\Pi'(\alpha)}{\Pi(\alpha)}$$

verstanden wird, so dass nach der Legendre'schen Bezeichnung $\Pi(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ ist. $\Pi(\alpha)$ wird für ein negatives ganzzahliges α unendlich und hat sonst für jedes reelle α einen endlichen Werth. Für ein positives ganzzahliges α ist

$$\Pi(\alpha) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \alpha,$$

$$\psi(\alpha) = \psi(0) + 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{\alpha},$$

$$\psi(0) = -\,0{,}5772156649 \ldots.$$

Es mögen hier noch die Formeln Platz finden (Gauss, l. c. Art. 25, 26 u. 27)

$$\Pi\left(-\tfrac{1}{2}+\alpha\right)\Pi\left(-\tfrac{1}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\cos \alpha\pi},$$

$$2^{2\alpha}\,\Pi\left(-\tfrac{1}{2}+\alpha\right)\Pi(\alpha) = \sqrt{\pi}\,\Pi(2\alpha),$$

$$\int_0^1 s^\alpha (1-s)^\alpha \, d\alpha = \frac{\Pi(\alpha)\,\Pi(\alpha)}{\Pi(2\alpha+1)}.$$

I.

Wir definiren zwei Functionen $S_1(x)$, $S_2(x)$ der complexen Veränderlichen x durch folgende Integrale

(1)
$$S_1(x) = \frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^\alpha \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^\alpha ds,$$

$$S_2(x) = \frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^\alpha \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^\alpha ds,$$

worin α eine beliebige reelle Grösse bedeutet, die wir grösser als -1 voraussetzen (da sonst die Integrale nicht convergiren würden). Ist es nöthig, α in die Bezeichnung mit aufzunehmen, so setzen wir $S_1(x, \alpha)$, $S_2(x, \alpha)$. Nehmen wir die Integrationswege (1) reell an,

und erklären die Potenzen s^α, $\left(1 \mp \frac{s}{2ix}\right)^\alpha$ so, dass s^α reell und positiv ist, $\left(1 \mp \frac{s}{2ix}\right)^\alpha$ für $s = 0$ in 1 übergeht, so sind diese Functionen eindeutig bestimmt, ausser wenn x rein imaginär ist.

Bestimmen wir zunächst in der angegebenen Weise die Functionen $S_1(x)$, $S_2(x)$ für ein x mit positivem reellen Theil, so können wir es durch stetige Fortsetzung allgemein bestimmen, erhalten aber mehrdeutige Functionen, die ihren Werth ändern beim Umkreisen des Nullpunktes. Wie diese Aenderung beschaffen ist, zeigen die beistehenden Figuren, welche in einer Ebene gezeichnet sind, welche gleichzeitig die Variable x und die Variable s darstellt.

In S_1 kann die reelle Axe als Integrationsweg genommen werden, so lange nicht x den negativen Theil der imaginären Axe überschreitet; dann muss der Integrationsweg ausweichen, und erhält nach einem vollen positiven Umlauf des x die in Fig. 1 dargestellte Gestalt.

Fig. 1.

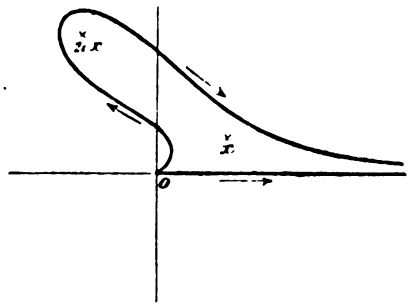
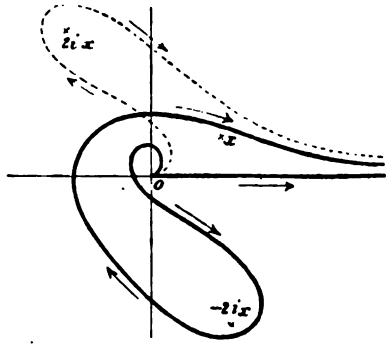


Fig. 2.



Bei S_2 muss der Integrationsweg bereits ausweichen, wenn x den positiven Theil der imaginären Axe erreicht; nach einem halben Umlauf des Punktes x erhält er die Gestalt der in Fig. 2 punktirt gezeichneten Linie und nach einem vollen Umlauf die Gestalt der ausgezogenen krummen Linie. Wenn man dann die um den Punkt $+2ix$ oder $-2ix$ herum laufende Schleife in geradlinige Strecken zusammenzieht und mit S_1', S_2' die Werthe bezeichnet, welche S_1, S_2 nach einem vollen Umlauf des x annehmen, so ist

$$(2)\qquad \begin{aligned} S_1' &= e^{-2\pi i\alpha} S_1 + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_0^{2ix} e^{-s} s^\alpha \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^\alpha ds, \\ S_2' &= e^{-2\pi i\alpha} S_2 + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_0^{-2ix} e^{-s} s^\alpha \left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^\alpha ds, \end{aligned}$$

wofür man auch schreiben kann

$$S_1' = e^{-2\pi i\alpha} S_1 + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \frac{(2ix)^{\alpha+1}}{\Pi(\alpha)} \int_0^1 e^{-2ixs} s^\alpha (1-s)^\alpha ds,$$

(3)

$$S_2' = e^{-2\pi i\alpha} S_2 + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \frac{(-2ix)^{\alpha+1}}{\Pi(\alpha)} \int_0^1 e^{2ixs} s^\alpha (1-s)^\alpha ds.$$

Wollen wir also S_1 und S_2 zu eindeutig bestimmten Functionen von x machen, so müssen wir die Ebene der x durch einen Schnitt begrenzen, den wir vom Nullpunkt ins Unendliche verlaufen lassen.

II.

Die Functionen S_1, S_2 genügen, wenn α positiv ist, den folgenden Recursionsformeln

$$S_1(x, \alpha-1) = S_1(x, \alpha+1) + \frac{2\alpha+1}{ix} S_1(x, \alpha),$$

(4)

$$S_2(x, \alpha-1) = S_2(x, \alpha+1) - \frac{2\alpha+1}{ix} S_2(x, \alpha).$$

Um die erste zu beweisen, setzen wir nach I, (1):

$$(5)\quad S_1(x, \alpha-1) - \frac{2\alpha+1}{ix} S_1(x, \alpha) - S_1(x, \alpha+1)$$
$$= \frac{1}{\Pi(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^{\alpha-1} \left\{\alpha(\alpha+1) - \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{ix} s \left(1 - \frac{s}{2ix}\right) - s^2 \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^2\right\} ds.$$

Es ist aber

$$(6)\quad \frac{d}{ds} e^{-s} \left\{s^{\alpha+1} \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^{\alpha+1} + (\alpha+1) s^\alpha \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^\alpha \left(1 - \frac{s}{ix}\right)\right\}$$
$$= e^{-s} s^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^{\alpha-1} \left\{\alpha(\alpha+1) - \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{ix} s \left(1 - \frac{s}{2ix}\right) - s^2 \left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^2\right\},$$

so dass sich durch Integration dieser Formel zwischen den Grenzen 0 und ∞ mittelst (5) die erste Formel (4) ergiebt, und durch Vertauschung von i mit $-i$ die zweite.

III.

Die Functionen $S_1(x)$, $S_2(x)$ genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 S_1}{dx^2} + 2i \frac{dS_1}{dx} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} S_1 = 0,$$

(7)

$$\frac{d^2 S_2}{dx^2} - 2i \frac{dS_2}{dx} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} S_2 = 0.$$

Um diese Gleichungen nachzuweisen, kann man wie in II verfahren, indem man durch zweimalige Differentiation bildet:

$$\frac{d^2S_1}{dx^2} + 2i\frac{dS_1}{dx} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}S_1$$

$$= \frac{4\alpha}{(2ix)^2}\int_0^\infty e^{-s}s^\alpha\left(1-\frac{s}{2ix}\right)^{\alpha-2}\left(\alpha+1-s-\frac{\alpha s}{ix}+\frac{s^2}{2ix}\right)ds$$

$$= \frac{4\alpha}{(2ix)^2}\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{2ix}\right)^{\alpha-1}\right)ds = 0$$

und ebenso beweist man die zweite Gleichung (7).

Setzt man nun

$$u_1 = e^{ix}S_1(x),$$
$$u_2 = e^{-ix}S_2(x), \tag{8}$$

so ergiebt sich aus (7) das Resultat, *dass u_1, u_2 die beiden particularen Lösungen der Differentialgleichung*

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}\right)u = 0 \tag{9}$$

sind. Durch die Substitution

$$u = \sqrt{x}\,y \tag{10}$$

geht die Differentialgleichung (9) in die Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen über:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{11}$$

IV.

Wenn α eine ganze Zahl ist, so kann man in den Formeln (1) den binomischen Lehrsatz anwenden und findet $S_1(x)$, $S_2(x)$ als rationale Functionen von x. Dasselbe Resultat findet man, wenn man die Differentialgleichungen (7) durch Potenzreihen zu integriren sucht. Dies letztere Verfahren ist auch auf beliebige Werthe von α anwendbar, und giebt für die Functionen $S_1(x)$, $S_2(x)$ immer convergente Potenzreihen. Dasselbe Ziel erreicht man aber in einfacherer Form, wenn man die Differentialgleichung (9) durch Reihen, die nach steigenden Potenzen von x fortschreiten, integrirt. Man findet durch die Methode der unbestimmten Coefficienten für die Differentialgleichung (9) die beiden particularen Integrale

$$U_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{0,\infty}^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}\frac{(-1)^\nu}{\Pi(\nu)\Pi\left(\alpha+\frac{1}{2}+\nu\right)},$$

$$U_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}\sum_{0,\infty}^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}\frac{(-1)^\nu}{\Pi(\nu)\Pi\left(-\alpha-\frac{1}{2}+\nu\right)}, \tag{12}$$

und für S_1, S_2 erhält man also, wenn A_1, B_1, A_2, B_2 noch zu bestimmende Constanten sind

$$S_1(x) = A_1 e^{-ix} U_1 + B_1 e^{-ix} U_2,$$
$$S_2(x) = A_2 e^{ix} U_1 + B_2 e^{ix} U_2.$$

Die Constanten B_1 und B_2 erhält man, wenn man $x = 0$ setzt,

$$B_1 = e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} \frac{\Pi(2\alpha)\Pi\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)}{2^{2\alpha}\Pi(\alpha)}, \quad B_2 = e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} \frac{\Pi(2\alpha)\Pi\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)}{2^{2\alpha}\Pi(\alpha)}$$

oder mit Benutzung der im Eingang erwähnten Formeln über die Π-Function

$$B_1 = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}}{\cos \alpha\pi}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}}}{\cos \alpha\pi}.$$

Um A_1, A_2 zu bestimmen, lasse man x einen Umkreis um den Nullpunkt in positivem Sinne beschreiben. Dadurch ändern sich S_1 und S_2 nach den Formeln (2), (3), während U_1, U_2 die Factoren $e^{2\pi i\alpha}$, $e^{-2\pi i\alpha}$ annehmen. Daraus ergiebt sich

$$A_1 e^{-ix} U_1 \cos \alpha\pi = 2^\alpha x^{\alpha+1} e^{-\frac{\pi i(\alpha-1)}{2}} \frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_0^1 e^{-2ixs} s^\alpha (1-s)^\alpha ds,$$

und wenn man durch $x^{\alpha+1}$ dividirt und dann $x = 0$ setzt

$$A_1 = \frac{e^{-\frac{\pi i(\alpha-1)}{2}} \sqrt{\pi}}{\cos \alpha\pi}, \quad A_2 = \frac{e^{\frac{\pi i(\alpha-1)}{2}} \sqrt{\pi}}{\cos \alpha\pi},$$

so dass wir erhalten

$$\frac{\cos \alpha\pi}{\sqrt{\pi}} S_1 = e^{-i\left(x+\frac{\pi(\alpha-1)}{2}\right)} U_1 + e^{-i\left(x-\frac{\alpha\pi}{2}\right)} U_2,$$
(13)
$$\frac{\cos \alpha\pi}{\sqrt{\pi}} S_2 = e^{i\left(x+\frac{\pi(\alpha-1)}{2}\right)} U_1 + e^{i\left(x-\frac{\alpha\pi}{2}\right)} U_2.$$

V.

In dem Falle wo $\alpha + \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl ist, der auf die Bessel'schen Functionen im engeren Sinn führt, und also für die Anwendungen gerade der wichtigste ist, sind die Entwickelungen (13), unmittelbar nicht anwendbar, weil beide Seiten identisch verschwinden. Durch einen Grenzübergang gelangt man aber auch in diesem Falle zu den geeigneten Entwickelungen.

Wir setzen

$$\alpha + \tfrac{1}{2} = n + \beta,$$

und verstehen unter n eine nicht negative ganze Zahl. Die erste Gleichung (13) lässt sich dann mit Benutzung der für jedes ganzzahlige ν gültigen Relation

$$\cos\alpha\pi = (-1)^n \sin\pi\beta = (-1)^\nu \sin\pi(n-\nu+\beta)$$
$$= \frac{(-1)^\nu\pi}{\Pi(\nu-n-\beta)\Pi(n-\nu-\beta-1)}$$

nach Absonderung der n ersten Glieder von U_2 in der Form schreiben:

$$(14)\qquad S_1 e^{ix} = e^{\left(n+\beta-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\sum_{0,n-1}^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-n-\beta}\frac{\Pi(n-\nu-\beta-1)}{\Pi(\nu)}$$
$$+\sqrt{\frac{x\pi}{2}}\frac{e^{\frac{\pi i}{2}\left(n+\beta-\frac{1}{2}\right)}}{\sin\pi\beta}\sum_{0,\infty}^{\nu}(-1)^\nu\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}\left(\frac{x}{2}\right)^{\beta}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\beta}}{\Pi(\nu+n)\Pi(\nu-\beta)}-\frac{e^{-i\pi\beta}}{\Pi(\nu)\Pi(\nu+n+\beta)}\right]$$

und hieraus lässt sich der Grenzwerth für $\beta = 0$ durch Differentiation leicht bestimmen. Man findet so

$$(15)\qquad S_1 = e^{-ix}e^{(2n-1)\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\left\{\sum_{0,n-1}^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-n}\frac{\Pi(n-\nu-1)}{\Pi(\nu)}\right.$$
$$-\sum_{0,\infty}^{\nu}(-1)^\nu\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}\frac{\left(\log\left(\frac{x}{2}\right)^2-\Psi(\nu)-\Psi(\nu+n)\right)}{\Pi(\nu+n)\Pi(\nu)}$$
$$\left.+i\pi\sum_{0,\infty}^{\nu}(-1)^\nu\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}}{\Pi(\nu)\Pi(n+\nu)}\right\}.$$

Setzen wir

$$J^{(n)}(x) = \sum_{0,\infty}^{\nu}(-1)^\nu\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}}{\Pi(\nu)\Pi(n+\nu)},$$

$$(16)\qquad Y^{(n)}(x) = -\sum_{0,n-1}^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-n}\frac{\Pi(n-\nu-1)}{\Pi(\nu)}$$
$$+\sum_{0,\infty}^{\nu}(-1)^\nu\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}\frac{\lg\left(\frac{x}{2}\right)^2-\Psi(\nu)-\Psi(n+\nu)}{\Pi(\nu)\Pi(n+\nu)},$$

so wird

$$(17)\qquad S_1(x) = e^{-ix}e^{(2n-1)\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\left\{i\pi J^{(n)}(x) - Y^{(n)}(x)\right\}$$

und durch Vertauschung von i mit $-i$

$$(18) \qquad S_2(x) = e^{ix} e^{-(2n-1)\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \{ -i\pi J^{(n)}(x) - Y^{(n)}(x) \}.$$

$J^{(n)}(x)$ und $Y^{(n)}(x)$ sind die unter dem Namen *Bessel'scher Functionen der Ordnung n erster und zweiter Art bekannten Functionen.**)

In der Eingangs erwähnten Abhandlung hat Riemann für den Fall $n = 0$ und ein rein imaginäres x die Entwicklungen (16) mitgetheilt.

Durch (17) und (18) kann man auch $J^{(n)}(x)$ und $Y^{(n)}(x)$ durch die Functionen $S_1(x)$, $S_2(x)$ darstellen in der Weise

$$(19) \qquad \begin{aligned} 2\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\, Y^{(n)}_{(x)} &= -S_1 e^{ix} e^{-(2n-1)\frac{\pi i}{4}} - S_2 e^{-ix} e^{(2n-1)\frac{\pi i}{4}}, \\ 2i\pi\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\, J^{(n)}_{(x)} &= \quad S_1 e^{ix} e^{-(2n-1)\frac{\pi i}{4}} - S_2 e^{-ix} e^{(2n-1)\frac{\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

VII.

Wir kehren wieder zu den allgemeinen Formeln (13) zurück. Lassen wir x in positivem Sinne einen halben Umkreis um den Nullpunkt beschreiben, so geht

$$x \text{ in } -x, \quad U_1 \text{ in } -e^{\alpha\pi i} U_1, \quad U_2 \text{ in } e^{-\alpha\pi i} U_2$$

über. Bezeichnen wir die so entstandenen Werthe von $S_1(x)$ und $S_2(x)$ mit $S_1(-x)$, $S_2(-x)$ so erhält man aus (13) zwei neue Gleichungen und wenn man mittels (13) selbst U_1, U_2 eliminirt, so folgt

$$(20) \qquad \begin{aligned} S_1(-x) &= S_2(x), \\ S_2(-x) &= S_1(x) - e^{-2ix}\, 2i \sin \alpha\pi\, S_2(x) \end{aligned}$$

und diese Formeln gelten auch in dem in V behandelten Ausnahmefall. Andere Ausdrücke würden sich ergeben, wenn man x in $-x$ durch einen halben Umkreis in negativem Sinne überführen würde.

Hiernach genügt es, die Functionen S_1, S_2 für solche Werthe von x zu betrachten, deren *reeller Theil nicht negativ ist.* Durch (20) sind sie dann nicht nur für alle Werthe von x, sondern auch nach beliebig wiederholter Umkreisung des Nullpunktes bestimmt.

Begrenzen wir, um S_1, S_2 eindeutig zu bestimmen, die x-Ebene durch einen längs der negativen reellen Axe verlaufenden Schnitt, so ergeben uns die Formeln (20) die Werthe dieser Functionen im dritten und im zweiten Quadranten, ausgedrückt durch die im ersten und im vierten Quadranten folgendermassen

x im ersten (oder zweiten) Quadranten

$$(21) \qquad \begin{aligned} S_1(-x) &= S_2(x) + e^{2ix}\, 2i \sin \alpha\pi\, S_1(x), \\ S_3(-x) &= S_1(x), \end{aligned}$$

*) Vgl. Hankel, diese Annalen Bd. 1, S. 167.

x im vierten (oder dritten) Quadranten

$$(22) \qquad \begin{aligned} S_1(-x) &= S_2(x), \\ S_2(-x) &= S_1(x) - e^{-2i\alpha} 2i \sin \alpha\pi \, S_2(x). \end{aligned}$$

VIII.

Wir bezeichnen mit r den absoluten Werth der Veränderlichen x und untersuchen das Verhalten der Functionen S_1, S_2 bei unendlich wachsendem r. Die ursprünglichen Definitionen (1) lehren, dass, so lange x im ersten oder vierten Quadranten liegt, der Grenzwerth von S_1 und S_2 gleich 1 ist, und die Formeln (21), (22) zeigen, dass dies auch noch dann stattfindet, wenn x im zweiten oder dritten Quadranten liegt, also in dem ganzen oben für x festgesetzten Gebiet. An der Grenze dieses Gebietes, d. h. für reelle negative Werthe von x, wird aber, wie die Formeln (21), (22) zeigen, der Grenzwerth unbestimmt, und wenn man das Gebiet überschreitet, so wird er sogar unendlich. Indem wir nun eine *obere Grenze* G für die Functionen S_1, S_2 zu ermitteln suchen, beschränken wir uns auf die Annahme, dass x im ersten oder vierten Quadranten (mit Einschluss der Grenzen) liegt, d. h. wir nehmen an, der reelle Theil von x sei positiv oder Null.

Wenn zunächst α positiv ist, so ist der absolute Werth sowohl von S_1 als von S_2 kleiner als

$$\frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^\alpha \left(1 + \frac{s}{2r}\right)^\alpha ds.$$

Es ist aber

$$1 + \frac{s}{2r} < e^{\frac{s}{2r}}$$

und folglich der absolute Werth von S_1 und S_2 (so lange $2r > \alpha$ ist) kleiner als

$$(23) \qquad G = \frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s\left(1-\frac{\alpha}{2r}\right)} s^\alpha \, ds = \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{2r}\right)^{\alpha+1}}$$

ein Ausdruck, der sich mit wachsenden r von oben her der Grenze 1 annähert.

Ist α negativ, so muss doch, wie wir festgesetzt haben, $\alpha + 1$ positiv sein, und die Formeln (4) ergeben auch für diesen Fall eine obere Grenze für S_1, S_2, nämlich

$$(24) \qquad G = \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha+2}{2r}\right)^{\alpha+3}} + \frac{2\alpha+3}{r} \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha+1}{2r}\right)^{\alpha+2}}$$

wofür auch der grössere Werth

$$\frac{1+\frac{2\alpha+3}{r}}{\left(1-\frac{\alpha+2}{2r}\right)^{\alpha+3}} \tag{25}$$

gesetzt werden kann.

IX.

Wenn man die Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatz

$$\left(1 \mp \frac{s}{2ix}\right)^{\alpha} = \sum_{1}^{\nu} \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\alpha-\nu)} \left(\frac{s}{\mp 2ix}\right)^{\nu}$$

in die Ausdrücke (1) für $S_1(x)$, $S_2(x)$ einsetzt, so erhält man die Reihen

$$\sum^{\nu} \frac{\Pi(\alpha+\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\alpha-\nu)} \frac{1}{(\mp 2ix)^{\nu}}.$$

Diese Entwicklung ist aber nicht im ganzen Umfang des Integrals (1) gestattet, sondern nur so lange s kleiner als der absolute Werth von $2x$ ist. Dem entsprechend ist auch die so gewonnene Reihe divergent. Gleichwohl hat sie für die Theorie der Functionen S_1, S_2 eine grosse Bedeutung. Um den Zusammenhang dieser Entwicklung mit den Functionen S_1, S_2 zu ergründen, betrachten wir die beiden Functionen

$$\begin{aligned} R_1^{(m)} &= \sum_{0,m-1}^{\nu} \frac{\Pi(\alpha+\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\alpha-\nu)} \frac{1}{(-2ix)^{\nu}}, \\ R_2^{(m)} &= \sum_{0,m-1}^{\nu} \frac{\Pi(\alpha+\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\alpha-\nu)} \frac{1}{(2ix)^{\nu}} \end{aligned} \tag{26}$$

worin m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Setzt man in den linken Theil der Differentialgleichungen (7) die Ausdrücke (26) ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^2R_1^{(m)}}{dx^2} + 2i\frac{dR_1^{(m)}}{dx} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} R_1^{(m)} &= \frac{4m}{(-2ix)^{m+1}} \frac{\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\,\Pi(\alpha-m)}, \\ \frac{d^2R_2^{(m)}}{dx^2} - 2i\frac{dR_2^{(m)}}{dx} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} R_2^{(m)} &= \frac{4m}{(2ix)^{m+1}} \frac{\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\,\Pi(\alpha-m)}. \end{aligned} \tag{27}$$

Die Differentialgleichungen, welche man aus (27) erhält, wenn man die linke Seite für sich Null setzt, können wir nun nach (7) und (8) integriren. Die vollständige Lösung der ersten ist, wenn a, b willkürliche Constanten sind

$$aS_1(x) + be^{-2ix}S_2(x),$$

und daraus erhält man nach bekannten Verfahren die vollständige

Lösung der ersten Gleichung (27) wenn man a, b als Functionen von x mittels der Gleichungen

$$(28)\quad \begin{aligned} &\frac{da}{dx} S_1(x) + \frac{db}{dx} e^{-2ix} S_2(x) = 0, \\ &\frac{da}{dx} \frac{dS_1(x)}{dx} + \frac{db}{dx} \frac{de^{-2ix} S_2(x)}{dx} = \frac{4m}{(-2ix)^{m+1}} \frac{\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\Pi(\alpha-m)} \end{aligned}$$

bestimmt.

Nun findet man aus den Gleichungen (7) dass

$$S_1 \frac{dS_2}{dx} - S_2 \frac{dS_1}{dx} - 2i S_1 S_2$$

eine Constante ist, welche man aus dem Werth $x = \infty$ bestimmt und $= -2i$ findet. Hiernach kann man die Gleichungen (28) leicht auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dx} &= \frac{-2mi}{(-2ix)^{m+1}} \frac{\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\Pi(\alpha-m)} S_2(x), \\ \frac{db}{dx} &= \frac{2mi}{(-2ix)^{m+1}} \frac{\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\Pi(\alpha-m)} e^{2ix} S_1(x). \end{aligned}$$

Daraus erhält man nun für das vollständige Integral der ersten Differentialgleichung (27), wenn A, B die Integrationsconstanten sind:

$$(29)\quad \begin{aligned} &A S_1(x) + B e^{-2ix} S_2(x) \\ &+ \frac{2mi\,\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\Pi(\alpha-m)} \int_x^\infty \frac{S_1(x)\, S_2(y) - e^{2i(y-x)} S_1(y)\, S_2(x)}{(-2iy)^{m+1}} dy \end{aligned}$$

wo die Integration nach y von dem Punkte x an parallel der reellen Axe ins Unendliche geführt werden kann. In dieser Form muss also auch die Function $R_1^{(m)}$ enthalten sein, und wenn man die Constante aus $x = \infty$ bestimmt, findet man $A = 1$, $B = 0$. Wenn man noch unter dem Integralzeichen

$$y = x + t$$

substituirt, so ergiebt sich

$$(30)\quad \begin{aligned} S_1(x) = &\sum_{0,m-1}^{\nu} \frac{\Pi(\alpha+\nu)}{\Pi(\nu)\Pi(\alpha-\nu)} \frac{1}{(-2ix)^\nu} \\ &- \frac{2mi\,\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\Pi(\alpha-m)} \int_0^\infty \frac{S_1(x)\, S_2(x+t) - e^{2it} S_2(x)\, S_1(x+t)}{(-2i(x+t))^{m+1}} dt \end{aligned}$$

und $S_2(x)$ erhält man daraus, indem man i in $-i$ verwandelt. Die Integration nach t wird auf reellem Wege vollzogen.

Hierdurch ist der Fehler, der begangen wird, wenn $S_1(x)$ durch $^{m)}$ ersetzt wird, in einer Form dargestellt, welche seinen Einfluss beurtheilen gestattet.

Wir bezeichnen den absoluten Werth des Restgliedes

$$\frac{2\pi i\,\Pi(\alpha+m)}{\Pi(m)\,\Pi(\alpha-m)}\int_0^\infty \frac{S_1(x)\,S_2(x+t)-e^{2it}S_2(x)\,S_2(x+t)}{(-2i(x+t))^{m+1}}\,dt$$

t Θ und suchen eine obere Grenze für Θ, also für den Fehler, der gangen wird, wenn $S_1(x)$ durch $R_1^{(m)}$ ersetzt wird.

X.

Wir bestimmen zunächst einen oberen Grenzwerth, welcher von m absoluten Werth des in Θ vorkommenden Integrals

$$\text{l)}\qquad \int_0^\infty \frac{S_1(x)\,S_2(x+t)-e^{2it}S_2(x)\,S_1(x+t)}{(-2i(x+t))^{m+1}}\,dt\cdot$$

ht überschritten wird. Hierbei ist nun die Voraussetzung wesentlich, dass der reelle Theil von x nicht negativ ist. Setzen wir

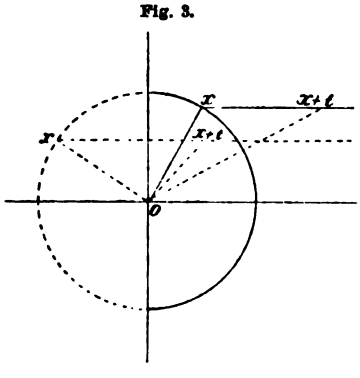
$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ist $\cos\varphi$ nicht negativ und der absolute Werth von $x+t$ ist

$$= \sqrt{r^2+t^2+2rt\cos\varphi} \gtreqless \sqrt{r^2+t^2} \gtreqless r.$$

es würde nicht für alle Werthe von t zutreffen, wenn der reelle Theil von n negativ wäre (vgl. Fig. 3); die Näherungsformel $R_1^{(m)}$ für S_1 würde daher in diesem Falle zwar auch noch bis zu einem gewissen Grade brauchbar sein, aber mit verminderter Genauigkeit. Halten wir daher jetzt an der Voraussetzung fest, dass $\cos\varphi$ nicht negativ sei, so wird der absolute Werth der Function

Fig. 3.



$$S_1(x)S_2(x+t)-e^{2it}S_2(x)S_1(x+t),$$

da der absolute Werth von e^{2it} gleich 1 ist, kleiner als $2G^2$ sein, wo G die Nr. V bestimmte obere Grenze von S_1, S_2 bedeutet, also eine von ganz unabhängige Function von r, die sich mit wachsendem r der enze 1 nähert, und für den absoluten Werth des Integrals (31) iebt sich eine obere Grenze

$$G^2\int_0^\infty \frac{dt}{2^m\sqrt{r^2+t^2}^{m+1}}\cdot$$

Es ist aber, wie aus der Theorie des Euler'schen Integrals bekannt ist

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{r^2+t^2}^{m+1}} = \frac{1}{mr^m}\,\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(\frac{m}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

und hieraus erhält man mit Benutzung der bekannten Relationen

$$\Pi(\alpha-m)\,\Pi(m-\alpha) = \frac{(m-\alpha)\pi}{\pm\sin\alpha\pi}, \qquad \Pi\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Theta < \frac{2\sin\alpha\pi}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Pi(m+\alpha)\,\Pi(m-\alpha)\,\Pi\left(\frac{m}{2}\right)}{\Pi(m)\,\Pi\left(\frac{m-1}{2}\right)(m-\alpha)}\,\frac{G^2}{(2r)^m}, \tag{32}$$

wobei natürlich der absolute Werth von $\sin\alpha\pi$ zu nehmen ist. Im Falle der Bessel'schen Functionen im engeren Sinne, wo 2α, aber nicht α, eine ganze Zahl ist, ist also $\sin\alpha\pi = 1$. Nun machen wir in (32) Gebrauch von der bekannten Ungleichung (Man vergl. etwa Serret-Harnack, Differential- und Integralrechnung Bd. II, Nr. 538)

$$\sqrt{2\pi}\,a^{a+\frac{1}{2}}e^{-a} < \Pi(a) < \sqrt{2\pi}\,a^{a+\frac{1}{2}}e^{-a+\frac{1}{12a}}.$$

Wendet man dies auf die in (32) vorkommenden Π-Functionen an, so folgt

$$\Theta < \sqrt{2m}\left(\frac{m}{2r}\right)^m G^2 e^{-m}\left(\frac{m+\alpha}{m-\alpha}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \sin\alpha\pi\, e^{\frac{1}{12(m+\alpha)}+\frac{1}{12(m-\alpha)}+\frac{1}{6m}+\frac{1}{2(m-1)}} \tag{33}$$

wobei noch von der Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m < e^{\frac{m}{m-1}}$$

Gebrauch gemacht ist.

Man sieht, dass dieser Grenzwerth wegen des Factors m^m mit wachsendem m über alle Grenzen wächst, dass er aber, so lange $m < 2r$ vorausgesetzt wird, unter einem Werthe bleibt, der, für nicht zu kleine m und r, ungefähr mit

$$\sqrt{2m}\,e^{-m}$$

übereinstimmt.

Marburg im Juli 1890.

Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen.

Von

M. Noether in Erlangen.

Im Folgenden gebe ich eine ausführliche Bearbeitung der von mir in den Sitzungsberichten der Erlanger physicalisch-medicinischen Societät, Hefte 16 (1883/4) und 18 (1886) veröffentlichten Noten über die algebraischen Differentialausdrücke *einer* Variablen und über das Jacobi'sche Umkehrproblem. Dieselbe schliesst eng an die im Wintersemester 1885/6 in einer Vorlesung über Abel'sche Functionen vorgetragenen Entwicklungen an. Ein erster Theil beschäftigt sich mit den Differentialausdrücken, ein zweiter mit den Integralen und ihrer Umkehrung, wobei ich Angabe von Standpunkt und Ziel der Betrachtungen jedem dieser Theile als Einleitung vorausschicke.

Erster Theil.

Die Abel'schen Differentialausdrücke.

Der erste Theil ist als *rein algebraischer* aufzufassen; obwohl er unmittelbar die Reduction aller zu einer Grundcurve gehörigen Integrale algebraischer Differentialausdrücke auf eine Summe von Normalintegralen der drei Gattungen, alle Darstellungen von algebraischen Functionen durch solche Integrale etc. leistet, hat er doch die besondere und wesentliche Eigenschaft, nur mit *algebraischen* Ausdrücken und Mitteln zu arbeiten, und zwar nur mit solchen, welche zugleich den *Charakter der Invarianz* in Bezug auf das ganze Gebiet der rationalen Transformationen haben, denen man die Grundcurve unterwerfen kann. Unsere scheinbar an einer bestimmten ebenen Curve $f = 0$ ausgesprochenen Betrachtungen und Formeln gelten also ohne Weiteres für die ganze Classe von algebraischen Gebilden, welcher $f = 0$ angehört. Das Hauptmittel zur Erreichung dieses Zweckes ist die Erweiterung des durch das invariante System der *Formen* φ seit lange

eingeführten *Formenbegriffs: ich führe die „algebraischen Formen eines Punktes von $f = 0$“* — homogene Ausdrücke $(m-3)^{ter}$ Dimension in den Coordinaten eines Punktes der Curve m^{ter} Ordnung $f = 0$, die rational-gebrochen und zu f adjungirt sind — *in die Theorie ein, als gleichberechtigt mit den algebraischen zu $f = 0$ gehörigen Functionen.* Diese Formen sind, aus dem System der φ abgeleitet, die Ausdrücke $\frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)}}$, wie die Functionen die Gestalt $\frac{\Phi^{(\mu)}}{\Phi'^{(\mu)}}$ haben, wo $\Phi^{(\mu)}$ eine ganze Function μ^{ter} Dimension der p Formen φ ist. Durch einfache Multiplication mit einem und demselben, ebenfalls invarianten Factor, der Differentialform

$$d\omega_x \left(= -\frac{(cx\,dx)}{f_c(x)} \quad \text{für} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0\right),$$

gehen aus den Relationen für die Formen die für die Integranden hervor. Bei dieser Auffassung fallen alle durch Auszeichnung einzelner Variablen, also auch Nichthomogenität, hervorgebrachten Besonderheiten einfach weg, indem alle Modificationen jedes speciellen Falles in der allgemeinen Behandlung schon mitbegriffen sind.

Die Festlegung der Normalform 3^{ter} Gattung geschieht (§ 6) wesentlich nach Clebsch-Gordan (Abel'sche Functionen, § 6); nur dass ich noch p willkürliche feste Punkte a_i von $f = 0$ benutze. Von dem so *algebraisch* normirten Ausdruck habe ich nun bemerkt, dass er die Differenz zweier, je nur von einem der beiden Parameter abhängigen Formen 3^{ter} Gattung wird. Diese Eigenschaft erlaubt, zwei wichtige Aufgaben zu lösen: 1) *die Aufstellung der einfachsten algebraischen Functionen* des Punktes x der Curve, wie derer, welche in $p+1$ gegebenen Punkten je zu ∞^1 werden (§ 8); 2) die allgemeinste Erledigung des Problems, *alle Formen 2^{ter} Gattung* (bez. Integrale 3^{ter} Gattung) *algebraisch aufzustellen, welche Vertauschung von Argument und Parameter zulassen* (§ 9). Herr Cayley hat auf diese letztere Aufgabe in Bd. V (p. 137) des American. Journ. of. Math. hingewiesen; aber das hiernach von mir aufgenommene Problem findet sich schon in einer Formel von Hrn. Weierstrass, und zwar für die hyperelliptischen Functionen in dessen Programmschrift des Braunsberger Gymnasiums 1849, allgemein in dessen Vorlesungen über Abel'sche Functionen*), gelöst. Mit diesen Resultaten des Herrn Weierstrass stimmen meine Formeln im Wesentlichen überein; mein Ausgangspunkt und meine algebraischen Beweismittel sind indess — von der Einführung der oben genannten p Punkte a_i abgesehen — völlig verschiedene.

*) Dieselben wurden mir durch eine Nachschrift nach den ersten beiden Noten über die Differentialausdrücke und vor der Note über das Umkehrproblem zugänglich.

Die Vertauschungsformel bietet ein bequemes Mittel, die früher (§§ 2—5) behandelte Formenreduction wirklich auszuführen (§ 10) und die algebraischen Functionen und ihren Logarithmus durch eine Summe von Integralen 2^{ter}, bez. 3^{ter}, Gattung auszudrücken, oder vielmehr deren Ableitung durch eine Summe von Formen (§ 11).

Inhalt des I. Theils:

§ 1. Differentialform $d\omega_x$. Algebraische Formen.
§ 2. Classification der algebraischen Formen.
§ 3. Reduction der algebr. Formen auf die Normalformen des § 2.
§ 4. Reduction der Formen $D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ auf die Normalformen.
§ 5. Einführung von p bestimmten Formen 2^{ter} Gattung in die Reductionsformeln.
§ 6. Algebr. Festlegung und Eigenschaften der Normalform 3^{ter} Gattung. Residuensatz.
§ 7. Festlegung und Eigenschaften der Normalformen 2^{ter} Gattung.
§ 8. Die Normalform 3^{ter} Gattung als Function der Parameter. Aufstellung der einfachsten algebr. Functionen.
§ 9. Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter bei den Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung. Kanonische Formen 2^{ter} Gattung.
§ 10. Darstellung von algebr. Formen.
§ 11. Darstellung von $D_x \lg \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ und von $D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$.
§ 12. Die Sätze von §§ 9—11 bei Einführung von corresidualen Gruppen von je $p+1$ Punkten.

---

§ 1.

Differentialform $d\omega_x$. Algebraische Formen.

1. Die zu Grunde gelegte algebraische Curve sei f, mit der Gleichung:

$$f(x) \equiv f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

von der Ordnung m und dem Geschlecht p. Die zugehörigen Integranden haben die Gestalt

$$du = \frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}} \cdot \frac{(c\,x\,dx)}{\sum c_i f_i(x)},$$

wobei M und N ganze homogene Functionen der Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes x sind und zwar M von einer um $m-3$ höheren Dimension als N. Dabei sind Ausdrücke wie (abc) für die Determinante $\sum \pm a_1 b_2 c_3$ gesetzt, und

$$\sum c_i f_i(x) \equiv \sum_i c_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \equiv f_c(x)$$

bedeutet die Polare von c in Bezug auf f. Für die beiden Factoren von du führe ich besondere Bezeichnungen ein: den allen du gemeinsamen, von den c unabhängigen, Factor

$$\frac{(c\,x\,dx)}{\sum c_i f_i(x)}$$

bezeichne ich als *Differentialform* $d\omega_x$*) *von* f; den veränderlichen Factor

$$\frac{du}{d\omega_x} = \frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}$$

als *algebraische* (zu f gehörige) *Form von* x.

2. Zur Rechnung mit diesen homogenen Grössen ist Folgendes zu bemerken:

Sei

$$\mathsf{X} = \frac{\chi}{\psi}$$

der Quotient zweier homogenen rationalen ganzen Functionen r^{ter} Dimension in x_1, x_2, x_3, ψ und χ, also eine *algebraische Function von* x; so wird, indem man die c durch die Unterdeterminanten aus den ersten Differentialquotienten von ψ und χ ersetzt, für $d\omega_x$ erhalten:

$$d\omega_x = \frac{r(\psi\,d\chi - \chi\,d\psi)}{(f\psi\chi)} = \frac{r\psi^2\,d\mathsf{X}}{(f\psi\chi)} = \frac{\sum \alpha_i x_i \cdot d\mathsf{X}}{(\alpha\mathsf{X}f)}$$

$$= \frac{\sum \alpha_i x_i \cdot \psi\,d\mathsf{X}}{\sum \pm \alpha_1 f_2(\psi_3\mathsf{X} - \chi_3)}, \quad \text{(unabhängig von den } \alpha\text{)}.$$

Umgekehrt führe ich, wie $\frac{du}{d\omega_x}$, für jede homogene Function 0^{ter} Dimension der Coordinaten, X, die *Differentialableitung*

$$D_x\mathsf{X} = \frac{d\mathsf{X}}{d\omega_x} = \frac{\sum \mathsf{X}_i\,dx_i}{d\omega_x}, \quad \text{wobei } \sum f_i\,dx_i = 0,$$

ein. Dieselbe wird eine, von den dx unabhängige, algebraische *Form* von f, wenn X eine algebraische *Function* $\frac{\chi}{\psi}$ war; und zwar ist:

$$D_x\mathsf{X} = \frac{(\alpha\mathsf{X}f)}{\sum \alpha_i x_i} = \frac{1}{r}\,\frac{(f\psi\chi)}{\psi^2}.$$

Auch für irgend eine ganze homogene Function $\mathsf{N}(x)$ der Coordinaten, die an einer Stelle $x = \xi$ verschwindet, wird *an dieser Stelle* $x = \xi$:

$$D_x\mathsf{N} = \frac{d\mathsf{N}}{d\omega_x} = \frac{(\alpha\mathsf{N}f)}{\sum \alpha_i x_i}$$

von den α und dx unabhängig.

*) S. Cayley in American J. of Math., Bd. V.

3. In Betreff der Factoren $\frac{M}{N}$ von du nehme ich zunächst an — was mittels eindeutiger Transformation von f immer zu erreichen ist —, dass keiner der Unendlichkeitspunkte von

$$du = \frac{M}{N} \cdot \frac{(c\,x\,dx)}{\sum c_i f_i(x)}$$

in den von den c unabhängigen 0-Punkten von $f = 0$, $\sum c_i f_i(x) = 0$ liege. Dann muss $\frac{M}{N}$ in diesen vielfachen Punkten von f sich jedenfalls „zu f adjungirt" verhalten; wenn also N durch einen $\varkappa$-fachen Punkt von f nicht hindurchgeht, muss M diesen Punkt zum $(\varkappa - 1)$-fachen Punkt besitzen.

Nimmt man nun die Gesammtheit der Curven N von allen möglichen Ordnungen n, und je die Gesammtheit aller *zu f adjungirten* Curven M von der $(n + m - 3)^{\text{ten}}$ Ordnung, so erhält man in $\frac{M}{N}$ *alle* existirenden algebraischen Formen von f; und zwar nicht nur die der obigen Annahme entsprechenden wirklich adjungirten Formen $\frac{M}{N}$, sondern auch als *specielle Unterschaaren* der adjungirten Formen die in *nichtadjungirter* Gestalt geschriebenen Formen, indem ja von den Curven N ein *Theil* seine Schnittpunkte mit f in vielfachen Punkten von f haben wird:

> *die allgemeinsten algebraischen Formen von f sind zu f adjungirte Formen.*

Unter den vielen Gestalten, welche man einem solchen Ausdruck $\frac{M}{N}$ vermöge $f = 0$ geben kann, hebe ich eine hervor. Seien

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_p(x)$$

p linear unabhängige zu f adjungirte „Curven φ", von der $(m-3)^{\text{ten}}$ Dimension in x_1, x_2, x_3; und sei unter

$$\Phi^{(\mu)}(x)$$

eine ganze Function μ^{ter} Dimension von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ verstanden. Legt man diese Curve $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$, indem man μ genügend gross annimmt, durch alle diejenigen Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ von $N = 0$, $f = 0$, in welchen M, von den durch die Adjunctionsbedingung von M hervorgebrachten 0-Punkten abgesehen, *nicht* verschwindet, so existirt eine Relation der Art*)

$$\Phi^{(\mu)}(x) \,.\, M = \Phi^{(\mu+1)}(x) \,.\, N + A \,.\, f,$$

*) S. meinen Aufsatz: Invariante Darstellung algebraischer Functionen, Math. Ann. XVII, p. 263. Der hyperelliptische Fall von f verlangt dabei gesonderte Betrachtung.

wo $\Phi^{(\mu+1)}(x)$ eine ganze Function $(\mu+1)^{ter}$ Dimension der $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ wird. Vermöge $f = 0$ wird also

$$\frac{M}{N} = \frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)}.$$

Ist, umgekehrt, $\frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)}$ gegeben, so treffen $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ und $\Phi^{(\mu+1)}(x) = 0$ die Grundcurve f in bez. $\mu(2p-2)$ und $(\mu+1)(2p-2)$, von den vielfachen Punkten von f selbst verschiedenen, Punkten; unter den ersteren seien

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

diejenigen, welche nicht zu den letzteren gehören. Legt man dann durch diese Punkte ξ eine *ganz beliebige* Curve $N = 0$, so existirt wiederum eine Relation der obigen Gestalt, die nun M als von f adjungirte Curve bestimmt. Für die algebraische Form ist dadurch die frühere Gestalt $\frac{M}{N}$ wiedergefunden.

4. *Die beiden Factoren von*

$$du = \frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)} \cdot d\omega_x$$

haben für sich Covarianteneigenschaft bei beliebiger eindeutiger Transformation von $f = 0$ in eine neue Curve $f' = 0$.

Denn sei

$$x_i = \vartheta_i(y_1, y_2, y_3), \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo die ϑ_i ganze rationale Functionen s^{ter} Ordnung der y sind, und sei

$$\sum \pm \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y_2} \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y_3} = (\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3),$$
$$f(x) = A(y) \cdot f'(y),$$

wo $f'(y) = 0$ die transformirte Curve; so wird*)

$$d\omega_x = \frac{(\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3)}{s \cdot A(y)} \cdot d'\omega_y,$$

$$\frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)} = \frac{s \cdot A(y)}{(\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3)} \cdot \frac{\Phi'^{(\mu+1)}(y)}{\Phi'^{(\mu)}(y)},$$

wo

$$d'\omega_y = \frac{(x\, y\, dy)}{\sum_h x_h \frac{\partial f'(y)}{\partial y_h}},$$

und wo die $\Phi'^{(\nu)}(y)$ ganze Functionen ν^{ter} Dimension der p zu $f'(y) = 0$ gehörigen Formen $\varphi'(y)$ sind.

*) S. meinen Aufsatz „Rat. Ausführung der Operationen etc.", § 31, (Math. Ann. XXIII).

Genau dasselbe gilt, sowohl bei den algebraischen Formen als bei der Differentialform $d\omega$, für den Uebergang von $f = 0$ zur Darstellung dieses algebraischen Gebildes in irgend einer Gestalt, z. B. als Normcurve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung im Raum von $p-1$ Dimensionen. Desswegen umfassen auch *alle* folgenden Betrachtungen, obwohl an $f = 0$ ausgesprochen, doch unmittelbar alle Gebilde derselben algebraischen Classe, indem man nur jeweils den von der Transformation abhängigen, allen algebraischen Formen gemeinsamen, Factor hinzugefügt denkt. So haben insbesondere die Reductionsformeln des § 3 invariante Eigenschaft.

Die *Quotienten* aus je zwei algebraischen Formen von f sind die *algebraischen Functionen* auf f, und diese sind dadurch absolut invariant für die ganze Classe gebildet.

§ 2.

Classification der algebraischen Formen.

1. Zur *Definition des Unendlichwerdens der algebraischen Formen*

$$\frac{M}{N} = \frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)}}$$

spreche ich nur von denjenigen 0-Punkten des Zählers und des Nenners auf $f = 0$, welche nicht schon durch die Adjunctionsbedingungen von selbst gegeben sind. Von jenen Punkten existiren also in allen Fällen für den Zähler $2p-2$ mehr, als für den Nenner. Von der algebraischen Form sage ich dann, dass sie in einem Punkte ξ von f in der Ordnung $\varkappa = \alpha - \beta$ unendlich wird (zu $\infty^{\varkappa}$), wenn f in ξ von der Curve $\Phi^{(\mu)} = 0$ (bez. $N = 0$) α-punktig (d. h. in einem Schnitt mit der Multiplicität α), von $\Phi^{(\mu+1)} = 0$ (bez. $M = 0$) β-punktig getroffen wird, für $\alpha > \beta$.

[So, wenn etwa $f = 0$ einen Doppelpunkt a hat, und es ist

$$\frac{M}{N} = \Psi_{m-3},$$

wo $\Psi_{m-3} = 0$ eine Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch a nicht gehe, wird man N als Gerade durch a, M als zu f adjungirte (von selbst durch a gehende) Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sich geschrieben denken; die betrachtete Form wird also in den beiden Zweigen des Doppelpunktes, wenn dieselben getrennt verlaufen, je zu ∞^1, indem für jeden dieser beiden Punkte $\alpha = 1$, $\beta = 0$ wird; wenn a ein Rückkehrpunkt, in demselben zu ∞^2, da $\alpha = 2$, $\beta = 0$ wird.]

2. Auf dieses Verhalten gründet sich die Classification der algebraischen Formen. Zunächst hat man den *Satz:*

Es giebt keine Formen, die nur in einem Punkte von f zu ∞^1, und sonst nicht, unendlich werden.

Denn man lege eine Gerade N_1 durch diesen Punkt, durch den Restschnitt von $N_1 = 0$ mit $f = 0$, der aus $m - 1$ Punkten besteht, aber alle adj. Curven $(m-2)^{ter}$ Ordnung, M_{m-2}, so müssen unsere Formen sich in die Gestalt

$$\frac{M_{m-2}}{N_1}$$

setzen lassen. Aber es wird, wegen der Ordnung von M_{m-2}:

$$M_{m-2} = N_1 \cdot \varphi,$$

d. h. unsere Formen werden zu Formen φ, also gar nicht unendlich.

Wegen seines Gebrauchs im Folgenden werde ich diesen Satz als den *Reductionssatz für algebraische Formen* bezeichnen: es ist übrigens im Wesentlichen derselbe Satz, wie ein bekannter Satz für algebraische *Functionen**), den man nur auf $\frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)} \cdot \varphi}$, statt auf $\frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)}}$, bezieht. Dass er das algebraische Aequivalent des sogen. „Residuensatzes" ist, wird sich später zeigen (§ 6, Nr. 8).

3. Nach Nr. 2 wird man als *Normalformen* einführen:

a) die p linear von einander unabhängigen Formen *erster Gattung*, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, die für *keinen* Punkt von f zu unendlich werden;

b) die Formen *zweiter Gattung*, von denen jede in nur *einem* Punkte, aber in einer Ordnung ν zu ∞ wird, wo ν eine ganze Zahl > 1 ist;

c) die Formen *dritter Gattung*, von denen jede in nur *zwei* endlich von einander verschiedenen Punkten von f je zu ∞^1 wird.

4. *Bildung* dieser Normalformen:

a) Zur Bildung von p Normalformen erster Gattung denke ich mir p Punkte

$$a_1, a_2, \ldots, a_p$$

von $f = 0$ fest gegeben, nur der Bedingung genügend, dass sie auf keiner Curve φ liegen, d. h. dass

$$A \equiv \sum \pm \varphi_1(a_1)\, \varphi_2(a_2) \ldots \varphi_p(a_p) \neq 0,$$

---

*) „Die algebraischen Functionen, welche höchstens in einer gegebenen Gruppe von $s+1$ Punkten $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_s$ je zu ∞^1 werden sollen, haben dann, und nur dann, die Eigenschaft, in ξ alle nicht zu ∞ zu werden, wenn es eine Curve φ giebt, welche durch $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, aber nicht durch ξ, geht". (S. meine Note: Beweis und Erweiterung eines algebr.-functionenth. Satzes des Hrn. Weierstrass, Cr. J. Bd. 97). Ich pflege diesen Satz als *Reductionssatz für algebraische Functionen* zu bezeichnen.

im Uebrigen beliebig gelegen. Die Normalformen

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$$

wähle ich dann so, dass

$$\Phi_i(a_i) = 1, \quad \Phi_i(a_\varkappa) = 0, \quad \begin{pmatrix} i, & \varkappa = 1, \ldots, p \\ & \varkappa \gtrless i \end{pmatrix}.$$

Also ist:

$$\Phi_i(x) = \sum_1^p{}_\lambda \frac{A_{i\lambda}}{A} \varphi_\lambda(x),$$

wo $A_{i\lambda}$ der Factor von $\varphi_\lambda(a_i)$ in A ist; und für irgend eine Form $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi(a_i)\ \Phi_i(x).$$

b) Für eine Form 2^{ter} Gattung sei ξ der eine Unendlichkeitspunkt ν^{ter} Ordnung ($\nu > 1$). Man lege eine Curve $N = 0$, n^{ter} Ordnung, die f in ξ ν-punktig treffe; durch die weiteren $nm - \nu$ Schnittpunkte von $N = 0$ mit $f = 0$ geht dann eine Schaar von zu f adjungirten Curven $M = 0$, von der $n + m - 3^{ten}$ Ordnung, welche f in Gruppen von je $2p - 2 + \nu$ Punkten treffen. Die Mannigfaltigkeit dieser Schaar $M = 0$ wird also in allen Fällen*) zu $\infty^{p-2+\nu}$.

Diese Gruppen enthalten keinen *festen* (allen Gruppen gemeinsamen) Punkt; denn der übrige Theil der Gruppen, von je $2p-3+\nu$ Punkten, würde, wegen $\nu > 1$, nur eine $\infty^{p-3+\nu}$-Schaar, statt einer $\infty^{p-2+\nu}$-Schaar, bilden. Insbesondere verschwinden also nicht alle Curven $M = 0$ von selbst für den Punkt ξ. Oder für $\frac{M}{N}$:

Es existiren $p - 1 + \nu$ linear von einander unabhängige Formen 2^{ter} Gattung, welche in einem gegebenen Punkte ξ von f in der ν^{ten} ($\nu > 1$) Ordnung wirklich unendlich werden.

Schreibt man also $M = 0$ noch vor, $f = 0$ in ξ μ-punktig zu treffen, so liefert dies, für $\mu \leqq \nu - 2$, genau μ unabhängige Bedingungen, und man erhält dann in $\frac{M}{N}$ eine $\infty^{p-2+\nu-\mu}$-Schaar von Formen 2^{ter} Gattung, die in ξ zu $\infty^{\nu-\mu}$ werden. Für $\mu = \nu - 1$ kömmt man aber auf eine ∞^{p-1}-Schaar von Formen, die in ξ zu ∞^1 werden sollten, also, nach Nr. 2, in ξ gar nicht unendlich werden, d. h. Formen φ von f sind. Man kann daher die Gesammtheit der Formen 2^{ter} Gattung, ν^{ter} Ordnung in ξ, linear zusammensetzen aus irgend $\nu - 1$ Formen, die in ξ je wirklich in der Ordnung

$$\nu,\ \nu - 1,\ \nu - 2, \ldots, 2$$

zu unendlich werden, und aus den p Formen erster Gattung. Solche

*) S. Brill und Noether. Math. Ann. VII.

$\nu - 1$ *Normalformen* werden späterhin vollständig normirt werden; hier seien irgendwelche bestimmte der genannten Art bezeichnet mit

$$A_\xi^{(\varkappa)}(x) = \frac{M_\xi^{(\varkappa)}}{N_\xi^{(\varkappa)}} \qquad (\varkappa = \nu - 1,\ \nu - 2, \ldots, 1),$$

wo $A_\xi^{(\varkappa)}(x)$ als Form von x im Punkte ξ in der Ordnung $\varkappa + 1$ zu ∞ werde. Man hat dann

$$\frac{M}{N} = \alpha_{\nu-1} A_\xi^{(\nu-1)}(x) + \alpha_{\nu-2} A_\xi^{(\nu-2)}(x) + \cdots + \alpha_1 A_\xi^{(1)}(x) + \sum_1^p \beta_i \Phi_i(x),$$

wo die $\alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu-2}, \ldots, \alpha_1,\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ willkürliche Parameter sind.

c) Für eine Form dritter Gattung seien ξ und η die beiden, endlich verschiedenen, Unendlichkeitspunkte erster Ordnung. Man lege etwa eine Gerade $N_1 = 0$ durch ξ und η; durch die weiteren $m-2$ Schnittpunkte von $N_1 = 0$, $f = 0$ aber die Gesammtheit der zu f adjungirten Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, M_{m-2}, welche f noch in einer Schaar von Gruppen von je $2p$ Punkten treffen, mit der Mannigfaltigkeit ∞^p.

Die so entstehende Schaar von Formen $\frac{M_{m-2}}{N_1}$ kann man also linear zusammensetzen aus irgend *einer* dieser Formen, welche wirklich für ξ und η zu ∞^1 wird, und aus den p Formen φ. Jene *eine* Form kann zunächst beliebig, nur von den φ verschieden, gewählt werden; eine *a*) entsprechende passende weitere Normirung wird aber erreicht, wenn man der Form, welche unter ihren $2p$ Nullpunkten p beliebige hat, vorschreibt, die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_p$ von Nr. 4, *a*) zu Nullpunkten zu haben. Eine solche, bis auf einen von x unabhängigen Factor festgelegte, Form sei bezeichnet mit

$$P_{\xi\eta}(x) \equiv \frac{M_{\xi\eta}}{N_{\xi\eta}}.$$

Man hat dann

$$\frac{M_{m-2}}{N_1} = \beta P_{\xi\eta}(x) + \sum_1^p \beta_i \Phi_i(x)$$

mit den Parametern $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$.

§ 3.

Reduction der algebraischen Formen auf die Normalformen des § 2.

1. Sei eine beliebige algebraische Form von f

$$\frac{M(x)}{N(x)}$$

vorgelegt, welche die Punkte

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

zu Unendlichkeitspunkten hat, bez. von den Ordnungen

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s.$$

Man betrachte zunächst diejenigen dieser Punkte, deren Ordnungszahlen > 1 sind; und zwar successiv. Sei etwa $\nu_1 > 1$; so bilde man für den Punkt ξ_1 zuerst die $\nu_1 - 1$ Normalformen 2^{ter} Gattung des § 2, Nr. 4, *b*).

In

$$\frac{M(x)}{N(x)} - \gamma_{1,\nu_1-1} \cdot A_{\xi_1}^{(\nu_1-1)}(x)$$

lässt sich der Zahlencoefficient γ_{1,ν_1-1} *so bestimmen, dass diese Form in* ξ_1 *von niedrigerer als* ν_1^{ter} *Ordnung zu* ∞, *in den übrigen Punkten* ξ_λ *noch immer zu bes.* ∞^{ν_λ} *wird.*

Denn diese Form wird zu

$$\frac{M \cdot N_\xi^{(\nu_1-1)} - \gamma_{1,\nu_1-1} N \cdot M_\xi^{(\nu_1-1)}}{N \cdot N_\xi^{(\nu_1-1)}};$$

wenn also der Zähler dieser Form bei beliebigem γ_{1,ν_1-1} in ξ_1 etwa ϱ-fach verschwindet, für $f = 0$, so braucht man γ_{1,ν_1-1} nur die eine Bedingung aufzulegen, den Zähler in ξ_1 $(\varrho+1)$-fach verschwinden zu machen, wobei γ_{1,ν_1-1} weder 0 noch ∞ wird. Dann wird die Form in ξ_1 in niedrigerer, als der ν_1^{ten}, Ordnung unendlich, während sich die Ordnung in den übrigen Punkten ξ nicht ändert, wo das hinzugefügte A überhaupt endlich ist.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens folgt also

$$\frac{M}{N} = \gamma_{1,\nu_1-1} A_{\xi_1}^{(\nu_1-1)} + \gamma_{1,\nu_1-2} A_{\xi_1}^{(\nu_1-2)} + \cdots + \gamma_{1,1} A_{\xi_1}^{(1)} + \frac{M'}{N'},$$

wo $\frac{M'}{N'}$ eine Form ist, welche in ξ_1 *höchstens von der* 1^{ten} *Ordnung* zu ∞, in $\xi_2, \ldots, \xi_s$ je zu $\infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s}$ wird, wie $\frac{M}{N}$; und wo die Zahlen $\gamma_{1,\nu_1-2}, \ldots, \gamma_{1,1}$ ebenfalls endlich sind, aber auch 0 sein können.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die übrigen Punkte $\xi_2, \ldots, \xi_s$ successiv an, so ergiebt sich somit

$$\begin{aligned}\frac{M}{N} = {} & \gamma_{1,\nu_1-1} A_{\xi_1}^{(\nu_1-1)} + \cdots + \gamma_{1,1} A_{\xi_1}^{(1)} \\ & + \cdots \\ & + \gamma_{s,\nu_s-1} A_{\xi_s}^{(\nu_s-1)} + \cdots + \gamma_{s,1} A_{\xi_s}^{(1)} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}},\end{aligned}$$

wo $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ eine Form ist, welche in den Punkten $\xi_1, \ldots, \xi_s$ *höchstens* je zu ∞^1, in keinen weiteren Punkten zu ∞ wird. Von den weiteren Coefficienten $\gamma_{\lambda,\nu}$, die alle endlich sind, können irgend welche $= 0$ sein.

2. Seien

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$$

diejenigen der s Punkte ξ_λ, für welche $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ wirklich je zu ∞^1 wird. Man nehme einen ganz willkürlichen Punkt η von f hinzu und bilde die Normalformen des § 2, 4. c), die in η und je einem dieser Punkte ξ zu ∞^1 werden:

$$P_{\xi_\lambda \eta} = \frac{M_{\xi_\lambda \eta}}{N_{\xi_\lambda \eta}}.$$

Dann lässt sich die Constante γ_1 so bestimmen, dass

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} - \gamma_1 P_{\xi_1 \eta}$$

in $\xi_2, \ldots, \xi_r$ zu ∞^1 wie $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, in η zu ∞^1, in ξ_1 nicht mehr ∞ wird.

Denn hierzu ist wieder nur nöthig, der Curve

$$\mathfrak{M} \cdot N_{\xi_1 \eta} - \gamma_1 \cdot \mathfrak{N} \cdot M_{\xi_1 \eta} = 0$$

die eine Bedingung aufzulegen, $f = 0$ im Punkte ξ_1 in einem weiteren successiven Punkte zu treffen, als dieses bei willkürlichem γ_1 geschieht. Dadurch bestimmt sich γ_1 als endliche, von 0 verschiedene Grösse.

Somit ergiebt sich

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \gamma_1 P_{\xi_1 \eta} + \gamma_2 P_{\xi_2 \eta} + \cdots + \gamma_r P_{\xi_r \eta} + \Psi,$$

wo alle γ_λ endliche von 0 verschiedene Grössen werden. Die Form Ψ aber könnte nur höchstens noch im Punkte η, und in diesem nur zu ∞^1 werden; ist also in Wirklichkeit, nach dem Reductionssatze, § 2, 2., ein lineare Verbindung der p Formen φ:

$$\Psi = \Phi^{(1)}.$$

Man hat hiernach eine Reduction der gegebenenen Form $\frac{M}{N}$ auf eine Summe von höchstens $\sum_1^s (\nu_\lambda - 1)$ Formen 2^{ter} Gattung, s Formen 3^{ter} Gattung und p Formen 1^{ter} Gattung.

3. *Das Resultat der Reduction ist, bei Zugrundelegung desselben Systems von Normalformen 2^{ter}, 3^{ter} und 1^{ter} Gattung, unabhängig von der Anordnung des Verfahrens. Ferner werden die Coefficienten γ_λ der Normalformen 3^{ter} Gattung unabhängig von der Wahl der Normalformen 2^{ter} und 3^{ter} Gattung und unabhängig vom Hülfspunkt η.*

Was zunächst die Eindeutigkeit der Reduction betrifft, so kann zwischen den $\sum_1^s (\nu_\lambda - 1)$ Normalformen 2^{ter}, s Normalformen 3^{ter} und p Normalformen 1^{ter} Gattung keine lineare Relation bestehen. Denn

da für jede Ordnung des Unendlichwerdens dabei nur *ein* Glied vorhanden ist, müssen in einer solchen Relation die Coefficienten der Formen 2^{ter} und 3^{ter} Gattung jeder für sich zu 0 werden; die Formen φ sind aber linear-unabhängig.

Legt man ferner statt der Normalformen 2^{ter} Gattung $A_\xi^{(\nu-1)}$ andere solche, $A_\xi'^{(\nu-1)}$, zu Grunde, so kann man diese, nach § 2, 4. b), durch die $A_\xi^{(\nu-1)}, \ldots, A_\xi^{(1)}$ und die Formen φ allein ausdrücken. Die Coefficienten γ_λ der Normalformen 3^{ter} Gattung $P_{\xi_\lambda \eta}$ in der Reduction von $\frac{M}{N}$ ändern sich also dadurch nicht.

Dass die Reductionscoefficienten der Normalformen 2^{ter} Gattung von der Wahl des Punktes η unabhängig sind, ist nach der Entwicklung von Nr. 1 selbstverständlich.

§ 4.

Reduction der Formen $D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ auf die Normalformen.

Ich mache eine Anwendung der Reduction des § 3 auf die Form

$$D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2},$$

welche die Differentialableitung des Quotienten der beiden algebraischen ganzen Functionen r^{ter} Dimension in x_1, x_2, x_3, $\psi(x)$ und $\chi(x)$, ist (§ 1, 2.).

Die algebraische Function $\frac{\chi}{\psi}$ möge in den Punkten

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

wo $f = 0$ bez. in den Ordnungen

$$\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \ldots, \nu_s - 1$$

unendlich werden, in keinem weiteren Punkte von f zu ∞; die algebraische Form $D_x \frac{\chi}{\psi} = \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2}$ wird dann in diesen, und nur in diesen, Punkten unendlich, bez. in den Ordnungen

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s.$$

Nach § 3 kann man nun diese Form in eine Summe von Normalformen der drei Gattungen entwickeln.

In dieser Entwicklung fallen aber die Normalformen 3^{ter} Gattung aus.

Man erkennt dies am einfachsten, wenn man beachtet, dass Formen dritter Gattung durch Differentiation nur aus logarithmisch unendlich werdenden Functionen entstehen können, was bei $\frac{\chi}{\psi}$ nicht vorkommt. Aber diese Thatsache lässt sich auch rein algebraisch einsehen.

Denn sei

$$D_z \frac{\chi}{\psi} = \varkappa_{\nu_1-1} A_{\xi_1}^{(\nu_1-1)} + \cdots + \varkappa_1 A_{\xi_1}^{(1)} + c_1 P_{\xi_1 \eta} + C,$$

wo sich C auf die übrigen Punkte ξ und auf Formen φ bezieht; so sieht man zunächst, dass, wenn $\varkappa_{\nu_1-1} = 0$, $\varkappa_{\nu_1-2} = 0$, ..., $\varkappa_1 = 0$, auch $c_1 = 0$ sein muss, da $\frac{\chi}{\psi}$ dann gar nicht unendlich wird. Hat man ferner eine zweite Function $\frac{\chi'}{\psi'}$, welche ebenfalls in ξ_1 zu ∞^{ν_1-1} wird, derart, dass in der Entwicklung von $D_z \frac{\chi'}{\psi'}$ *dieselben* Zahlen $\varkappa_{\nu_1-1}, \ldots, \varkappa_1$ auftreten, welche aber sonst in beliebigen Punkten ξ' von f in beliebiger Weise ∞ wird; so sind dies $\nu_1 - 1$ Bedingungen für χ', nach deren Erfüllung $\frac{\chi}{\psi} - \frac{\chi'}{\psi'}$, also auch

$$D_z\left(\frac{\chi}{\psi} - \frac{\chi'}{\psi'}\right)$$

in ξ_1 überhaupt nicht mehr unendlich wird. D. h. c_1 hängt ausschliesslich von ξ_1 und den Zahlen $\varkappa_{\nu_1-1}, \ldots, \varkappa_1$ ab. Man braucht also den Satz, dass c_1 identisch 0 wird, nur für irgend eine *specielle* der oben genannten Functionen $\frac{\chi'}{\psi'}$ nachzuweisen. Dies wird aber ohnehin bei der Normirung der Functionen, die in einem Punkte ξ in $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und in den p Punkten $a_1, \ldots, a_p$ je in 1^{ter} Ordnung zu ∞ werden, in dem § 9, Nr. 1, geschehen, wesshalb ich hier darauf verweisen kann.

[Anmerkung: Dass in

$$\frac{1}{r}\frac{(\psi\chi f)}{\psi^2} - \varkappa_{\nu_1-1}\frac{M_{\xi_1}^{(\nu_1-1)}}{N_{\xi_1}^{(\nu_1-1)}} - \cdots - \varkappa_1 \frac{M_{\xi_1}^{(1)}}{N_{\xi_1}^{(1)}},$$

wenn auf gemeinsamen Nenner gebracht, die Zählercurve, sobald man derselben durch Bestimmung von $\varkappa_{\nu_1-1}, \ldots, \varkappa_1$ noch $\nu_1 - 1$ weitere successive Schnittpunkte mit f in ξ_1 giebt, noch einen ν_1^{ten} solchen in ξ_1 von selbst erhält, führt auf complicirte Sätze, die schon für den einfachsten Fall, dass alle Nenner $N_\xi = \psi^2$ gesetzt werden und selbst für $\nu_1 = 2$ geometrisch kaum zu beweisen sind.]

§ 5.

Einführung von p bestimmten Formen zweiter Gattung in die Reductionsformeln.

1. Die Entwicklung des § 4 werde, zunächst für einen speciellen Fall, umgekehrt. Sei $\frac{\chi_1(x)}{\psi_1(x)}$ irgend eine algebraische Function von x,

welche im Punkte ξ von f zu $\infty^{\nu-1}$, in den p Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_p$ je zu ∞^1 werden soll. Eine solche, in ξ wirklich in der angegebenen Ordnung unendlich werdende Function existirt nach dem „Reductionssatz für algebraische Functionen" immer, da $a_1, a_2, \ldots, a_p$ nicht auf einer Curve φ liegen. Also wird nach § 4:

$$D_x \frac{\chi_1}{\psi_1} = \varkappa_{\nu-1} A_\xi^{(\nu-1)} + \varkappa_{\nu-2} A_\xi^{(\nu-2)} + \cdots + \varkappa_1 A_\xi^{(1)} + \sum_1^p{}_i \lambda_i A_{a_i}^{(1)} + \sum_1^p{}_i \mu_i \varphi_i,$$

worin $\varkappa_{\nu-1} \neq 0$. Mittels dieser Formel drücke man $A_\xi^{(\nu-1)}$ aus durch

$$D_x \frac{\chi_1}{\psi_1},\ A_\xi^{(\nu-2)}, \ldots, A_\xi^{(1)},\ A_{a_i}^{(1)},\ \varphi_i \qquad (i=1,\ldots,p).$$

Verfährt man dann ebenso successiv mit $A_\xi^{(\nu-2)}, \ldots, A_\xi^{(1)}$, unter Einführung neuer algebraischer Functionen $\frac{\chi_2}{\psi_2}, \cdots, \frac{\chi_{\nu-1}}{\psi_{\nu-1}}$, so erhält man eine Reduction:

$$A_\xi^{(\nu-1)} = D_x \frac{\chi}{\psi} + \sum_1^p{}_i \alpha_i A_{a_i}^{(1)} + \Phi^{(1)};$$

d. h.

Die auf beliebige Punkte ξ bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung lassen sich ersetzen: durch das D_x einer algebraischen Function, eine Summe von auf p feste Punkte $a_1, \ldots, a_p$ bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung 1^{ter} Ordnung und eine Form $\Phi^{(1)}$. Auch diese Reduction ist eine eindeutige.

Der letzte Umstand folgt daraus, dass es keine algebraische Function giebt, welche nur in $a_1, a_2, \ldots, a_p$ zu ∞^1 wird.

Die wirkliche Darstellung der Reduction der Formen $A_\xi^{(\nu-1)}$ findet sich später (§ 10) ausgeführt.

Hiernach lässt sich jede gegebene algebraische Form $\frac{M}{N}$ eindeutig reduciren auf die Differentialableitung D_x einer algebraischen Function, auf eine Summe von auf p feste Punkte $a_1, \ldots, a_p$ bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung 1^{ter} Ordnung, auf eine Summe von Formen dritter Gattung, die sich nur auf die Unendlichkeitspunkte von $\frac{M}{N}$ beziehen, (identisch mit dem bezüglichen Theil der Reduction des § 3, 2), und auf eine Form $\Phi^{(1)}$.

2. Die in Nr. 1 bezeichnete Reduction der gegebenen Form $\frac{M}{N}$ kann auch an $\frac{M}{N}$ *direct* durchgeführt werden.

$\frac{M}{N}$ möge, wie in § 3, in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ bez. zu $\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s}$ werden, Man bestimme dann die allgemeinste algebraische Function $\frac{\chi}{\psi}$, welche in diesen Punkten bez. in den Ordnungen

$$\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \ldots, \nu_s - 1$$

wirklich zu unendlich und ausserdem höchstens in den Punkten $a_1, a_2 \ldots, a_p$ je zu ∞^1 werde. Diese Function existirt immer (Reductionssatz für Functionen) und enthält, von einer additiven Constanten abgesehen, noch genau $\sum_1^s (\nu_\lambda - 1)$ linear und homogen in χ eingehende willkürliche Parameter. (Math. Ann. VII).

Dieselben Parameter gehen dann in derselben Weise in

$$D_x \frac{\chi}{\psi} = \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2}$$

ein. Man bestimme diese Parameter so, dass die Form

$$\frac{M}{N} - \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2}$$

in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ höchstens in 1^{ter} Ordnung unendlich werde, was, nach Nr. 1, die Parameter eindeutig festlegt. Diese Form kann dann, nach § 3, in eine Summe von Formen 3^{ter} Gattung, die sich auf $\xi_1, \ldots, \xi_s$ beziehen, von p Formen 2^{ter} Gattung, die sich auf $a_1, \ldots, a_p$ beziehen, und von den p Formen 1^{ter} Gattung entwickelt werden.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn $\frac{M}{N}$ gegeben ist, bei der Bildung dieser Function $\frac{\chi}{\psi}$ keine weiteren Irrationalitäten eingehen, als die symmetrischen Functionen der p festgewählten Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

§ 6.

Algebraische Festlegung und Eigenschaften der Normalform dritter Gattung. Residuensatz.

1. Die Normalform $\frac{M_{\xi\eta}}{N_{\xi\eta}}$ von Nr. 4, c des § 2 soll nun endgültig festgelegt und berechnet werden.*)

Für $N_{\xi\eta}$ werde der lineare Ausdruck $(x\xi\eta)$ genommen, für $M_{\xi\eta}$ ein zu f adjungirter Ausdruck

$$\Omega_{\xi\eta}(x)$$

*) Nach Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, § 6.

der $(m-2)^{\text{ten}}$ Dimension in x, der für die von ξ und η verschiedenen $m-2$ Punkte des Schnittes von $f=0$ mit $(x\xi\eta)=0$ und für die durch keine Curve φ verbundenen, p festen Punkte

$$a_1, a_2, \ldots, a_p$$

verschwindet und für $x=\xi$ den Werth

$$\Omega_{\xi\eta}(\xi) = \sum_i \eta_i f_i(\xi) = f_\eta(\xi)$$

annimmt. *Die so eindeutig festgelegte Form dritter Gattung soll fortan unter*

$$P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots, a_p) = P_{\xi\eta}(x) = \frac{\Omega_{\xi\eta}(x)}{(x\xi\eta)}$$

verstanden sein. x heisse das *Argument*, ξ, η die *Parameter* dieser Normalform.

2. Für $x=\xi+\lambda\eta$ erhalte man, indem $f(\xi)=0, f(\eta)=0$ wird:

$$\frac{1}{\lambda} f(\xi+\lambda\eta) = f_\eta(\xi) + \lambda f_{\eta^2}(\xi) + \lambda^2 f_{\eta^3}(\xi) + \cdots + \lambda^{m-2} f_\xi(\eta),$$

was, $=0$ gesetzt, die $m-2$ Schnittpunkte von $f=0$ mit $(x\xi\eta)=0$ bestimmt. Hat man daher, für $\Omega_{\xi\eta}(x) \equiv \Omega'(x)$:

$$\Omega_{\xi\eta}(\xi+\lambda\eta) = \Omega_{\xi\eta}(\xi) + \lambda\Omega_\eta'(\xi) + \cdots + \lambda^{m-2}\Omega_{\xi\eta}(\eta),$$

so muss zunächst sein:

$$\Omega_{\xi\eta}(\xi) : \Omega_\eta'(\xi) : \cdots : \Omega_{\xi\eta}(\eta) = f_\eta(\xi) : f_{\eta^2}(\xi) : \cdots : f_\xi(\eta).$$

Wir nehmen hier

$$\Omega_{\xi\eta}(\xi) = f_\eta(\xi),$$

woraus zugleich folgt:

$$\Omega_{\xi\eta}(\eta) = f_\xi(\eta).$$

Ausführlicher geschrieben, sei:

$$\Omega_{\xi\eta}(x) = \lambda_1\Omega^{(1)}(x) + \lambda_2\Omega^{(2)}(x) + \cdots + \lambda_{m-1}\Omega^{(m-1)}(x) + (x\xi\eta)\cdot\sum_1^p{}_i \mu_i \varphi_i(x),$$

wo $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(m-1)}(x)$ irgend welche $m-1$ linear-unabhängige, ξ, η nicht enthaltende, zu f adjungirte Ausdrücke $(m-2)^{\text{ter}}$ Dimension seien, in deren Schaar keiner mit dem Factor $(x\xi\eta)$ vorkommt; so dass rechts bei willkürlichen Parametern λ, μ die Gesammtheit der adjungirten Ausdrücke $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung steht. Man hat dann für die $m-2$ Punkte auf $(x\xi\eta)=0$ die obigen $m-1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f_\eta(\xi) &= \lambda_1\Omega^{(1)}(\xi) + \cdots + \lambda_{m-1}\Omega^{(m-1)}(\xi),\\
f_{\eta^2}(\xi) &= \lambda_1\Omega_\eta^{(1)}(\xi) + \cdots + \lambda_{m-1}\Omega_\eta^{(m-1)}(\xi),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{\eta^{m-1}}(\xi) \equiv f_\xi(\eta) &= \lambda_1\Omega^{(1)}(\eta) + \cdots + \lambda_{m-1}\Omega^{(m-1)}(\eta)
\end{aligned}$$

und dazu die p Gleichungen für die p Punkte $a_1, \ldots, a_p$:

$$0 = \lambda_1 \Omega^{(1)}(a_\varkappa) + \cdots + \lambda_{m-1}\Omega^{(m-1)}(a_\varkappa) + (a_\varkappa \xi\eta) \sum_1^p{}_i \mu_i \varphi_i(a_\varkappa),$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Die Determinante dieser $m + p - 1$ Gleichungen wird:

$$\Delta = \sum \pm \Omega^{(1)}(\xi)\, \Omega_\eta^{(2)}(\xi) \ldots \Omega^{(m-1)}(\eta) \times \sum \pm \varphi_1(a_1)\, \varphi_2(a_2) \ldots \varphi_p(a_p)$$
$$\times (a_1 \xi\eta)\,(a_2 \xi\eta) \ldots (a_p \xi\eta)$$

und für $\Omega_{\xi\eta}(x)$ selbst ergiebt sich:

$$\Delta\Omega_{\xi\eta}(x) = -\begin{vmatrix} 0 & \Omega^{(1)}(x) & \cdots & \Omega^{(m-1)}(x) & (x\xi\eta)\varphi_1(x) & \cdots & (x\xi\eta)\varphi_p(x) \\ f_\eta(\xi) & \Omega^{(1)}(\xi) & \cdots & \Omega^{(m-1)}(\xi) & 0 & \cdots & 0 \\ f_{\eta^2}(\xi) & \Omega_\eta^{(1)}(\xi) & \cdots & \Omega_\eta^{(m-1)}(\xi) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_\xi(\eta) & \Omega^{(1)}(\eta) & \cdots & \Omega^{(m-1)}(\eta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega^{(1)}(a_1) & \cdots & \Omega^{(m-1)}(a_1) & (a_1\xi\eta)\varphi_1(a_1) & \cdots & (a_1\xi\eta)\varphi_p(a_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \Omega^{(1)}(a_p) & \cdots & \Omega^{(m-1)}(a_p) & (a_p\xi\eta)\varphi_1(a_p) & \cdots & (a_p\xi\eta)\varphi_p(a_p) \end{vmatrix}.$$

3. In dieser Darstellung von

$$P_{\xi\eta}(x;\, a_1 \ldots a_p) = \frac{\Omega_{\xi\eta}(x)}{(x\xi\eta)}$$

sind x, sowie ξ, η, als veränderliche Grössen gedacht. Für den speciellen Werth $\xi = a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ wird diese Form von x aber unabhängig von x zu unendlich, wegen des Factors $(a_\varkappa \xi\eta)$ von Δ; stellt also gar nicht mehr eine Form von x vor, welche nur für $x = a_\varkappa$ und η zu ∞^1 wird; in diesem Falle benutze ich eine Form

$$P_{a_\varkappa \eta}(x;\, a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa', a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p),$$

wo $a_\varkappa'$ verschieden ist von $a_\varkappa$ und nicht mit $a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p$ auf einer φ liegt. Analog für $\eta = a_\varkappa$.

Wenn ferner ξ und η so liegen, dass einer der weiteren $m-2$ Schnittpunkte der Geraden $(x\xi\eta) = 0$ mit einem $a_\varkappa$ zusammenfällt, so wird in der obigen Determinantendarstellung $\Omega_{\xi\eta}(x)$ zu $\frac{0}{0}$, hat aber hierbei eine bestimmte Bedeutung, die sich in Nr. 6 dieses Paragraphen ohne Weiteres ergeben wird. Andere Unbestimmtheiten von $\Omega_{\xi\eta}(x)$ kommen aber nicht vor, da man wegen der Willkürlichkeit der $\Omega^{(k)}(x)$ nicht anzunehmen braucht, dass $\Sigma \pm \Omega^{(1)}(\xi) \ldots \Omega^{(m-1)}(\eta)$ verschwindet, und da nach Voraussetzung von § 2, Nr. 4, c. ξ von η verschieden ist.

4. Es sind nun die wesentlichen Eigenschaften unserer Normalform dritter Gattung zu untersuchen; zuerst *die Art des Unendlichwerdens für* $x = \xi$.

Rückt x in die Nähe von ξ, so wird

$$P_{\xi\eta}(x) = \frac{f_\eta(\xi)}{(x\,\xi\,\eta)},$$

ein Ausdruck, der bei Annäherung von x an ξ von den η unabhängig wird (wie bei $d\omega_x$). Es folgt daraus noch, dass, wenn auch ξ und η so liegen sollten, dass $f_\eta(\xi) = 0$ ist, $P_{\xi\eta}(x)$ doch für $x = \xi$ in bestimmter Weise unendlich wird, wie $\frac{f_\zeta(\xi)}{(x\,\xi\,\zeta)}$, wo ζ beliebig.

Rückt x an η heran, so wird

$$P_{\xi\eta}(x) = \frac{f_\xi(\eta)}{(x\,\xi\,\eta)},$$

unabhängig von den ξ.

Für $x = \xi$ wird ferner

$$P_{\xi\eta}(x)\,d\omega_x = -\frac{(c\,\xi\,dx)}{(c\,\xi\,x)} = -\,d\log(c\,\xi\,x),$$

für $x = \eta$:

$$P_{\xi\eta}(x)\,d\omega_x = \frac{(c\,\eta\,dx)}{(c\,\eta\,x)} = -\,d\log(c\,\eta\,x),$$

Ausdrücke, die ebenfalls unabhängig von den c sind.

5. *Beziehung zwischen drei Normalformen dritter Gattung.* Nimmt man irgend einen dritten Punkt ζ von f an, so lässt $P_{\xi\eta}(x)$, nach § 3, die Entwicklung zu:

$$P_{\xi\eta}(x) = \alpha P_{\xi\zeta}(x) + \beta P_{\eta\zeta}(x) + \Phi^{(1)}(x),$$

wo α, β und die p Coefficienten von $\Phi^{(1)}$ noch zu bestimmen sind. Nun sind zur Bildung der drei hier auftretenden Normalformen dritter Gattung, nach Nr. 1 dieses Paragraphen, dieselben Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$$

verwendet; man hat also

$$P_{\xi\eta}(a_\varkappa) = 0,\quad P_{\xi\zeta}(a_\varkappa) = 0,\quad P_{\eta\zeta}(a_\varkappa) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, p),$$

daher:

$$\Phi^{(1)}(a_\varkappa) = 0.$$

Da aber $a_1, \ldots, a_p$ auf keiner Curve φ liegen, so folgt

$$\Phi^{(1)}(x) \equiv 0.$$

Setzt man $x = \xi$, so wird:

$$\frac{f_\eta(\xi)}{(x\,\xi\,\eta)} = \alpha\frac{f_\zeta(\xi)}{(x\,\xi\,\xi)},$$

also (s. Nr. 4)

$$\alpha = 1.$$

Ebenso für $x = \eta$:

$$\beta = -1.$$

Die Beziehung wird also:

$$P_{\xi\eta}(x) = P_{\xi\zeta}(x) - P_{\eta\zeta}(x):$$

Die normirte Form dritter Gattung mit den Parametern ξ, η ist die Differenz zweier gleichartiger Formen, von denen die eine nur von ξ, die andere nur von η abhängt.

Diese Relation besteht nur vermöge $f(x) = 0$. Man könnte sie als vollständige Identität schreiben:

$$(x\xi\xi)(x\eta\zeta)\Omega_{\xi\eta}(x) \equiv (x\xi\eta)\{(x\eta\zeta)\Omega_{\xi\zeta}(x) - (x\xi\xi)\Omega_{\eta\zeta}(x)\} + c \cdot f(x),$$

woraus sich durch Polarisiren noch η und Einsetzen von $x = \xi$, wegen $\Omega_{\xi\eta}(\xi) = f_\eta(\xi)$, ergäbe

$$c = (\xi\eta\zeta)^2.$$

6. Aus Nr. 5 folgt:

$$P_{\xi\eta}(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad \eta = \xi;$$

und daraus weiter, indem man $\zeta = \xi$ setzt:

$$P_{\eta\xi}(x) = -P_{\xi\eta}(x).$$

Daher ist $\Omega_{\xi\eta}$ symmetrisch in ξ und η, was sich auch aus Nr. 1 und 2 direct erkennen liesse.

Ferner ergiebt die Relation von Nr. 5, dass, wenn einer der weiteren Schnittpunkte von $f = 0$ mit $(x\xi\eta) = 0$, ausser ξ und η, mit einem der Punkte $a_\varkappa$ zusammenfällt, $P_{\xi\eta}(x)$ die Bedeutung

$$P_{\xi\zeta}(x) - P_{\eta\zeta}(x)$$

hat; dass also $\Omega_{\xi\eta}(x)$ ebenfalls eine bestimmte Bedeutung erhält (s. Nr. 3).

7. *Einführung anderer fester Punkte in die Normalform dritter Gattung.*

Eine mit irgend p Punkten

$$b_1, b_2, \ldots, b_p,$$

statt der a, gebildete Normalform dritter Gattung, mit den Parametern ξ, η, entwickle ich, nach § 2, Nr. 4. c, in eine Summe

$$P_{\xi\eta}(x; b_1, b_2, \ldots, b_p) = \beta P_{\xi\eta}(x; a_1, a_2, \ldots, a_p) + \sum_1^p{}_i \beta_i \Phi_i(x),$$

wo, nach § 2, Nr. 4, a.

$$\Phi_i(a_i) = 1, \quad \Phi_i(a_\varkappa) = 0 \qquad (\varkappa \neq i,\ i, \varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Von den Coefficienten ergiebt sich β, indem man $x = \xi$ setzt, *vorausgesetzt, dass die $b_1, b_2, \ldots, b_p$ nicht durch eine Curve φ verbunden sind* (wobei die linke Seite zu ∞ würde):

$$\beta = 1;$$

und dann weiter, für $x = a_\varkappa$:

$$\beta_\varkappa = P_{\xi\eta}(a_\varkappa;\ b_1, b_2, \ldots, b_p), \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

also:

$$P_{\xi\eta}(x; b_1, b_2, \ldots, b_p) = P_{\xi\eta}(x; a_1, a_2, \ldots, a_p) + \sum_1^p{}_i P_{\xi\eta}(a_i; b_1, b_2, \ldots, b_p)\Phi_i(x).$$

Insbesondere wird $P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots, a_p)$ durch eine Vertauschung der $a_\varkappa$ unter sich nicht geändert.

8. *Residuensatz.* Dass in Nr. 5 dieses Paragraphen $\alpha + \beta = 0$ wurde, ist ein specieller Fall des allgemeinen Residuensatzes:

Die Summe der Coefficienten

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_r$$

der Formen dritter Gattung

$$\gamma_1 P_{\xi_1\eta}(x) + \gamma_2 P_{\xi_2\eta}(x) + \cdots + \gamma_r P_{\xi_r\eta}(x)$$

in der Entwicklung einer algebraischen Form $\frac{M(x)}{N(x)}$, *die in* $x = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ *unendlich wird, ist gleich Null.*

Denn diese Summe von Formen dritter Gattung kann nach dem Reductionssatz für algebraische Formen (§ 3, Nr. 2) in $x = \eta$ nicht unendlich werden; verhält sich aber dort wie (Nr. 4 dieses Paragraphen):

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_r)\frac{f_c(\eta)}{(c\eta x)}.$$

§ 7.

Festlegung und Eigenschaften der Normalformen zweiter Gattung.

1. Die Normalform $P_{\xi\eta}(x)$ ist in ξ eine homogene *Function* 0^{ter} *Dimension*, wie die Relation von Nr. 5 des § 6 unmittelbar anzeigt. Ich benutze diesen Umstand zur Herstellung einer Normalform 2^{ter} Gattung aus dieser 3^{ten} Gattung.

Zu dem Zwecke lasse man in die Relation von § 6, Nr. 5 den Punkt η an den Punkt ξ heranrücken, indem man setzt:

$$\eta = \xi + \varepsilon\xi', \quad f(\xi) = 0, \quad f_{\xi'}(\xi) = 0;$$

so wird die Relation zu:

$$\lim_{\varepsilon=0} P_{\xi\eta}(x) = -\varepsilon \sum_1^3{}_i \frac{\partial P_{\xi\zeta}(x)}{\partial \xi_i}\xi_i',$$

wobei dieser Werth von dem willkürlichen Punkt ζ unabhängig ist. An Stelle des Factors von ε betrachte ich nun die Differentialableitung

$$\frac{\sum_1^3{}_i \frac{\partial P_{\xi\zeta}(x)}{\partial \xi_i}\xi_i'}{(c\xi\xi')} f_c(\xi) = D_\xi P_{\xi\zeta}(x).$$

Dieser Ausdruck ist nicht nur eine algebraische Form von ξ (s. § 1, Nr. 2), sondern auch eine algebraische Form von x, und zwar ist er *in x unsere Normalform 2ter Gattung, erster Ordnung.*

2. Die *Eigenschaften* unserer Normalform 2ter Gattung 1ter Ordnung

$$A_\xi(x) \equiv A_\xi^{(1)}(x) \equiv D_\xi P_{\xi\eta}(x)$$

sind folgende:

a) $A_\xi(x)$, mit dem Argument x und dem Parameter ξ, ist unabhängig von dem in $P_{\xi\eta}(x)$ vorkommenden zweiten Parameter η.

b) $A_\xi(x)$ wird, als Form von x, nur für $x = \xi$ zu unendlich, und zwar ∞^2 wie

$$-\frac{f_c(\xi)\cdot f_c(x)}{(c\xi x)^2},$$

ein in der Grenze $x = \xi$ von den c unabhängiger Ausdruck.

In der That unterscheidet sich $P_{\xi\eta}(x)$ von der Function von ξ:

$$-\frac{f_c(x)}{(xyc)}\,\frac{(\xi yc)}{(\xi xc)}$$

nur um eine für $\xi = x$ endlich bleibende Function von ξ (§ 6, Nr. 4); daher wird

$$\begin{aligned}\lim_{\xi=x}[D_\xi P_{\xi\eta}(x)] &= -\lim\left[\frac{f_c(x)}{(xyc)}\cdot D_\xi\frac{(\xi yc)}{(\xi xc)}\right]\\ &= -\lim\left[\frac{f_c(x)}{(xyc)}\cdot\frac{f_c(\xi)\,(xyc)}{(\xi xc)^2}\right]\\ &= -\lim\frac{f_c(x)\cdot f_c(\xi)}{(\xi xc)^2},\end{aligned}$$

wie behauptet war.

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned}\lim_{x=\xi}[D_\xi P_{\xi\eta}(x)\cdot d\omega_x] &= -\frac{f_c(\xi)}{(\xi\eta c)}\cdot\lim\left[D_x\frac{(x\eta c)}{(x\xi c)}\,d\omega_x\right]\\ &= -\frac{f_c(\xi)}{(\xi\eta c)}\lim\sum_i\frac{d}{dx_i}\,\frac{(x\eta c)}{(x\xi c)}\,dx_i\\ &= -\lim\frac{f_c(\xi)}{(x\xi c)^2}(cx\,dx).\end{aligned}$$

c) $A_\xi(x)$ verschwindet für die p Punkte $x = a_1, a_2, \ldots, a_p$ je in erster Ordnung.

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition von $A_\xi(x)$ als Grenzwerth von $P_{\xi\eta}(x)$ in Nr. 1. Die beiden Eigenschaften b) und c) definiren $A_\xi(x)$ eindeutig (nach § 2, Nr. 3. b).

d) Aus § 6 Nr. 7 folgt:

$$\begin{aligned}D_\xi P_{\xi\eta}(x;\, b_1, \ldots, b_p) &= D_\xi P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p)\\ &\quad + \sum_1^p{}_i\, D_\xi P_{\xi\eta}(a_i;\, b_1, \ldots, b_p)\,\Phi_i(x).\end{aligned}$$

e) Die mit den festen Punkten $a_1, \ldots, a_p$ gebildete Normalform $A_\xi(x)$ von x hat für jeden Werth von ξ die genannten Eigenschaften, ausgenommen, wenn ξ mit einem der Punkte $a_\varkappa$ zusammenfällt, wobei $A_\xi(x)$ für jeden Werth von x zu unendlich wird. In diesem Falle ist, nach § 6, Nr. 3, die Form von x:

$$E_\varkappa(x) \equiv D_{a_\varkappa} P_{a_\varkappa \eta}(x;\ a_1, \ldots, a_{\varkappa-1},\ a'_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p)$$

zu benutzen.

3. Es mögen noch einige Darstellungsformen von $A_\xi(x)$ entwickelt werden. Aus

$$P_{\xi\eta}(x) = \frac{\Omega_{\xi\eta}(x)}{(x\,\xi\,\eta)}$$

ergiebt sich nach § 1, Nr. 2:

$$A_\xi(x) = D_\xi P_{\xi\eta}(x) = -\frac{1}{(x\,\xi\,\eta)^2} \sum \pm \frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial (x\,\xi\,\eta)}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_3}$$

$$= -\frac{1}{(x\,\xi\,\eta)^2} \begin{Vmatrix} \frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x\,\xi\,\eta)^2} \left\{ f_x(\xi) \sum \frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_i} \eta_i - f_\eta(\xi) \sum \frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_i} x_i \right\}.$$

Setzt man hier für die willkürlichen Grössen η die Unterdeterminanten

$$\eta_1 = \varkappa_2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_3} - \varkappa_3 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2}, \quad \text{etc.},$$

wo auch die $\varkappa$ willkürlich sind, so wird wegen $f_\xi(\xi) = 0$:

$$(x\,\xi\,\eta) = -\sum \varkappa_i \xi_i \cdot f_x(\xi),$$

also

$$A_\xi(x) = \frac{\sum \pm \varkappa_1 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_3}}{\left(\sum \varkappa_i \xi_i\right)^2 \cdot f_x(\xi)},$$

wo erst nach Ausführung der Differentiationen $\frac{\partial \Omega_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_i}$ die η durch die obigen $(\varkappa f)$ zu ersetzen sind. Man hat also hier den Ausdruck zweiter Gattung, welcher im Nenner die Tangente des Parameterpunktes ξ enthält.

4. Da die Normalform 2ter Gattung, 1ter Ordnung von x, $D_\xi P_{\xi\eta}(x)$, im Parameter ξ selbst eine algebraische *Form*, aber keine Function 0ter Dimension, ist, so kann man auf dieselbe zur Aufstellung von Normalformen 2ter Gattung und *höherer* Ordnung von x den Ableitungsprocess D_ξ nicht mehr direct weiter anwenden. Man wird vielmehr

jene Form erst durch eine von x unabhängige Form $D_\xi X$, wo X irgend eine algebraische Function 0^{ter} Dimension in ξ ist, dividiren und erst von dem Quotienten

$$\frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x)}{D_\xi X} = \sum_i \frac{\partial P_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_i} d\xi_i : \sum_i \frac{\partial X}{\partial \xi_i} d\xi_i$$

die Differentialableitung D_ξ nehmen. Da im Folgenden die Wahl von X gleichgültig ist, so ist auch dieser Process für die ganze Classe, der die Curve $f = 0$ angehört, invariant.

Speciell wähle ich

$$X = \frac{(cs\xi)}{(cyz)(cy\xi)}, \quad D_\xi X = \frac{f_c(\xi)}{(cy\xi)^3}$$

und bilde die Form in x und ξ:

$$A_\xi^{(2)}(x) = D_\xi\left[\frac{(cy\xi)^2}{f_c(\xi)} D_\xi P_{\xi\eta}(x)\right] = D_\xi\left[\frac{(cy\xi)^2}{f_c(\xi)} A_\xi^{(1)}(x)\right] = \Delta_\xi A_\xi^{(1)}(x),$$

wobei ich diese Modification des Ableitungsprocesses D_ξ als *Process* Δ_ξ bezeichne.

Allgemein bilde ich ebenso

$$A_\xi^{(\nu)}(x) = \Delta_\xi A_\xi^{(\nu-1)}(x) = D_\xi\left[\frac{(cy\xi)^2}{f_c(\xi)} A_\xi^{(\nu-1)}(x)\right],$$

als *Normalform* 2^{ter} *Gattung*, ν^{ter} *Ordnung.*

5. $A_\xi^{(\nu)}(x)$ hat, als Form von x, folgende Eigenschaften:

a) Dieser Ausdruck wird, als Form von x, nur für $x = \xi$ zu unendlich, und zwar $\infty^{\nu+1}$ wie

$$-(\nu-1)!\, f_c(x)(cyx)^{\nu-2} D_\xi \frac{(cy\xi)^\nu}{(c\xi x)^\nu} = -\nu!\, f_c(x) f_c(\xi) \cdot \frac{(cyx)^{\nu-1}(cy\xi)^{\nu-1}}{(c\xi x)^{\nu+1}}$$

$$= (\nu-1)!\, f_c(\xi)(cy\xi)^{\nu-2} D_x \frac{(cyx)^\nu}{(c\xi x)^\nu},$$

für $\lim(x-\xi) = 0$ und $\nu \geqq 1$.

Denn dieses Verhalten gilt für $\nu = 1$ nach Nr. 2. Nimmt man aber an, dass $A_\xi^{(\nu-1)}(x)$ sich für $\lim(x-\xi) = 0$ verhalte wie

$$-(\nu-1)!\, f_c(x) f_c(\xi) \frac{(cyx)^{\nu-2}(cy\xi)^{\nu-2}}{(c\xi x)^\nu},$$

so folgt daraus das von $A_\xi^{(\nu)}(x)$ zu

$$-(\nu-1)!\, f_c(x)(cyx)^{\nu-2} D_\xi \frac{(cy\xi)^\nu}{(c\xi x)^\nu},$$

wie behauptet.

Man folgert daraus noch:

$$\lim_{x=\xi}[A_\xi^{(\nu)}(x)\,d\omega_x] = (\nu-1)!\,f_c(\xi)\,.\,(cy\xi)^{\nu-2}\lim\sum_i \frac{d}{dx_i}\,\frac{(cyx)^\nu}{(c\xi x)^\nu}\,dx_i$$

$$= -\,\nu!\,\lim f_c(\xi)\,(cy\xi)^{\nu-1}\,\frac{(cyx)^{\nu-1}(cx\,dx)}{(c\xi x)^{\nu+1}}\,.$$

b) $A_\xi^{(\nu)}(x)$ verschwindet für die p Punkte $x = a_1, a_2, \ldots, a_p$ je in erster Ordnung.

c) Die beiden Eigenschaften a) und b) definiren $A_\xi^{(\nu)}(x)$ vollständig (nach § 2, Nr. 3, b).

d) Nach § 6, Nr. 7.

$$A_\xi^{(\nu)}(x;\, b_1, \ldots, b_p) = A_\xi^{(\nu)}(x;\, a_1, \ldots, a_p) + \sum_1^p{}_i\, A_\xi^{(\nu)}(a_i;\, b_1, \ldots, b_p)\,\Phi_i(x)$$

wenn die $A_\xi^{(\nu)}(x;\, b_1, \ldots, b_p)$ ebenso aus $P_{\xi\eta}(x;\, b_1, \ldots, b_p)$ abgeleitet werden, wie die $A_\xi^{(\nu)}(x)$ aus $P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p)$.

e) Wenn ξ mit dem Punkte $a_\varkappa$ zusammenfallen sollte, wird man, wie in Nr. 2, e, die Form von x benutzen, welche aus $A_\xi^{(\nu)}(x)$ durch Ersetzen von $a_\varkappa$ durch $a'_\varkappa$ hervorgeht. Die weiteren Fälle, in welchen die Form unabhängig von x unendlich wird, werden durch Abänderung des willkürlichen Punktes c weggeschafft.

§ 8.

Die Normalform dritter Gattung als Function der Parameter: Aufstellung der einfachsten algebraischen Functionen.

1. Wie schon in § 7, Nr. 1 bemerkt, ist

$$P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p)$$

eine homogene *Function* 0^{ter} Dimension von ξ; dieselbe verschwindet für $\xi = \eta$ (§ 6, 6) und wird zu ∞^1 für $\xi = x$ wie (§ 6, 4):

$$-\frac{f_c(x)}{(c\xi x)} \quad \text{(unabhängig von } c \text{ und } \eta),$$

also wie die Function von ξ:

$$\frac{(c\xi\xi)}{(cx\xi)}\,.\,\frac{f_c(x)}{(c\xi x)}\,.$$

Das Verhalten dieser Function von ξ in den Punkten $a_1, \ldots, a_p$ folgt aus der Relation von § 6, Nr. 7 die für $b_\varkappa = x$, $b_i = a_i$ $(i \neq \varkappa)$ übergeht in

$$P_{\xi\eta}(x;\, a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa, \ldots, a_p)$$
$$= -\,P_{\xi\eta}(a_\varkappa;\, a_1, a_2, \ldots, a_{\varkappa-1}, x, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p)\Phi_\varkappa(x).$$

Die Function wird also im Punkte $\xi = a_\varkappa$ zu ∞^1 wie

$$\frac{f_c(a_\varkappa)}{(c\,\xi\,a_\varkappa)}\,\Phi_\varkappa(x)$$

oder also, wie die Function von ξ und Function von $a_\varkappa$:

$$\frac{(c\,\zeta\,\xi)}{(c\,\xi\,a_\varkappa)}\cdot\frac{f_c(a_\varkappa)}{(c\,\zeta\,a_\varkappa)}\,\Phi_\varkappa(x).$$

Weitere Unendlichkeitspunkte existiren für unsere Function $P_{\xi\eta}(x)$ von ξ keine. Denn diese müssen nach der Relation von § 6, 5 alle unabhängig vom Punkte η sein; unter den Nullpunkten des Nenners von $P_{\xi\eta}(x)$, nämlich (§ 6, 2):

$$(x\,\xi\,\eta)\,.\,\Delta$$

sind aber nur $\xi = x$ und $\xi = a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ wo η unabhängig. Dies ist für die Factoren $(x\,\xi\,\eta)$ und $(a_\varkappa\,\xi\,\eta)$ des Nenners von selbst klar; das Verschwinden des Factors

$$\sum \pm\, \Omega^{(1)}(\xi)\ldots\Omega^{(m-1)}(\eta)$$

von Δ aber würde aussagen, dass in der Schaar von adjungirten Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\lambda_1\,\Omega^{(1)}(x) + \cdots + \lambda_{m-1}\,\Omega^{(m-1)}(x) = 0$$

Curven vorkommen, welche in die Gerade $(x\,\xi\,\eta)$ und adjungirte Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen, was in § 6, Nr. 2 ausdrücklich ausgeschlossen ist und zum Beispiel dann sicher nicht stattfindet, wenn man der Schaar vorschreibt, durch p feste durch keine Curve φ verbundene Punkte von f, von denen keiner auf der Geraden $(x\,\xi\,\eta) = 0$ liegt, zu gehen.

Da eine algebraische Function, welche in $p+1$ nicht durch eine Curve φ verbundenen Punkten zu ∞^1 wird, noch 2 willkürliche Constanten enthält, so folgt somit:

Die allgemeinste algebraische Function von ξ, welche in den $p+1$ Punkten $\xi = x, a_1, a_2, \ldots, a_p$ zu ∞^1 wird, ist

$$\alpha\,P_{\xi\eta}(x;\, a_1, a_2, \ldots, a_p) + \beta$$

wo α und β willkürliche Parameter.

Unter diesen Functionen von ξ ist $P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p)$ selbst dadurch eindeutig festgelegt, dass dieselbe für $\xi = \eta$ verschwinden und für $\xi = x$ ∞^1 wie $-\frac{f_c(x)}{(c\,\xi\,x)}$ werden soll.

2. Um $P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p)$ als Function des Parameters $a_\varkappa$ zu untersuchen, schreibe ich zuerst

$$\Phi_\varkappa(x) = \frac{\psi_\varkappa(x)}{\psi_\varkappa(a_\varkappa)},$$

wo $\psi_\varkappa(x)$ die Curve φ durch $a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p$ ohne weitere

auf $a_\varkappa$ bezügliche Normirung ist; und die Relation von Nr. 1 dementsprechend:

$$\frac{P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p)}{\psi_\varkappa(x)} = -\frac{P_{\xi\eta}(a_\varkappa;\, a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, x, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p)}{\psi_\varkappa(a_\varkappa)}.$$

Links steht alsdann eine algebraische Function von x, welche ebenfalls in $p+1$ Punkten je zu ∞^1 wird, nämlich in

$$x = \xi,\ \eta,\ a_{\varkappa 1},\ a_{\varkappa 2},\ \ldots,\ a_{\varkappa,p-1},$$

wo $a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa,p-1}$ die $p-1$ weiteren Nullpunkte der durch

$$a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p$$

gehenden φ-Curve $\psi_\varkappa(x) = 0$ sind; ferner wird diese Function in $x = a_\varkappa$ zu 0 (und offenbar in p weiteren vom Index $\varkappa$ unabhängigen Punkten zu 0). Durch diese Bedingungen und ihr Verhalten in ξ $\left(\text{wie } \frac{f_\sigma(\xi)}{(c x \xi)\psi_\varkappa(\xi)}\right)$ ist die Function *eindeutig* bestimmt.

Die rechte Seite geht aber aus der linken durch Vertauschung von x mit $a_\varkappa$ bis auf's Vorzeichen hervor und hat analoge Eigenschaften als Function von $a_\varkappa$. Daher folgt:

Die Normalform

$$P_{\xi\eta}(x;\, a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

ist in Bezug auf jeden der Parameter $a_1, \ldots, a_p$ homogen von der 0^{ten} Dimension. Als Function von $a_\varkappa$ wird sie in $p+1$ Punkten je zu ∞^1, nämlich in

$$a_\varkappa = \xi,\ \eta,\ a_{\varkappa 1},\ a_{\varkappa 2},\ \ldots,\ a_{\varkappa,p-1},$$

wo die letzteren $p-1$ Punkte mit den a_i (ausser $a_\varkappa$) auf einer Curve φ liegen; und zu 0 in $a_\varkappa = x$. In $a_\varkappa = \xi$ verhält sie sich wie

$$-\frac{f_\sigma(\xi)}{(c a_\varkappa \xi)}\,\Phi_\varkappa(x).$$

3. Aus Nr. 1 und 2 folgt noch:

$$P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p) = -P_{\xi\eta}(a_\varkappa;\, a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, x, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p)\Phi_\varkappa(x)$$
$$= -P_{x,a_\varkappa}(\xi;\, \eta, a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa,p-1})\,\frac{\Phi_\varkappa(x)}{\Phi_\varkappa(\xi)}.$$

also eine verschiedenartige Darstellung derselben algebraischen Function von ξ oder derselben algebraischen Form von x.

Rückt insbesondere der Punkt x in einen der Punkte $a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa,p-1}$, welche auf der Curve $\Phi_\varkappa(x) = 0$ liegen, so werden die beiden letzteren der hier gegebenen Darstellungen der Function $P_{\xi\eta}(x;\, a_1, \ldots, a_p)$ von ξ zu $\frac{0}{0}$. In Wirklichkeit muss diese Function von ξ in den Quotienten zweier φ-Formen von ξ übergehen, welcher nur noch für $\xi = x,\ a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p$ zu ∞^1 wird, nicht mehr für $\xi = a_\varkappa$ (nach dem „Reductionssatz für algebraische Functionen", § 2, 2);

dieser Quotient verschwindet ferner für $\xi = \eta$ und muss für $\xi = x + dx$ ∞^1 wie

$$\frac{f_c(x)}{(cx\xi)} = \frac{1}{d\omega_x}$$

werden. Diese Eigenschaften bestimmen den Quotienten völlig und man kann ihn also unmittelbar anschreiben. Da er von a_x unabhängig definirt ist, so ersetze ich, wie in Nr. 2, $\Phi_x(\xi)$ durch $\psi_x(\xi)$, wo $\psi_x(\xi)$ verschwinde für $\xi = a_1, \ldots, a_{x-1}, a_{x+1}, \ldots, a_p$, also auch für $\xi = x = a_{xi}$. Eine Curve $\varphi(\xi) = 0$, welche für die Restpunkte von $\psi_x(\xi) = 0$:

$$\xi = a_{x1}, \ldots, a_{x,i-1}, a_{x,i+1}, \ldots, a_{x,p-1}$$

und $\xi = \eta$ verschwindet, sei mit $\psi_{xi}(\xi) = 0$ bezeichnet; sie trifft $f = 0$ in einer Gruppe von p Punkten, die corresidual ist zu

$$a_1, \ldots, a_{x-1}, a_{x+1}, \ldots, a_p, x,$$

und die η enthält. Dann ist:

$$\lim_{x=a_{xi}} P_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p) = \frac{\psi_{xi}(\xi)}{\psi_x(\xi)} \cdot \lim_{x=a_{xi}} D_x \frac{\psi_x(x)}{\psi_{xi}(x)}$$
$$= \left[\frac{(\alpha\psi_x f)}{\sum \alpha_i x_i}\right]_{x=a_{xi}} \cdot \frac{\psi_{xi}(\xi)}{\psi_x(\xi)}.$$

Dasselbe ergiebt die gewöhnliche Auswerthung des unbestimmten dritten Ausdrucks in der ersten Gleichung dieser Nummer.

4. Aus der algebraischen Function von ξ

$$P_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p),$$

welche in x und $a_1, \ldots, a_p$ je zu ∞^1 wird, lassen sich *algebraische Functionen von* ξ erzeugen, *welche in* x *zu* ∞^ν, *in* $a_1, \ldots, a_p$ *je zu* ∞^1 *werden.*

Zu dem Zwecke wende man den in § 7, Nr. 4 definirten Ableitungsprocess Δ_x auf diese algebraische Form von x $(\nu - 1)$-mal hintereinander an; und setze

$$P^{(i+1)}_{\xi\eta}(x) = \Delta_x P^{(i)}_{\xi\eta}(x) \equiv D_x\left[\frac{(cyx)^2}{f_c(x)} P^{(i)}_{\xi\eta}(x)\right],$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

wo

$$P^{(1)}_{\xi\eta}(x) \equiv P_{\xi\eta}(x)$$

sei.

Die Function $P^{(\nu)}_{\xi\eta}(x)$ *von* ξ *hat das bezeichnete Verhalten.*

Denn zunächst in der Nähe von $\xi = x$ verhält sich $P^{(\nu)}_{\xi\eta}(x)$ wie die Function von ξ:

$$(\nu - 1)!\, f_c(x)\,(cyx)^{\nu-2} \cdot \frac{(cy\xi)^\nu}{(cx\xi)^\nu}.$$

In der That gilt das für $\nu = 1$; es verhalte sich aber $P_{\xi\eta}^{(\nu-1)}(x)$ wie

$$(\nu-2)!\, f_c(x)\,(cyx)^{\nu-2}\cdot\frac{(cy\xi)^{\nu-1}}{(cx\xi)^{\nu-1}},$$

so wird $P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x)$ in der Nähe von $\xi = x$ zu

$$(\nu-2)!\,(cy\xi)^{\nu-1} D_x \frac{(cyx)^{\nu-1}}{(cx\xi)^{\nu-1}} = (\nu-1)!\, f_c(x)\,(cyx)^{\nu-2}\frac{(cy\xi)^{\nu}}{(cx\xi)^{\nu}},$$

wie behauptet.

Dass $P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x)$ in $\xi = a_\varkappa$ zu ∞^1 wird, folgt unmittelbar daraus, dass dasselbe für $\nu = 1$ geschieht. Um das Verhalten genauer anzugeben, wende man den Δ_x-Process auch auf die Form erster Gattung $\Phi_\varkappa(x)$ wiederholt an und führe die Bezeichnung ein:

$$\Phi_\varkappa^{(i+1)}(x) = \Delta_x \Phi_\varkappa^{(i)}(x) = D_x \frac{(cyx)^2}{f_c(x)}\Phi_\varkappa^{(i)}(x),$$

wo

$$\Phi_\varkappa^{(1)}(x) \equiv \Phi_\varkappa(x);$$

so verhält sich $P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x; a_1, \ldots, a_p)$ als Function von ξ in $\xi = a_\varkappa$ wie

$$\frac{f_c(a_\varkappa)\,\Phi_\varkappa^{(\nu)}(x)}{(c\xi a_\varkappa)},$$

oder wie

$$\frac{f_c(a_\varkappa)\,\Phi_\varkappa^{(\nu)}(x)}{(ca_\varkappa y)}\cdot\frac{(c\xi y)}{(c\xi a_\varkappa)}.$$

$P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x)$ ist durch die genannten Ordnungen des Unendlichwerdens in $\xi = a_1, \ldots, a_p$, sowie das Verhalten in $\xi = x$ völlig bestimmt.

§ 9.

Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter bei den Formen 2ter Gattung erster Ordnung. Kanonische Formen 2ter Gattung.

1. Die Normalform 2ter Gattung erster Ordnung von ξ

$$D_x P_{xy}(\xi; a_1, \ldots, a_p) = \mathsf{A}_x(\xi)$$

ist, nach dem Früheren (§ 7), auch in x eine Form, die sowohl in $x = \xi$, als in $x = a_1, \ldots, a_p$ je zu ∞^2 wird. Und zwar wird diese Form in der Nähe von $x = \xi$ zu (§ 7, Nr. 2, b)

$$-\frac{f_c(\xi)\,f_c(x)}{(cx\xi)^2},$$

in der Nähe von $x = a_\varkappa$ zu (§ 7, N. 2, d)

$$\frac{f_c(a_\varkappa)\,f_c(x)}{(cxa_\varkappa)^2}\,\Phi_\varkappa(\xi).$$

Durch diese Eigenschaften aber ist der Ausdruck in x nur bis auf eine additive Form $\varphi(x)$ definirt.

Die Form von x

$$D_x P_{xy}(\xi)$$

und die Normalform $D_\xi P_{\xi\eta}(x)$ zweiter Gattung erster Ordnung von x werden in $x = \xi$ in genau gleicher Weise zu unendlich. Entwickelt man also die Differenz

$$D_x P_{xy}(\xi;\ a_1 \ldots a_p) - D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ a_1 \ldots a_p) \equiv F(\xi, x)$$

nach § 3 in die Normalformen von x, so erhält man keine auf ξ bezügliche Normalformen 2ter und 3ter Gattung mehr, sondern nur noch auf die a_x bezügliche. Damit ist der am Schlusse von § 4 verlangte Nachweis, dass $c_1 = 0$, für den dortigen Fall $\nu = 2$ geliefert. Um auch den Rest dieses Nachweises zu erbringen, führe man den Ableitungsprocess Δ_ξ $(\nu - 2)$-mal hintereinander auf vorstehende Differenz aus; so erhält man:

$$D_x P_{xy}^{(\nu-1)}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) - \mathsf{A}_\xi^{(\nu-1)}(x) = \mathsf{A}_\xi^{(\nu-2)} \cdot F(\xi, x),$$

ein Ausdruck, der für $x = \xi$ ebenfalls nicht mehr unendlich wird. Da aber alle algebraischen Functionen von x, welche in $x = \xi$ zu $\infty^{\nu-1}$, in $x = a_1, \ldots, a_p$ je zu ∞^1 werden, sich aus einer Constanten und

$$P_{xy}^{(1)}(\xi),\ P_{xy}^{(2)}(\xi), \ldots, P_{xy}^{(\nu-1)}(\xi)$$

linear zusammensetzen lassen, so können in der Entwicklung des § 4, auf ξ bezüglich, nur die

$$\mathsf{A}_\xi^{(1)}(x),\ \mathsf{A}_\xi^{(2)}(x), \ldots, \mathsf{A}_\xi^{(\nu-1)}(x)$$

auftreten, wie dort behauptet.

2. Die in Nr. 1 angedeutete Reduction der Form von x

$$F(\xi, x)$$

auf die Normalformen soll nun im Folgenden ausgeführt werden. Es treten in dieser Entwiclung nach § 4 nur die auf die a_x bezüglichen Normalformen 2ter Gattung erster Ordnung und die Normalformen erster Gattung von x auf. Für die ersteren sollen die in § 7, Nr. 2, e definirten Formen

$$E_x(x)$$

gewählt werden, für welche

$$E_x(a_i) = 0, \quad \text{wenn} \quad i \neq x, \quad E_x(a_x) = 0,$$

$$E_x(a_x) = \infty^2, \quad \text{wie} \quad -\frac{f_c(a_x) \cdot f_c(x)}{(cxa_x)^2};$$

für die letzteren die Formen $\Phi_x(x)$ des § 2, Nr. 4; und es werde gesetzt:

$$F(\xi, x) = \sum_1^p{}_x \chi_x(\xi)\, E_x(x) + \sum_1^p{}_x \psi_x(\xi)\, \Phi_x(x),$$

wo die $\chi_\varkappa(\xi)$, $\psi_\varkappa(\xi)$ zu bestimmende Formen von ξ sind. Nun ist aber

$$F(x, \xi) = -F(\xi, x);$$

die rechte Seite muss sich also auch nach Formen $E_\varkappa(\xi)$ und $\Phi_\varkappa(\xi)$ entwickeln lassen; d. h., da die $2p$ Formen $E_\varkappa(x)$ und $\Phi_\varkappa(x)$ von einander linear-unabhängig sind:

$$\chi_\varkappa(\xi) = \sum_1^p{}_i \{\lambda_{\varkappa i} E_i(\xi) + \lambda'_{\varkappa i} \Phi_i(\xi)\},$$

$$\psi_\varkappa(\xi) = \sum_1^p{}_i \{\mu_{\varkappa i} E_i(\xi) + \mu'_{\varkappa i} \Phi_i(\xi)\},$$

mit zu bestimmenden Constanten $\lambda_{\varkappa i}$, $\lambda'_{\varkappa i}$, $\mu_{\varkappa i}$, $\mu'_{\varkappa i}$.

Davon bestimmen sich nun die $\lambda_{\varkappa i}$, $\lambda'_{\varkappa i}$, $\mu_{\varkappa i}$ ohne Weiteres, indem man x dem Punkte $a_\varkappa$ sich nähern lässt und x mit ξ vertauscht. Denn in der Nähe von $x = a_\varkappa$ erhält man (s. Nr. 1 dieses Paragraphen):

$$\frac{f_c(a_\varkappa) f_c(x)}{(cx a_\varkappa)^2} \Phi_\varkappa(\xi) = -\chi_\varkappa(\xi) \cdot \frac{f_c(a_\varkappa) \cdot f_c(x)}{(cx a_\varkappa)^2},$$

also

$$\chi_\varkappa(\xi) = -\Phi_\varkappa(\xi),$$

und durch Vertauschung von x mit ξ:

$$\psi_\varkappa(\xi) = E_\varkappa(\xi) + \sum_1^p{}_i \mu'_{\varkappa i} \Phi_i(\xi), \quad \text{wo} \quad \mu'_{\varkappa i} = -\mu'_{i\varkappa},$$

$$\text{also} \quad \mu'_{\varkappa\varkappa} = 0.$$

Lässt man nun auch ξ an $a_\varkappa$ rücken, so geht die Relation über in

$$\begin{aligned} &- D_{a_\varkappa} P_{a_\varkappa \eta}(x;\ a_1, \ldots, a_\varkappa, \ldots, a_p) \\ &= - D_{a_\varkappa} P_{a_\varkappa \eta}(x;\ a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a'_\varkappa, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p) + \\ &\quad + \Phi_\varkappa(x)\, D_{a_\varkappa} P_{a_\varkappa \eta}(a_\varkappa;\ a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a'_\varkappa, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p) + \\ &\quad + \sum_1^p{}_i \mu'_{i\varkappa} \Phi_i(x); \end{aligned}$$

da aber, (nach § 7, Nr. 2, *d*), indem man dort

$$a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a'_\varkappa, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p, a_\varkappa$$

für

$$b_1, \ldots, b_{\varkappa-1}, b_\varkappa, b_{\varkappa+1}, \ldots, b_p, \xi$$

setzt:

$$\begin{aligned} &D_{a_\varkappa} P_{a_\varkappa \eta}(x;\ a_1 \ldots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p) + \\ &+ \Phi_\varkappa(x) \cdot D_{a_\varkappa} P_{a_\varkappa \eta}(a_\varkappa;\ a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}, a'_\varkappa, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_p) \end{aligned}$$

gleich der endlichen Grösse

$$D_{a_x} P_{a_x \eta}(x;\ a_1, \ldots, a_{x-1}, a_x', a_{x+1}, \ldots, a_p)$$

ist, so folgt für alle x

$$\sum_i \mu_{ix}' \Phi_i(x) = 0,$$

d. h.

$$\mu_{ix}' = 0, \quad \text{für alle } i \text{ und } x.$$

Die Entwicklung wird somit

$$D_x P_{x\eta}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) - D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p) =$$

$$= \sum_1^p {}_x \left\{ E_x(\xi) \cdot \Phi_x(x) - \Phi_x(\xi)\, E_x(x) \right\}.$$

Dass die rechte Seite dieser Gleichung von den in den $E_x(\xi)$, $E_x(x)$ steckenden willkürlichen Punkten $a_1', \ldots, a_p'$ nur scheinbar abhängig ist, ergiebt die Relation § 7, Nr. 2, *d.*

3. Führt man für den Augenblick die Bezeichnung

$$D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_1^p {}_x E_x(\xi)\, \Phi_x(x) = \mathsf{H}_\xi(x)$$

ein, so schreibt sich die Relation von Nr. 2:

$$\mathsf{H}_\xi(x) = \mathsf{H}_x(\xi).$$

Es ist aber $\mathsf{H}_\xi(x)$ in x eine Form 2^{ter} Gattung, welche nur in ξ zu ∞^2 wird, genau wie die Normalform $D_\xi P_{\xi\eta}(x)$; und durch dieses Verhalten und durch ihre Werthe $E_x(\xi)$ in $x = a_x$ $(x = 1, 2, \ldots, p)$ ist sie eindeutig bestimmt. Die Relation stellt daher den *Satz von der Vertauschung von Argument x und Parameter ξ vor:*

Diejenige völlig bestimmte algebraische Form 2^{ter} Gattung erster Ordnung von x, mit dem Parameter ξ, welche in $x = \xi$ zu

$$- \frac{f_c(\xi) \cdot f_c(x)}{(c\,x\,\xi)^2}$$

wird, und in den festen Punkten $x = a_x$ $(x = 1, \ldots, p)$ bezüglich die Werthe $E_x(\xi)$ annimmt, bleibt durch Vertauschung von x mit ξ unverändert.

4. In die Definition der Form $\mathsf{H}_\xi(x)$ treten noch die $2p$ festen Punkte $a_1, \ldots, a_p$, $a_1', \ldots, a_p'$ ein. Der *allgemeinste Vertauschungssatz* für Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung ist der folgende:

Die allgemeinste algebraische Form 2^{ter} Gattung von x, welche in $x = \xi$ zu ∞^2 wird wie

$$- \frac{f_c(\xi) \cdot f_c(x)}{(c\,x\,\xi)^2},$$

und welche durch die Vertauschung des Arguments x mit dem Parameter ξ nicht verändert wird, ist:

$$B_\xi(x)^*) \equiv H_\xi(x) + \sum_{i,\varkappa} \alpha_{i\varkappa}\, \Phi_i(\xi)\, \Phi_\varkappa(x),$$

$$\equiv D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p) = \sum_\varkappa \Big\{ E_\varkappa(\xi) + \sum_i \alpha_{i\varkappa}\, \Phi_i(\xi) \Big\}' \Phi_\varkappa(x),$$

wo die $\alpha_{i\varkappa}$ beliebige, von x und ξ unabhängige, Grössen sind, für welche

$$\alpha_{\varkappa i} = \alpha_{i\varkappa}$$

ist.

Denn nach der ersten Eigenschaft kann sich $B_\xi(x)$ von $H_\xi(x)$ nur um ein Glied von der Form

$$\sum_\varkappa \Psi_\varkappa(\xi)\, \Phi_\varkappa(x)$$

unterscheiden, wo $\Psi_\varkappa(\xi)$ noch zu bestimmen ist; die Vertauschung von x mit ξ ergiebt dann

$$\sum_\varkappa \Psi_\varkappa(\xi)\, \Phi_\varkappa(x) = \sum_i \Psi_i(x)\, \Phi_i(\xi),$$

also für $x = a_\varkappa$:

$$\Psi_\varkappa(\xi) = \sum_i \Psi_i(a_\varkappa)\, \Phi_i(\xi),$$

was zur obigen Bestimmung führt.

Es liegt im Folgenden kein Grund vor, die $\alpha_{i\varkappa} = \alpha_{\varkappa i}$ irgendweiter zu specialisiren. Ich werde daher nicht die speciellere Form $H_\xi(x)$, sondern gleich die allgemeinste Form

$$B_\xi(x)$$

in die Theorie einführen und dieselbe als *kanonische Form zweiter Gattung erster Ordnung* bezeichnen.

Man hat

$$B_\xi(x) = B_\varkappa(\xi),$$

$$B_{a_\varkappa}(x) = E_\varkappa(x) + \sum_i \alpha_{\varkappa i}\, \Phi_i(x),$$

also auch

$$B_\xi(x) = B_\varkappa(\xi) = D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_\varkappa B_{a_\varkappa}(\xi)\, \Phi_\varkappa(x).$$

$$= D_\varkappa P_{\varkappa y}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_\varkappa \Phi_\varkappa(\xi)\, B_{a_\varkappa}(x).$$

In dieser Definition und in diesen Formeln ist es wegen der Willkürlichkeit der $\alpha_{i\varkappa}$ erlaubt, *die kanonische Form $B_\xi(x)$ als von*

*) In der in der Einleitung cit. Note III aus den Erl. Ber. war diese Form von x und ξ mit $D_\xi X_{\xi\eta}(x)$ bezeichnet.

den a_x und a'_x gänzlich unabhängig anzunehmen; wie es auch im Folgenden geschehen soll.

Denn bezeichnet man die mit Punkten $b_1, \ldots, b_p$, $b_1', \ldots, b_p'$ statt der a, a' gebildeten Formen mit einem oberen Strich, so wird:

$$\overline{\mathsf{H}}_\xi(x) = \mathsf{H}_\xi(x) + \sum_{i,x} \beta_{ix}\, \Phi_i(\xi)\, \Phi_x(x), \quad \text{wo} \quad \beta_{ix} = \beta_{xi},$$

und da die rechte Seite von den a, a' unabhängig wird, so braucht man nur in der Definitionsgleichung von $B_\xi(x)$ die α_{ix} durch $\beta_{ix}+\alpha'_{ix}$ zu ersetzen, wo die $\alpha'_{ix} = \alpha'_{xi}$ ebenfalls willkürlich sind. Man berechnet übrigens leicht:

$$\sum_x \beta_{ix}\, \Phi_x(x) = \sum_i \left[\overline{E}_i(a_i) - E_i(b_i)\right] \overline{\Phi}_i(x).$$

5. Als *kanonische Formen zweiter Gattung von den verschiedenen Ordnungen in x* werden angenommen:

$$B_\xi^{(1)}(x) = B_\xi(x), \quad B_\xi^{(2)}(x), \ldots, B_\xi^{(\nu)}(x),$$

wo

$$B_\xi^{(i)}(x) = \Delta_\xi B_\xi^{(i-1)}(x).$$

Dann ist, wenn auch:

$$E_x^{(1)}(\xi) = E_x(\xi), \qquad \Phi_x^{(1)}(\xi) = \Phi_x(\xi),$$
$$E_x^{(i)}(\xi) = \Delta_\xi E_x^{(i-1)}(\xi), \qquad \Phi_x^{(i)}(\xi) = \Delta_\xi \Phi_x^{(i-1)}(\xi)$$

eingeführt werden, zum Vergleich der $B_\xi^{(\nu)}(x)$ mit den $\mathsf{A}_\xi^{(\nu)}(x)$ des § 7, Nr. 4:

$$B_\xi^{(\nu)}(x) = \mathsf{A}_\xi^{(\nu)}(x) + \sum_x \left\{ E_x^{(\nu)}(\xi) + \sum_i \alpha_{xi}\, \Phi_i^{(\nu)}(\xi) \right\} \Phi_x(x)$$
$$= \mathsf{A}_\xi^{(\nu)}(x) + \sum_x B_{a_x}^{(\nu)}(\xi)\, \Phi_x(x).$$

Diese Form von x hat noch die Eigenschaften des § 7, Nr. 5, *a*) in $x = \xi$, bleibt aber, entgegengesetzt der Eigenschaft *e*), auch noch für $\xi = a_x$ benutzbar. Und zwar wird, indem man $x = a_x$ in die letzte Formel einsetzt:

$$B_{a_x}^{(\nu)}(x) = B_x^{(\nu)}(a_x).$$

Die Vertauschungsgleichung von Nr. 4 dieses Paragraphen giebt jetzt:

$$B_\xi^{(\nu)}(x) = D_x\, P_{xy}^{(\nu)}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_x \Phi_x^{(\nu)}(\xi)\, B_{a_x}(x),$$

wo die $P_{xy}^{(\nu)}(\xi)$ in § 8, Nr. 4 definirt sind.

§ 10.

Darstellung von algebraischen Formen.

1. Die Formeln von Nr. 2, bez. Nr. 4 und 5 des vorigen Paragraphen liefern die in § 5, Nr. 1 angezeigte Darstellung der algebraischen Normal- bezüglich kanonischen Formen 2^{ter} Gattung von x

$$\mathsf{A}_\xi^{(\nu)}(x), \quad \text{bez.} \quad B_\xi^{(\nu)}(x),$$

mittels des D_x einer algebraischen Function von x, einer Summe von p auf feste Punkte $a_1, \ldots, a_p$ bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung von x und einer Form $\Phi^{(1)}(x)$, *in expliciter Gestalt.* Man hat hiernach

$$\mathsf{A}_\xi^{(1)}(x) \equiv D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p) = D_x P_{xy}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) + \\ + \sum_\varkappa \Phi_\varkappa(\xi) \cdot E_\varkappa(x) - \sum_\varkappa E_\varkappa(\xi) \cdot \Phi_\varkappa(x),$$

$$\mathsf{A}_\xi^{(\nu)}(x) = D_x P_{xy}^{(\nu)}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_\varkappa \Phi_\varkappa^{(\nu)}(\xi) \cdot E_\varkappa(x) - \\ - \sum_\varkappa E_\varkappa^{(\nu)}(\xi) \cdot \Phi_\varkappa(x),$$

und allgemeiner:

$$B_\xi^{(\nu)}(x) = D_x P_{xy}^{(\nu)}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_\varkappa \Phi_\varkappa^{(\nu)}(\xi)\, B_{a_\varkappa}(x),$$

wo die linke Seite von den Punkten $a_1, \ldots, a_p$ gar nicht abhängt. Ausführlicher geschrieben lautet diese Gleichung:

$$\begin{vmatrix} B_\xi^{(\nu)}(x) & B_{a_1}(x) & \ldots & B_{a_p}(x) \\ \varphi_1^{(\nu)}(\xi) & \varphi_1(a_1) & \ldots & \varphi_1(a_p) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varphi_p^{(\nu)}(\xi) & \varphi_p(a_1) & \ldots & \varphi_p(a_p) \end{vmatrix} = D_x P_{xy}^{(\nu)}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p).$$

2. Sei jetzt zunächst eine algebraische Form

$$\frac{\mathfrak{M}(x)}{\mathfrak{N}(x)}$$

vorgelegt, welche, wie in § 3, Nr. 2, in den von einander endlich verschiedenen Punkten

$$x = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$$

je ∞^1 wird. Und zwar darf man annehmen, dass $\mathfrak{M}(x)$ in diesen Punkten gar nicht, $\mathfrak{N}(x)$ je einfach verschwindet. Man hat dann eine Darstellung (§ 3, Nr. 2):

$$\frac{\mathfrak{M}(x)}{\mathfrak{N}(x)} = \sum_1^r \gamma_i P_{\xi_i \eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_1^p \alpha_i \Phi_i(x),$$

wo zunächst, damit die rechte Seite in dem willkürlichen Punkte η nicht mehr unendlich wird,

$$\sum_i \gamma_i = 0$$

ist (wie schon in § 6, Nr. 8 gesagt; Residuensatz).

Setzt man $x = \xi_i$, so wird:

$$\gamma_i = \lim_{x=\xi_i} \frac{(cx\xi_i)}{f_c(\xi_i)} \cdot \frac{\mathfrak{M}(\xi_i)}{\mathfrak{N}(x)} = -\mathfrak{M}(\xi_i) \lim \frac{d\omega_x}{d\mathfrak{N}(x)}.$$

Wegen $\mathfrak{N}(\xi_i) = 0$ wird aber

$$\lim_{x=\xi_i} \frac{d\mathfrak{N}(x)}{d\omega_x} = \lim \frac{(c\mathfrak{N}f)}{\sum_1^3 c_i x_i}$$

unabhängig von den c; und somit

$$\gamma_i = \mathfrak{M}(\xi_i) \frac{\sum c_i \xi_{ii}}{(c\mathfrak{N}f)_{x=\xi_i}}.$$

In dieser Form drückt die Gleichung $\sum_i \gamma_i = 0$ den bekannten „Jacobi'schen Satz" (Cr. J. Bd. XIV, pag. 281) aus.

Zur Bestimmung der α_i setze man $x = a_i$, wonach:

$$\alpha_i = \frac{\mathfrak{M}(a_i)}{\mathfrak{N}(a_i)}.$$

3. Ist allgemein eine algebraische Form vorgelegt

$$\frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)},$$

welche in den Punkten

$$x = \xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_s$$

bez. zu

$$\infty^{\nu_1},\ \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s}$$

wird, so hat man in den Reductionsformeln des § 3 für einen dieser Punkte, $x = \xi$, eine Gliedersumme

$$S(x) = \beta_{\nu-1} A_\xi^{(\nu-1)}(x) + \beta_{\nu-2} A_\xi^{(\nu-2)}(x) + \cdots + \beta_1 A_\xi^{(1)}(x) + \gamma P_{\xi\eta}(x),$$

deren Coefficienten β, γ nun weiter zu behandeln sind. Zu dem Zwecke muss man das Verhalten von $\frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}$ in der Nähe von $x = \xi$ kennen; d. h. aus den in § 7, Nr. 5 benutzten Vergleichsformen von x eine Reihe

$$S'(x) = \beta'_{\nu-1} D_x \frac{(cyx)^{\nu-1}}{(c\xi x)^{\nu-1}} + \beta'_{\nu-2} D_x \frac{(cyx)^{\nu-2}}{(c\xi x)^{\nu-2}} + \cdots + \beta_1' D_x \frac{(cyx)}{(c\xi x)} + \\ + \gamma' \frac{(cy\xi) f_c(x)}{(cyx)(cx\xi)}$$

derart bilden, dass $\frac{M(x)}{N(x)} - S'(x)$ in $x = \xi$ nicht mehr unendlich wird; was nach dem successiven Verfahren des § 3 geschehen kann. Nach § 7, Nr. 5, bez. Nr. 2 hat man dann:

$$\beta_i = \frac{\beta_i'}{(i-1)!\, f_c(\xi)\, (cy\xi)^{i-2}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

$$\gamma = \gamma'.$$

Somit, indem man die auf die verschiedenen Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_s$ bezüglichen Summen S durch untere Indices unterscheidet:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \sum_1^s S_i(x) + \sum_1^p \alpha_i \Phi_i(x).$$

Dabei wird auch hier, wegen des Punktes η:

$$\sum_i \gamma_i = 0$$

und, indem man $x = a_i$ setzt:

$$\alpha_i = \frac{M(a_i)}{N(a_i)}.$$

Um die Reduction zu vollenden, wird man in den Summen $S(x)$ alsdann die $A_\xi^{(i)}(x)$ durch die aus § 9, Nr. 5 und § 10, Nr. 1 hervorgehenden Ausdrücke

$$D_x P_{xy}^{(i)}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p) + \sum_1^p \left\{ \Phi_x^{(i)}(\xi)\, B_{a_x}(x) - B_{a_x}^{(i)}(\xi)\, \Phi_x(x) \right\}$$

ersetzen; womit die in § 5 geforderte Reduction geleistet ist.

§ 11.

Darstellung von $D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ und von $D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$, wo $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ eine beliebige algebraische Function von ξ ist.

1. Seien $\chi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ zwei ganze Functionen r^{ter} Ordnung der Coordinaten von ξ. Die algebraische Function von ξ:

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

werde in den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_r$, bez. in den Ordnungen

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$$

unendlich; in den Punkten $y_1, y_2, \ldots, y_{r'}$, bez. in den Ordnungen

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r'}$$

zu 0; wobei also

$$\sum \nu_i = \sum \mu_{i'}$$

ist. Dann wird die algebraische Form von ξ

$$D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)} D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{1}{r} \frac{(\psi\chi f)}{\psi(\xi)\chi(\xi)}$$

sowohl in den x, als in den y, je zu ∞^1. Um das Verhalten daselbst genauer anzugeben, so werde $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ in $\xi = x$ zu ∞^ν wie (s. § 8, Nr. 4)

$$\frac{A(\xi)}{(c\xi x)^\nu}$$

wo $A(\xi)$ eine ganze Function ν^{ter} Ordnung der Coordinaten von ξ, welche für $\xi = x$ von 0 verschieden ist; so wird

$$\lim_{\xi=x} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{(c\xi x)^\nu}{A(x)} \lim D_\xi \frac{A(\xi)}{(c\xi x)^\nu} = \lim \frac{\sum c_i f_i \cdot \sum A_i(x) \cdot x_i}{A(x)(c\xi x)}$$

$$= \frac{\nu f_0(x)}{(c\xi x)}$$

und ebenso für $\xi = y$:

$$\lim_{\xi=y} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = -\mu \frac{f_0(y)}{(c\xi y)}.$$

Entwickelt man also nach Normalformen dritter und erster Gattung, so findet sich:

$$D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_1^r{}_i \nu_i P_{x_i,s}(\xi) - \sum_1^{r'}{}_i \mu_{i'} P_{y_{i'},s}(\xi) + \sum_1^\varrho{}_i \lambda_i \Phi_i(\xi),$$

wobei die λ_i sich durch die Substitution $\xi = a_i$ ergeben:

$$\lambda_i = \lim_{\xi=a_i} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{1}{r}\left[\frac{(\psi\chi f)}{\psi(\xi)\chi(\xi)}\right]_{\xi=a_i}.$$

In dieser Darstellung ist nur vorausgesetzt, dass keiner der willkürlichen festen Punkte a_i mit einem der Punkte $x_i, y_{i'}$ zusammenfalle.

2. Um die algebraische Form von ξ

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

zu reduciren, führe ich zunächst die algebraische Function von ξ

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

auf die einfachsten, in § 8 Nr. 1 und 4 behandelten algebraischen Functionen von ξ:

$$P^{(i)}_{\xi\eta}(x;\ a_1, \ldots, a_p)$$

zurück. Zuerst sei der Fall betrachtet, dass $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ in den Punkten

$$\xi = x_1, x_2, \ldots, x_r$$

nur je einfach unendlich werde; Punkte die übrigens zunächst als von den p festen Punkten $a_1, \ldots, a_p$ verschieden angenommen werden sollen. Dann kann man setzen:

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta)} = \sum_1^r c_i\, P_{\xi\eta}(x_i). \tag{1}$$

Denn hier kann man zunächst die c_i so bestimmen, dass die Differenz der beiden Ausdrücke für keinen der r Punkte x_i zu unendlich wird; diese Differenz ist aber dann eine algebraische Function von ξ, welche nur für $\xi = a_1, \ldots, a_p$ zu je ∞^1 werden soll, d. h. eine Constante, die $= 0$ wird, da beide Seiten für $\xi = \eta$ verschwinden.

Mittels $\xi = x_i$ folgt dabei:

$$c_i = \lim_{\xi = x_i} \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} \frac{(c x_i\, \xi)}{f_c(\xi)} = \lim \frac{1}{D_\xi \frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}}. \tag{2}$$

$$= \chi(x_i) \left[\frac{\sum \alpha_i \xi_i}{(\alpha \psi f)}\right]_{\xi = x_i} = \frac{r \chi^2(x_i)}{(\chi \psi f)_{\xi = x_i}}.$$

In $\xi = a_\varkappa$ verhält sich $P_{\xi\eta}(x_i)$, nach § 8 Nr. 1, wie

$$\frac{f_c(a_\varkappa)}{(c\xi a_\varkappa)}\, \Phi_\varkappa(x_i);$$

und da die rechte Seite der Gleichung (1) daselbst nicht unendlich werden soll, muss sein

$$\sum_1^r c_i\, \Phi_\varkappa(x_i) = 0, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p), \tag{3}$$

oder, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ irgend p linear von einander unabhängige Formen erster Gattung sind:

$$\sum_1^r c_i\, \varphi_\varkappa(x_i) = 0, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p). \tag{3'}$$

Diese p Gleichungen sagen aus, dass man auf der rechten Seite von (1) die r Parameter $c_1, c_2, \ldots, c_r$ nicht willkürlich annehmen kann, wenn man eine algebraische Function von ξ erhalten will, die höchstens in $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_r$ zu ∞^1 werden soll. Vielmehr haben die c zu diesem Zwecke die Gleichungen (3), oder (3'), aber auch nur diese, zu erfüllen. (3') stellt, wenn σ linear von einander unabhängige

Curven φ durch die Gruppe $x_1, x_2, \ldots, x_r$ hindurchgehen ($\sigma \geqq 0$) — d. h. wenn von der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_p(x_1) & \ldots & \varphi_p(x_r) \end{matrix} \right\|$$

alle $(p - \sigma + 1)$-reihigen, aber nicht alle $(p - \sigma)$-reihigen Determinanten verschwinden —, $p - \sigma$ unabhängige lineare Bedingungen für die c_i vor; was, die additive Constante von (1) eingeschlossen, $r - p + \sigma + 1$ linear von einander unabhängige Functionen liefert, die in $x_1, \ldots, x_r$ zu ∞^1 werden sollen.

Dieses ist der sogen. „Riemann-Roch'sche Satz", ausgesprochen für den Fall *einfacher* Unendlichkeitspunkte. Indessen ist damit zugleich der allgemeinste Fall bewiesen, indem man statt $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ nur die Function $\frac{\chi(\xi)}{\lambda\psi(\xi) + \mu\chi(\xi)}$ betrachtet, welche bei genügend allgemeinen λ, μ nur je einfach unendlich wird. Uebrigens ist die Gleichung (3') identisch mit dem Residuensatze

$$\sum_i \gamma_i = 0$$

von § 10, Nr. 2, wenn man für die dortige Form $\frac{\mathfrak{M}(x)}{\mathfrak{N}(x)}$ die Form

$$\frac{\chi(x)}{\psi(x)}\varphi_\varkappa(x)$$

setzt. Und da sowohl der Residuensatz als der gewöhnliche Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes (Math. Ann. 7) auf dem „Reductionssatz für algebraische Formen, bez. Functionen" beruht, so sind beide Beweise des R.-R.'schen Satzes nicht wesentlich von einander verschieden. —

Es ist noch der Fall zu besprechen, dass einer der Punkte x_i mit einem Punkte $a_\varkappa$ zusammenfällt. Man sieht dann sofort, dass auch hier Gleichung (1) noch gilt; nur dass das Glied $c_\varkappa P_{\xi\eta}(a_\varkappa; a_1, \ldots, a_p)$ einfach herausfällt, und dass von den Gleichungen (3) die $\varkappa^{\text{te}}$ zur Bestimmung der übrigen c nichts mehr beiträgt, also ebenfalls weggelassen werden kann.

Aus (1) ergiebt sich endlich durch den D_ξ-Process, unter Einführung der § 9, Nr. 4 definirten kanonischen Form 2^{ter} Gattung $B_x(\xi)$, und nach Gleichung (3):

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_i c_i D_\xi P_{\xi\eta}(x_i) = \sum_i c_i D_\xi \Big[B_{x_i}(\xi) - \sum_\varkappa \Phi_\varkappa(x_i) B_{a_\varkappa}(\xi) \Big],$$

also

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_1^r{}^i \chi(x_i) \cdot \left[\frac{\sum \frac{\alpha_i \xi_i}{(\alpha\psi f)}}{} \right]_{\xi = x_i} \cdot B_{x_i}(\xi),$$

als Entwicklung des D_ξ der algebraischen Function von ξ nach auf die Unstetigkeitspunkte bezüglichen kanonischen Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung von ξ.

Die letzte Gleichung würde sogar noch richtig bleiben, wenn in der Definition von $B_\varkappa(\xi)$ in § 9, N. 4 $\alpha_{i\varkappa}$ nicht $= \alpha_{\varkappa i}$ angenommen wäre.

3. Sei jetzt

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

eine beliebige algebraische Function; die in den Punkten

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

je in den Ordnungen

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$$

unendlich werde. Hier kann man, wie in Nr. 2, setzen:

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta)} = \sum_1^r \sum_1^{\nu_l} c_{l,i}\, P_{\xi\eta}^{(i)}(x_l).$$

Zur Bestimmung der Coefficienten $c_{l,i}$ bei gegebener Function $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ dient das § 8, Nr. 4 angegebene Verhalten. Es werde diese Function von ξ in der Nähe von $\xi = x_l$ unendlich wie:

$$\sum_1^{\nu_l} \varkappa_{l,i} \frac{(cy\xi)^i}{(cx_l\xi)^i},$$

so wird

$$c_{l,i} = \frac{\varkappa_{l,i}}{(i-1)!\, f_c(x_l) \cdot (cyx_l)^{i-2}}.$$

Sind nur die Punkte $x_1, \ldots, x_r$ und die Ordnungen $\nu_1, \ldots, \nu_r$ gegeben, so sind die $c_{l,i}$ nicht willkürlich; vielmehr ergeben sich wieder p, im Allgemeinen nicht unabhängige, Bedingungsgleichungen, die man mittels $\xi = a_\varkappa$, wobei die rechte Seite der Gleichung nicht unendlich werden soll, erhält (§ 8, Nr. 4). Dieselben schreiben sich hier:

$$\sum_1^r \sum_1^{\nu_l} c_{l,i}\, \Phi_\varkappa^{(i)}(x_l) = 0, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Wendet man auf obige Gleichung den D_ξ-Process an, so wird:

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_l \sum_i c_{l,i}\, D_\xi P_{\xi\eta}^{(i)}(x_l)$$
$$= \sum_l \sum_i c_{l,i}\, B_{x_l}^{(i)}(\xi) \quad (\S\ 10,\ \text{Nr. } 1),$$

als *Entwicklung des D_ξ der allgemeinsten algebraischen Function von ξ nach auf die Unstetigkeitspunkte bezüglichen kanonischen Formen 2^{ter} Gattung von ξ.*

§ 12.

Die Sätze der §§ 9—11 bei Einführung von corresidualen Gruppen von je $p+1$ Punkten.

1. Drei zu einander corresiduale Gruppen von je $p+1$ Punkten seien

$$(1)\qquad \begin{cases} (x;\ x_1, x_2, \ldots, x_p), \\ (\xi;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p), \\ (\eta;\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p). \end{cases}$$

Dabei soll x nicht fest, d. h. $x_1, x_2, \ldots, x_p$ nicht durch eine Curve φ verknüpft sein; ebenso seien ξ, η beweglich gedacht. Die Gruppen gehören einer ∞^1-Schaar an. Man hat dann zunächst

$$P_{s\eta}(\xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p) = c \cdot \frac{P_{s\eta}(x;\ x_1, \ldots, x_p)}{P_{s\xi}(x;\ x_1, \ldots, x_p)},$$

wo c von s unabhängig ist. Denn die linke Seite stellt eine algebraische Function von s vor, welche in der zweiten der obigen 3 Gruppen zu ∞^1, in der dritten zu 0^1, in der ersten also zu einer Constanten wird; die rechte Seite ist eine algebraische Function von s, welche in der ersten Gruppe ebenfalls den constanten Werth c annimmt, in der zweiten Gruppe also zu ∞^1, in der dritten Gruppe zu 0^1 wird, also mit der linken Seite identisch.

Man hat aus $s = x$:

$$c = P_{x\eta}(\xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p);$$

aber auch, aus $s = \xi + d\xi$, wobei die linke Seite zu

$$\frac{f_\alpha(\xi)}{(\alpha\, \xi\, s)} = \frac{1}{d\omega_\xi},$$

die rechte Seite zu

$$\frac{c \cdot P_{\xi\eta}(x;\ x_1, \ldots, x_p)}{D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ x_1, \ldots, x_p)\, d\omega_\xi}$$

wird:

$$c = \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x;\ x_1, \ldots, x_p)}{P_{\xi\eta}(x;\ x_1, \ldots, x_p)} = D_\xi \lg P_{\xi\eta}(x;\ x_1, \ldots, x_p).$$

Somit:

Sobald die beiden Gruppen

$$(1')\qquad \begin{matrix} (x;\ x_1, \ldots, x_p) \\ (\xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p) \end{matrix}$$

einander corresidual sind, hat man, bei beliebigen s, η, ζ die Relationen:

$$(2)\quad P_{s\eta}(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p) = D_\xi \lg P_{\xi\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p)\frac{P_{s\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p)}{P_{s\xi}(x;\,x_1,\ldots,x_p)} =$$
$$= -D_\xi \lg(\mu-\lambda),$$

wo

$$\mu = \frac{P_{s\zeta}(x;\,x_1,\ldots,x_p)}{P_{s\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p)},\qquad \lambda = \frac{P_{\xi\zeta}(x;\,x_1,\ldots,x_p)}{P_{\xi\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p)};$$

$$(3)\quad P_{s\eta}(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p)\cdot P_{\xi\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p) = D_\xi P_{\xi\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p),$$

also auch, durch Vertauschung der x mit den ξ:

$$(4)\qquad D_\xi P_{\xi\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p) = D_x P_{xy}(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p).$$

(4) stellt das Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument in neuer und bemerkenswerth einfacher Gestalt dar. Dabei ist aber zu beachten, dass, wenn etwa $x, x_1, \ldots, x_p, \xi$ als unabhängige Grössen genommen werden, die Differentialableitung D_x nur nach dem explicit in $P_{xy}(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p)$ stehenden x zu nehmen ist, nicht auch nach dem implicit in $\xi_1,\ldots,\xi_p$ enthaltenen x.

2. Gleichung (4) soll nun auf den in § 9, Nr. 4 definirten Ausdruck $B_\xi(x)$ angewandt werden, nachdem zuerst die $x_1,\ldots,x_p$, bez. die $\xi_1,\ldots,\xi_p$, aus (1′) an Stelle der dortigen $a_1,\ldots,a_p$ gesetzt worden, von denen $B_\xi(x)$ unabhängig ist. Man hat:

$$(5)\quad B_\xi(x) = D_\xi P_{\xi\eta}(x;\,x_1,\ldots,x_p) + \sum_1^p{}^i \Phi_i(x;\,x_1,\ldots,x_p)\,B_\xi(x_i),$$

$$(5')\quad B_x(\xi) = D_x P_{xy}(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p) + \sum_1^p{}^i \Phi_i(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p)\,B_x(\xi_i);$$

also wegen (4) und $B_\xi(x) = B_x(\xi)$:

Für zwei corresiduale Gruppen (1′) *ist auch:*

$$(6)\quad \sum_1^p{}^i \Phi_i(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p)\,B_x(\xi_i) = \sum_1^p{}^i \Phi_i(x;\,x_1,\ldots,x_p)\,B_\xi(x_i),$$

wo

$$\Phi_i(x;\,x_1,\ldots,x_p) = \sum_1^p{}^\varkappa \frac{\partial \lg \sum \pm \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_p(x_p)}{\partial\,\varphi_\varkappa(x_i)}\cdot\varphi_\varkappa(x),$$

also

$$\Phi_i(x_i;\,x_1,\ldots,x_p) = 1,\qquad \Phi_i(x_\varkappa;\,x_1,\ldots,x_p) = 0,\quad \left(\varkappa \gtrless i\right).$$

Statt (6) kann man auch schreiben:

$$(6')\quad \sum_1^p{}^i \Phi_i(x;\,x_1,\ldots,x_p)\,D_\xi P_{\xi\eta}(x_i;\,a_1,\ldots,a_p) - D_\xi P_{\xi\eta}(x;\,a_1,\ldots,a_p) =$$
$$= \sum_1^p{}^i \Phi_i(\xi;\,\xi_1,\ldots,\xi_p)\,D_x P_{xy}(\xi_i;\,b_1,\ldots,b_p) - D_x P_{xy}(\xi;\,b_1,\ldots,b_p),$$

bei willkürlichen a und b; was nur wieder Glch. (4) vermöge § 7, Nr. 2, d) ist.

Nimmt man ferner in Glch. (2) die Ableitung nach s, so ergiebt sich, da

$$D_s \frac{P_{s\eta}}{P_{s\xi}} = -\frac{P_{\xi\eta} D_s P_{s\xi}}{P_{s\xi}^2},$$

für zwei corresiduale Gruppen (1') *auch die Beziehung:*

$$(7)\quad D_s P_{s\eta}(\xi;\, \xi_1, \ldots, \xi_p) = -\frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x;\, x_1, \ldots, x_p) \cdot D_s P_{s\eta}(x;\, x_1, \ldots, x_p)}{P_{s\xi}^2(x;\, x_1, \ldots, x_p)}$$
$$= -D_s D_\xi \lg(\mu - \lambda)$$

und somit auch, nach der Definition von $B_s(\xi)$:

$$(8)\quad \sum_1^p{}_i \Phi_i(\xi;\, \xi_1, \ldots, \xi_p)\, B_s(\xi_i) - B_s(\xi) =$$
$$= \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x;\, x_1, \ldots, x_p) \cdot D_s P_{s\eta}(x;\, x_1, \ldots, x_p)}{P_{s\xi}^2(x;\, x_1, \ldots, x_p)},$$

oder auch

$$(8')\quad \sum_1^p{}_i \Phi_i(\xi;\, \xi_1, \ldots, \xi_p)\, D_s P_{s\eta}(\xi_i;\, b_1, \ldots, b_p) - D_s P_{s\eta}(\xi;\, b_1, \ldots, b_p) =$$
$$= \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x;\, x_1, \ldots, x_p) \cdot D_s P_{s\eta}(x;\, x_1, \ldots, x_p)}{P_{s\xi}^2(x;\, x_1, \ldots, x_p)} =$$
$$= -D_\xi P_{\xi\eta}(s;\, s_1, \ldots, s_p),$$

wenn $(s;\, s_1, \ldots, s_p)$ corresidual zu $(\xi;\, \xi_1, \ldots, \xi_p)$.

Dies ist eine Entwicklung einer Normalform 2ter Gattung von s, oder des D_ξ einer algebraischen Function von ξ, die in $p+1$ Punkten s, $s_1, \ldots, s_p$ zu ∞^1 wird, von ganz anderem Charakter, als die durch (5) für $x = s$ dargestellte, welche ein specieller Fall der Entwicklungen von § 10 und § 11, Nr. 2 war.

(Fortsetzung folgt.)

Erlangen, Juni 1890.

Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. Study.

Par

H. G. Zeuthen à Copenhague.

(Extrait d'une lettre à M. Klein).

Vous m'avez rappelé un devoir envers la mémoire de mon ami bien regretté, Halphen: je dois publier les remarques que je vous ai communiquées sur le mémoire de M. Study: „Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, inbesondere deren Charakteristikenproblem" (Math. Annalen Bd. XXVII).

Les géomètres croyaient définitivement résolue par les celèbres recherches d' Halphen la question sur la forme $\alpha\mu + \beta\nu$, présumée par Chasles, du nombre des coniques satisfaisant à la fois à quatre conditions caractérisées par les nombres μ et ν, et à une cinquième condition caractérisée par α et β. Alors M. Study est venu, en 1886, soutenir, dans le mémoire que je viens de citer, la thèse que la réponse négative donnée par Halphen à cette question n'avait égard qu'à la manière dont il l'avait formulée. M. Study en a donné ensuite une nouvelle formulation, qu'il croyait plus conforme aux pensées de ceux qui s'en étaient occupés antérieurement, et qui l'a conduit à une réponse affirmative.

Peu de temps après l'apparition du mémoire de M. Study j'ai demandé à Halphen, s'il ne pensait pas élucider les malentendus de ce travail. Sachant à présent, combien ses dernières années étaient occupées par les nouveaux travaux dont il ne lui a été donné de finir qu'une partie, on comprend bien qu' Halphen n'était guère tenté de revenir à une question dont il avait déjà dit tout ce qu'il fallait dire.

Cependant, les travaux antérieurs d'Halphen, qu'on a négligé, sans doute, de consulter de nouveau, n'ont pas empêché les malentendus de M. Study de se répandre. Ces malentendus viennent même d'être soutenus par M. Schubert dans une analyse insérée au 18^{me} tome du „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik". Il est donc temps d'essayer d'y mettre fin.

M. Study dit, 1^0 qu'en s'occupant du nombre de solutions du problème de déterminer les coniques communes à un système simple et un système quadruple les auteurs plus anciens n'avaient pas des critères bien définis des solutions propres, qu'il fallait garder, et des solutions impropres, qu'il fallait rejeter, mais qu'ils se faisaient guider seulement par un tact juste; 2^0 que Clebsch a donné la première définition nette des solutions impropres; 3^0 que la découverte d'Halphen d'exceptions de la règle $\alpha\mu + \beta\nu$ se réfère seulement à la définition

de Clebsch; mais que 4° celle-ci avait introduit une modification de la question à laquelle on avait cru que la formule $\alpha\mu + \beta\nu$ donne une réponse exacte.

Je dis qu'au contraire la question originaire n'a subi aucune modification du tout par la manière dont elle a été précisée par Halphen.

A l'appui de cette déclaration je pourrais renvoyer au fait que la réponse d'Halphen a été acceptée par tous les géomètres qui s'étaient occupés de la théorie des caractéristiques, y compris M. Schubert*), et il n'est pas permis de nous traiter *sans preuve* d'assez naifs pour acquiescer à la réponse d'une question différente de celle qui avait été proposée. Certainement, nous étions des naifs — les prédécesseurs d'une simple observation qui vient enlever toute obscurité à une question difficile sont toujours naifs — en n'observant pas qu'une conique infiniment applatie à sommets coïncidents dans un système donné depend, non seulement des trois constantes qui déterminent la droite double et le sommet, mais aussi d'une quatrième constante finie: le rapport de puissances convenablement choisies des deux axes de cette conique singulière (ou une constante qui a une détermination projective semblable); mais on peut conclure de l'hésitation**) dont on avait reçu les différentes démonstrations de la loi $\alpha\mu + \beta\nu$, et qui avait porté toujours à de nouveaux essais de la démontrer, qu'on voulait bien s'assurer que le nombre trouvé était bien celui qu'on avait demandé.

Je ne me bornerai pas toutefois à ce renvoi aux personnes qui, en défaut d'un énoncé précis de la question, sont les meilleurs témoins du véritable sens qu'on lui avait attribué; mais précisément le défaut d'une définition des solutions impropres dont parle M. Study me servira à montrer qu'en tout cas l'énoncé qu'il veut donner, lui même, à cette question en est une véritable modification.

Demandons nous, en effet, qu'est-ce qu'une solution impropre? C'est une solution qui ne répond pas à la question proposée originairement, mais qui est introduite par les instruments, analytiques ou géométriques, dont on s'est servi pour la résoudre. Elle est introduite parce qu'elle satisfait aux conditions exprimées par la formulation de la question nécessaire pour l'adapter à l'usage de l'instrument qu'on veut employer.

*) Bulletin de la société mathématique de France t. VIII (1880) p. 61.

**) Je me permets de renvoyer aux expressions réservées dont j'ai mentionné la démonstration de M. Lindemann dans une analyse de son édition des „Vorlesungen über Geometrie" de Clebsch (Bulletin des Sciences Mathématiques, t. X, p. 122). Je rappellerai aussi qu'on n'a pas osé prendre pour démonstration la „ebenso einfache als ungesuchte Deutung des Chasles'schen Satzes" dont parle M. Study à la p. 66, et qui doit s'être présentée à tous ceux qui s'occupaient de la théorie des caractéristiques. Dans les essais de démonstration elle est du moins voilée.

Par exemple, en cherchant au moyen de coordonnées ponctuelles, ou de méthodes de forme géométrique équivalentes à l'usage de ces coordonnées, les coniques tangentes à une courbe, on substitue à la demande d'une conique tangente celle d'une conique rencontrant la courbe donnée en deux points coïncidents. On indroduit ainsi, à côté des solutions propres, les coniques infiniment applaties, qui ne sont des solutions propres que dans les cas où la droite double est tangente à la courbe ou un des sommets de la conique singulière se trouve sur la courbe.

La théorie des caractéristiques de Chasles se distingue de la théorie de M. de Jonquières, qui s'était occupé antérieurement de la détermination de courbes par des conditions données, par l'exclusion de ces solutions. En demandant ensuite nettement les nombres de coniques satisfaisant à des conditions données sans aucune spécification des instruments par lesquelles on voulait les trouver, on devait exclure aussi les solutions impropres qu'on pourrait introduire par l'application d'autres instruments analytiques ou géométriques, ou par une formulation particulière de la question. Pour déterminer la forme générale de l'expression du nombre des coniques communes à un système simple et un système quadruple, il s'agissait donc d'éviter toutes ces solutions impropres, et de s'assurer bien qu'on les avait évitées. Voilà la partie des recherches d'Halphen qui a demandé la plus grande précaution; mais une fois qu'il avait observé, que certaines solutions particulières sont impropres, il est dévenu très-facile de l'établir d'une manière qui ne peut laisser aucune doute. En effet *une solution sera impropre si l'on peut l'éviter par une autre formulation de la question;* car alors elle sera due à la formulation qui y a conduit.*)

Pour soumettre la formulation que M. Study a donnée à la question qui nous occupe à cette épreuve, il suffit de rappeler que sa détermination des coniques permet bien de distinguer les deux sommets d'une conique infiniment applatie, et de distinguer les deux droites composant une conique à point double, mais que pour elle — de même que pour la plupart des déterminations au moyen desquelles on avait essayé autrefois de démontrer l'hypothèse de Chasles — une conique infiniment applatie à sommets coïncidents n'est qu'un cas particulier de l'une et l'autre de ces coniques singulières. Ses procédés ne lui permettent donc de la faire dépendre que de trois constantes. L'auteur voit bien, si je ne me trompe pas, que c'est cette circonstance qui le conduit, dans certains cas, à des résultats différents de ceux d'Halphen. Sa

*) Les nombres trouvés dans la géométrie énumérative étant des degrés d'équations, il est toujours sousentendu qu'on ne fasse pas usage de formulations qui portent à rejeter une partie des racines d'une équation irréductible dont on garde les autres.

formulation le porte à regarder comme solution propre*) toute conique infiniment applatie qui se reduit dans le système simple et le système quadruple à la même droite double aux mêmes sommets, aussi dans les cas où ces deux sommets coïncident entre eux. Dans ce dernier cas la conique singulière devient pour Halphen une solution impropre, à moins que sa quatrième constante, dont j'ai déjà parlé, n'ait la même valeur dans les deux systèmes.**) On voit immédiatement qu'elle est bien une solution impropre, en prenant pour l'inconnue de la question la quantité $x = \frac{a^m}{b^n}$, a et b étant les axes de la conique cherchée, et m et n étant des nombres positifs choisis de manière que dans le système simple $\frac{a^m}{b^n}$ ait pour la conique singulière en question une valeur limite finie.

C'est donc, selon moi, Halphen qui a répondu à la question qui avait occupé les géomètres depuis 1864, et, en tout cas M. Study n'a répondu qu'à une modification de cette question; mais la solution d'Halphen a un avantage encore plus essentiel: elle est une solution complète qui *comprend en elle la réponse à toutes les questions particulières qu'on obtient par des formulations particulières de la question.* Elle donne donc aussi la réponse à la question que se propose M. Study. En effet, la réduction du nombre $\alpha\mu + \beta\nu$ qu' Halphen a trouvé avoir lieu en certains cas étant due exclusivement aux coniques infiniment applaties à sommets coïncidents, il devient clair qu'on trouvera toujours une expression de la forme indiquée, si l'on se contente de regarder ces coniques singulières comme des cas particuliers soit des coniques qui se réduisent à des droites doubles, soit des coniques à point double.

La présente critique paraissant, à cause des circonstances dont j'ai déjà rendu compte, après un intervalle assez long pour faire croire à M. Study que les géomètres accepteraient ses vues, je dois ajouter qu'elle n'a égard qu'à la question qu'il se propose et aux rapports avec des recherches antérieures qu'il lui attribue, et non pas à l'analyse dont il se sert ensuite pour résoudre cette question.

Copenhague, le 30 juin 1890.

*) L'auteur dit „wirkliche Lösung", sachant bien qu'elle appartient aux solutions regardées comme „impropres" par Halphen; mais je ne reconnais pas la différence *logique* entre les „scheinbare Lösungen" introduits par l'analyse de M. de Jonquières et les solutions impropres introduites par celle de M. Study.

**) Halphen évite ce dernier cas par la supposition — rigoureusement définie suivant son usage — que les systèmes soient indépendants entre eux.

Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen. II.

Von

M. Noether in Erlangen.

(S. den I. Theil in diesem Bande, p. 417).

Zweiter Theil.

Die Abel'schen Functionen.

Das Ziel, welches ich hier verfolge, ist: denjenigen Theil des Jacobi'schen Umkehrproblems, welcher sich *aus den Differentialformeln selbst*, d. h. *ohne und vor Einführung der Periodicitätseigenschaften*, entwickeln lässt, einmal auszuscheiden und für sich durchzuführen. Ich zeige im Folgenden, dass man so nicht nur das ganze System von Relationen aufstellen kann, auf welchen die Umkehrung beruht, wie Abel'sches Theorem etc., sondern auch bis zu derjenigen Abel'schen Function

$$Al(V_1, V_2, \ldots, V_p)$$

und ihrer für alle endlichen Argumente gültigen Potenzentwicklung vordringen kann, auf welche (wenigstens im hyperelliptischen Falle) zuerst Herr Weierstrass die Umkehrung zurückgeführt hat, während deren Entwicklung nach periodischen Gliedern — als Function Θ — natürlich dem weiteren Gebiete angehört.

Die Aufnahme der Untersuchungen über das Abel'sche Theorem (§ 14) und über die Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems (§ 15) war in diesem Sinne wegen der Modificationen nöthig, die sich daraus ergeben, dass ich das Abel'sche Theorem dabei nur in seinen Differentialgleichungen benutzen kann, also nicht bei allen solchen beliebigen Wegen, welche die Summe der Integrale erster Gattung zu Null machen. Denn von dem Satze, welcher den bezügl. Weierstrass'schen und Riemann'schen Betrachtungen zu Grunde liegt — dass, auf diesen selben Wegen genommen, die Summe der Integrale dritter Gattung eine algebraische Function der beiden Parameter des Integrals ist —, muss ich dort vollständig absehen, weil er bei denselben auf

dem Nachweis beruht, dass eine eindeutige Function des Punktes x von $f = 0$, deren Periodicitätsmoduln verschwinden, eine zu $f = 0$ gehörige algebraische Function von x ist; dieser Satz lässt sich sogar auch aus § 15 nicht folgern, sondern könnte hier nur erst aus der Darstellung der algebraischen Functionen durch die $T_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ und dieser durch die Functionen $Al(V)$ (§§ 16—19) abgeleitet werden.

In Bezug auf den Weg zur Aufstellung der Function $Al(V)$ schlage ich im Wesentlichen dasjenige Verfahren ein, welches Herr Weierstrass in seiner Note in Cr. J. Bd. 47 „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" (1853) für hyperelliptische Functionen skizzirt und für den allgemeinen Fall in seinen Vorlesungen ausgeführt hat: die Auffassung der Summe von Integralen 3ter Gattung als Function der Integralsummen erster Gattung. Dies bezieht sich sowohl auf deren Zerlegung in zwei nur von je p Argumenten abhängige Functionen (§ 16), als auch auf die Monodromieuntersuchung der so hergestellten Function $Al(V)$ (§ 19)*). Dass diese Ableitung in § 16 bedeutend einfacher ist, als die Zerlegung von $T_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ bei Clebsch-Gordan, welche diesen Ausdruck zuerst auf Functionen von je $p+1$ Punkten von $f = 0$ (s. die Andeutung bei Riemann, Abel'sche Functionen, Nr. 25, Formel für $d \log \vartheta^{(1)}$) zurückführen, zeigt sich schon daraus, dass die letztere Zerlegung aus der ersteren sich unmittelbar ergiebt (§ 18), während der umgekehrte Uebergang zur Weierstrass'schen Definition viel umständlicher würde. Die beiden Definitionen von $\log Al(V)$ stehen so zu einander, wie die beiden Jacobi'schen Definitionen der elliptischen Θ-Function, deren Erweiterungen sie in der That sind: derjenigen (Fundamenta, Nr. 52, Formel (6)) für den logarithmischen Differentialquotienten der Θ-Function nach ihrem Argument durch ein Integral 2ter Gattung (Weierstrass), und derjenigen (ibid. Formel (7)) der Θ-Function selbst mittels eines Integrals 3ter Gattung, dessen Argument dem Parameter gleich ist (Clebsch-Gordan).

Zum engern Anschluss an das Clebsch-Gordan'sche Buch habe ich in § 17 noch deren Constantenbestimmung durch besondere untere Grenzpunkte aufgenommen. Die genaue Untersuchung der Ordnung des Verschwindens der Al-Function für den Fall, dass die zugehörigen Punkte $x_1, \ldots, x_p$ durch Curven φ verknüpft sind, wird hier nicht nöthig; ich gedenke aber auf eine Modification des von Riemann hierzu eingeschlagenen Weges (Cr. J., Bd. 65) an einer anderen Stelle einzugehen.

*) Für Beides s. auch Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionenlehre: Einige auf die Th. der analyt. Funct. mehrerer Veränderl. sich beziehende Sätze, §§ 4, 5.

Inhalt des II. Theils.

§ 13. Integralformeln.
§ 14. Die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems.
§ 15. Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems.
§ 16. Die Transcendente $\overset{\backsim}{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ und die Function $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.
§ 17. Die Function $\Omega(V_1, V_2, \ldots, V_p)$.
§ 18. Die Function $\Omega(V)$ als Function der $p+1$ Punkte $\xi, x_1, x_2, \ldots, x_p$.
§ 19. Nullpunkte und Monodromie der Function $Al(V) = e^{-\Omega(V)}$.

---

§ 13.

Integralformeln.

1. Als *Normalintegrale* erster Gattung werden genommen (§ 2, Nr. 4):

$$\int_y^x \Phi_\varkappa(x)\, d\omega_x \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p);$$

zweiter Gattung erster, bez. ν^{ter} Ordnung mit dem Parameter ξ (§ 7):

$$\int_y^x D_\xi P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \int_y^x A_\xi(x)\, d\omega_x, \quad \text{bez.} \quad \int_y^x A_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x;$$

dritter Gattung mit den Parametern ξ, η (§ 6):

$$\int_y^x P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x.$$

Als *kanonische* Integrale zweiter Gattung mit dem Parameter ξ (§ 9, Nr. 4 u. 5):

$$\int_y^x B_\xi(x)\, d\omega_x = \mathsf{X}_{xy}(\xi), \quad \text{bez.} \quad \int_y^x B_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x;$$

dritter Gattung mit Parametern ξ, η:

$$\int_y^x \int_\eta^\xi B_\xi(x)\, d\omega_x\, d\omega_\xi = \int_\eta^\xi \mathsf{X}_{xy}(\xi)\, d\omega_\xi = \int_y^x \mathsf{X}_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x.$$

Diesen Ausdruck möchte ich als „doppeltes Integral", nicht als „Doppelintegral", bezeichnen, da der ξ-Weg vom x-Weg hier unabhängig bleiben soll, was dem gewöhnlichen Begriff des Doppelintegrales, das keine Function der beiden oberen Grenzen ist, widerspricht.

Die Art des Unendlichwerdens dieser Integrale ist in § 6, Nr. 4 und § 7, Nr. 5 gegeben. Danach wird das Normal- und das kanonische Integral zweiter Gattung ν^{ter} Ordnung in $x = \xi$ zu ∞^ν wie

$$(\nu-1)!\, f_0(\xi)\,(c\eta\xi)^{\nu-2}\cdot\frac{(c\eta x)^\nu}{(c\xi x)^\nu},$$

das Normal- und das kanonische Integral dritter Gattung

$$\text{in } x=\xi\colon\ -\log(c\xi x);\quad \text{in } x=\eta\colon\ \log(c\eta x).$$

Die beiden Wege von y nach x und von η nach ξ sind willkürlich; nur wird man jenen diesen nicht schneiden lassen.

2. *Das kanonische Integral dritter Gattung lässt Vertauschung der beiden Grenzpunkte mit den beiden Parameterpunkten, unter Festhaltung der Wege, zu.*

Die Normal- und die kanonischen Integrale 2ter Gattung hängen vom Parameter ξ algebraisch ab, und zwar sind sie algebraische Formen von ξ.

Ersteres folgt aus $B_\xi(x)=B_x(\xi)$. Das Letztere aus derselben Gleichung (oder den entsprechenden aus § 9, Nr. 5), durch Integration nach x:

$$(1)\quad \int_y^x A_\xi(x)\,d\omega_x=\int_y^x D_\xi P_{\xi\eta}(x;a_1,a_2,\ldots,a_p)\,d\omega_x=P_{xy}(\xi;a_1,\ldots,a_p)$$
$$+\sum_1^p\Big\{\Phi_x(\xi)\int_y^x E_x(x)\,d\omega_x-E_x(\xi)\int_y^x\Phi_x(x)\,d\omega_x\Big\},$$

$$(2)\quad \int_y^x B_\xi(x)\,d\omega_x=\int_y^x A_\xi(x)\,d\omega_x+\sum_x B_{a_x}(\xi)\int_y^x\Phi_x(x)\,d\omega_x$$
$$=P_{xy}(\xi;a_1,\ldots,a_p)+\sum_x\Phi_x(\xi)\int_y^x B_{a_x}(x)\,d\omega_x.$$

3. § 10 liefert durch Multiplication mit $d\omega_x$ und Integration nach x die Reduction aller algebraischen Integrale auf die Normalformen; so (2) voriger Nummer die Zurückführung eines beliebigen Integrals 2ter Gattung mit Parameter ξ auf eine in diesem Punkte und in p weiteren Punkten unendlich werdende algebraische Function von x und auf p Integrale 2ter Gattung erster Ordnung, welche je einen dieser Punkte zum Parameter haben. Der Integrationsweg ist dabei beliebig.

§ 11, Nr. 1 liefert analog die Darstellung des Logarithmus einer beliebigen algebraischen Function von ξ durch eine Summe von Integralen 3ter Gattung mit der Grenze ξ, deren Parameterpunkte die Unendlichkeits- und Nullpunkte der Function sind, sowie durch eine Summe von Integralen erster Gattung nach ξ. Hierbei hängt der Werth des Logarithmus von dem Integrationsweg von η nach ξ ab.

§ 11, Nr. 2 und 3 liefern, indem man den Werth von $P_{\xi\eta}(x_i)$, bez. $P^{(\eta)}_{\xi\eta}(x_i)$ aus Formel (2) dieses Paragraphen einsetzt, unter Berücksichtigung der für die c_i, $c_{i,i}$ bestehenden Bedingungen:

$$(3) \qquad \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta)} = \sum_i \sum_i c_{i,i} \int_\eta^\xi B^{(\eta)}_{x_i}(\xi)\, d\omega_\xi,$$

also die Darstellung der allgemeinsten algebraischen Function von ξ durch eine Summe von kanonischen Integralen zweiter Gattung, deren Parameter die Unendlichkeitspunkte der Function sind. Der Integrationsweg von η nach ξ ist hierbei wieder beliebig.

Auf die Darstellung von $\log \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ und auf die Integralformeln von § 12 komme ich in § 14, Nr. 6 und 7 zurück.

§ 14.

Die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems.

1. Nach § 11, Nr. 2 stellt sich die Differentialableitung D_ξ irgend einer algebraischen Function von ξ,

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)},$$

die in den Punkten $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_r$ je zu ∞^1 werden soll, durch die kanonischen oder Normal-Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung mit den Argumenten x_i und mit demselben Parameter ξ so dar:

$$(1) \qquad D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_1^r{}^i c_i B_\xi(x_i) = \sum_1^c{}^i c_i D_\xi P_{\xi\eta}(x_i),$$

wo die

$$(2) \qquad c_i = \chi(x_i) \left[\frac{d\omega_\xi}{d\psi(\xi)}\right]_{\xi = x_i}$$

die p Gleichungen erfüllen:

$$(3) \qquad \sum_1^r{}^i c_i \varphi_\varkappa(x_i) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Lässt man ferner die c_i diesen p Gleichungen (3) genügen, *im Uebrigen aber völlig willkürlich*, so bedeutet die rechte Seite von (1) immer das D_ξ einer algebraischen Function von ξ, die höchstens in $x_1, \ldots, x_r$ zu je ∞^1 wird.

Sei jetzt allgemeiner λ der Werth, den eine algebraische Function $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ in $\xi = x_1, \ldots, x_r$ annehme; so werden die Relationen (1)—(3), angewendet auf die Function $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi)}$, welche daselbst zu ∞^1 werde:

$$(1') \qquad D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi)} = \sum_1^r{}_i c_i' B_\xi(x_i) = \sum_1^r{}_i c_i' D_\xi P_{\xi\eta}(x_i),$$

$$(2') \qquad c_i' = \chi(x_i)\left[\frac{d\omega_\xi}{d\psi(\xi) - \lambda d\chi(\xi)}\right]_{\xi=x_i},$$

$$(3') \qquad \sum_i c_i' \varphi_\varkappa(x_i) = 0.$$

Aendert man λ um $d\lambda$, so erhält man eine $(x_1, \ldots, x_r)$ benachbarte Punktgruppe $(x_1 + dx_1, \ldots, x_r + dx_r)$ auf f, in welcher $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ den Werth $\lambda + d\lambda$ annimmt; dafür wird

$$\psi(x_i) - \lambda\ \chi(x_i) = 0,$$
$$d\psi(x_i) - \lambda d\chi(x_i) = \chi(x_i)\, d\lambda.$$

Man darf also in (2') bei gegebener Function $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ setzen:

$$(4) \qquad c_i' = \frac{d\omega_{x_i}}{d\lambda},$$

d. h.

Bedeuten die $d\omega_{x_i}$ diejenigen zusammenhängenden Werthe der Differentialform $d\omega_x$, welche an den r Stellen x_i, wo eine algebraische Function $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ irgend einen gegebenen Werth λ annimmt, durch Aenderung von λ um $d\lambda$ entstehen, so bestehen die p Gleichungen für die $d\omega_{x_i}$:

$$(5) \qquad \sum_1^r{}_i \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p),$$

und man hat

$$(6) \qquad D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi)} = \sum_1^r{}_i B_\xi(x_i) \frac{d\omega_{x_i}}{d\lambda} = \sum_1^r{}_i D_\xi P_{\xi\eta}(x_i) \frac{d\omega_{x_i}}{d\lambda}.$$

2. Aber dieser Satz lässt sich auch umkehren. Nahm man nämlich alle algebraischen Functionen von ξ, welche in $x_1, \ldots x_r$ zu λ (je in 1ter Ordnung) werden, so erhielt man alle möglichen Werthsysteme der $c_1', \ldots, c_r'$, welche die p Gleichungen (3') befriedigen können. Dabei kann man auch $d\lambda$ noch einen willkürlichen festen, unendlich kleinen Werth geben. Daher werden auch die aus algebraischen Functionen berechneten $d\omega_{x_i} = c_i' d\lambda$ keinen weiteren Bedingungen unterliegen, als den Gleichungen (5), und man kann somit den Satz aussprechen:

Sind r Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_r$ von f gegeben und bedeutet $d\omega_{x_1}, \ldots, d\omega_{x_r}$ irgend ein Werthsystem der Differentialform $d\omega_x = \frac{(cx\,dx)}{f_0(x)}$ in diesen

r Punkten, für welches die p Gleichungen (5) *bestehen, so existirt eine algebraische Function* $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ *von* ξ, *welche höchstens in jenen Punkten* $x_1 \ldots x_r$ *einen beliebig gegebenen Werth* λ (*je in* 1ter *Ordnung*), *in den Punkten* $x_1 + dx_1, \ldots, x_r + dx_r$ *den dem* λ *benachbarten, sonst beliebig gegebenen Werth* $\lambda + d\lambda$ *annimmt. Diese Function ist durch* (6) *gegeben, d. h. durch*

$$(7) \qquad \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta) - \lambda\chi(\eta)} = \sum_1^r{}_l P_{\xi\eta}(x_l) \frac{d\omega_{x_l}}{d\lambda}$$

$$= \int_\eta^\xi d\omega_\xi \left[\sum_1^r{}_l B_\xi(x_l) \frac{d\omega_{x_l}}{d\lambda} \right],$$

wo der Weg von η nach ξ beliebig ist, wenn er nur die Punkte x_l nicht enthält.

Mit anderen Worten:

Die Gleichungen (5) *stellen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dar, dass die Punktgruppe*

$$x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2, \ldots, x_r + dx_r$$

der Punktgruppe

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_r$$

corresidual sei.

3. Durch den Satz von Nr. 2 ist die *vollständige Integration des Systems von p Differentialgleichungen*

$$(5) \qquad \sum_1^r{}_l \varphi_\varkappa(x_l)\, d\omega_{x_l} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

geleistet. In diesem Sinne lässt sich derselbe so fassen:

Die allgemeinste Lösung des Systems (5) *ist gegeben durch diejenigen Punktgruppen*

$$x_1, x_2, \ldots, x_r,$$

welche irgend einer gegebenen Punktgruppe

$$y_1, y_2, \ldots, y_r$$

corresidual sind.

Als Integrationsconstanten sind dabei, wenn die willkürlich gegebene Gruppe $(y_1, \ldots, y_r)$ einer ∞^ϱ-Schaar angehört, in der $y_1, y_2, \ldots, y_\varrho$ beweglich sind, die Werthe von $y_{\varrho+1}, y_{\varrho+2}, \ldots, y_r$ anzusehen. Es ist $\varrho = r - p + \sigma$, wenn σ die Bedeutung von Nr. 2, § 11 hat, dass σ linear unabhängige Curven φ durch die Gruppe $(y_1 \ldots y_r)$, also auch durch $(x_1, \ldots, x_r)$, gehen.

Man kann natürlich für diese Lösung nach (5) auch schreiben:

$$(8) \qquad \sum_{1}^{r} \int_{y_l}^{x_l} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p);$$

aber in diesen Integralausdrücken sind die Integrationswege von den y_l nach den x_l durch (5) bestimmt, d. h. derart, dass die Integralsummen von (8) bei gegebenen y_l und variablen x_l *fortwährend* gleich 0 bleiben sollen. Hierbei bleiben nur die Wege von ϱ der Variablen, etwa die von $y_1, y_2, \ldots, y_\varrho$ ausgehenden, willkürlich; die übrigen $r-\varrho$ Wege sind durch diese (endlich vieldeutig) bestimmt: die Summen (8) sind über „corresiduale Wegsysteme" genommen, wie ich sagen will.

Der Satz dieser Nummer spricht das *Abel'sche Differentialtheorem für die Formen erster Gattung aus.*

Es wird kaum nöthig sein, hier darauf hinzuweisen, dass dieser Satz verschieden ist von der Umkehr des Abel'schen Theorems für *Integrale erster Gattung*; da die letztere aussagt, dass ein Gleichungssystem der Art (8), wo jedoch die Wege von den y_l nach den x_l nichtcorresiduale sind, d. h. *nicht* der Bedingung unterworfen werden, bei festen y_l und variablen x_l die Integralsummen fortwährend zu 0 zu machen — wo also Gleichungen (5) nicht existiren —, doch nur auf eine Gruppe $(x_1, \ldots, x_r)$ führt, die zur Gruppe $(y_1, \ldots, y_r)$ corresidual ist. Dieses letztere Theorem ist hier als specieller Fall des sog. Umkehrproblems zu behandeln (s. § 15, Nr. 4); in den Anwendungen jedoch wird nur das Differentialtheorem benutzt werden.

Zu dem Vorigen ist noch zu bemerken, dass die Anwendung der Gleichung (1), Nr. 1 verlangte, dass die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_r$ endlich von einander verschieden sind. Dies tritt in der That in der Formel (1') ein, da zu diesem Zwecke der Werth λ nur genügend allgemein zu nehmen ist. Wenn dann in der oberen Grenze von (8) auch einige der x_l zusammenfallen sollten, so bleiben die Sätze von Nr. 2 und Nr. 3 doch bestehen, da dieselben bei *beliebigem* Grenzübergange zu diesen Stellen existiren.

4. Dem Theorem von Nr. 3 stellt sich *das Abel'sche Differentialtheorem für Formen zweiter Gattung erster Ordnung* an die Seite, das, unter den Bedingungen (5), in den Gleichungen (6) ausgesprochen ist; oder in Integralform, indem man (6) nach λ, von $\lambda = \lambda_0$ bis $\lambda = \lambda_1$, wobei

$$\begin{aligned} \psi(y_l) - \lambda_0 \chi(y_l) &= 0 \\ \psi(x_l) - \lambda_1 \chi(x_l) &= 0 \end{aligned} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r),$$

integrirt:

$$(9) \qquad \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} D_\xi P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x$$

$$= D_\xi \lg \frac{\psi(\xi)-\lambda_0\chi(\xi)}{\psi(\xi)-\lambda_1\chi(\xi)} = \frac{1}{r}(\lambda_1-\lambda_0)\frac{(f\psi\chi)_{x=\xi}}{[\psi(\xi)-\lambda_0\chi(\xi)]\,[\psi(\xi)-\lambda_1\chi(\xi)]}.$$

Die Integrationswege von den y_i nach den x_i sollen dabei ein corresiduales System bilden.

Setzt man insbesondere $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 0$; wird also die Function $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ in den $\xi = y_i$ zu 0, in den $\xi = x_i$ zu ∞, so hat man

$$(9') \qquad \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} D_\xi P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x$$

$$= D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{1}{r}\,\frac{(f\psi\chi)}{\psi(\xi)\chi(\xi)}.$$

Das entsprechende *Theorem für die Formen 3ter Gattung* entsteht hieraus durch Integration nach ξ auf irgend einem die Wege von den y_i nach den x_i nicht schneidenden Wege von η nach ξ. Sei, wie in § 13:

$$(10) \qquad \int_\eta^\xi B_\xi(x)\, d\omega_\xi = \int_\eta^\xi B_x(\xi)\, d\omega_\xi = \mathsf{X}_{\xi\eta}(x),$$

so wird aus (9)

$$(11) \qquad \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} \mathsf{X}_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x$$

$$= \lg\left\{\frac{\psi(\chi)-\lambda_0\chi(\xi)}{\psi(\xi)-\lambda_1\chi(\xi)} \cdot \frac{\psi(\eta)-\lambda_1\chi(\eta)}{\psi(\eta)-\lambda_0\chi(\eta)}\right\}$$

$$= \lg \frac{\lambda'-\lambda_0}{\lambda'-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda''-\lambda_1}{\lambda''-\lambda_0},$$

wenn

$$\psi(\xi) - \lambda'\chi(\xi) = 0,$$
$$\psi(\eta) - \lambda''\chi(\eta) = 0;$$

oder aus (9'), für $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 0$, zu

$$(11') \qquad \sum_1^r{}_i = \lg \frac{\chi(\xi)\cdot\psi(\eta)}{\psi(\xi)\cdot\chi(\eta)} = \lg \frac{\lambda''}{\lambda'},$$

wo der für den Logarithmus zu nehmende Werth noch von dem Wege von η nach ξ, d. h. von λ'' nach λ' abhängt.

Endlich wird das (9') entsprechende *Theorem für die Formen* 2^{ter} *Gattung* ν^{ter} *Ordnung, aus* (9'):

$$(12)\quad \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} \mathsf{A}_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} B_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x = \Delta_\xi^{(\nu-1)} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}.$$

5. Um das Abel'sche Differentialtheorem für eine *beliebige algebraische Form*

$$\frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}$$

zu erhalten, welche die Punkte $x = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ zu Unendlichkeitspunkten von den bez. Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ habe, wird man diese Form nach § 3 und § 10 in Normalformen zerlegen, und erhält dann nach Nr. 4 dieses Paragraphen eine Darstellung (für $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 0$):

$$(13)\quad \sum_1^r{}_i \int_{y_i}^{x_i} \frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}\, d\omega_x = \sum_1^s{}_j \sum_1^{\nu_j - 1}{}_i \gamma_{ji} \cdot \Delta_{\xi_j}^{(i-1)} D_{\xi_j} \lg \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)} + \sum_1^s{}_j \gamma_j \lg \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)},$$

wo

$$(13')\quad \sum_1^s{}_j \gamma_j = 0,$$

wo ferner die Integrationswege von den y_i nach den x_i ein corresiduales System bilden sollen und die Werthe der einzelnen Logarithmen von den Wegen zwischen dem beliebig gewählten Punkte η und den Punkten ξ_j abhängen, Wege, die bis auf die Bedingung, die von den y_i nach den x_i nicht zu schneiden, beliebig sind.

Besonders einfach wird die rechte Seite der Gleichung (13) in dem ganz speciellen Falle, dass in dem Curvenbüschel

$$\psi(\xi) - \lambda \chi(\xi) = 0,$$

eine Curve existirt, welche zugleich durch die Parameterpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ hindurchgeht, d. h. wenn $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ in $\xi_1, \ldots, \xi_s$ denselben Werth λ' annimmt. Alsdann verschwindet nämlich, wegen (13'), die Summe der logarithmischen Glieder; aber auch die Summe der von den verschiedenen Werthen dieser Logarithmen herrührenden Unbestimmtheiten. Um dies letztere zu sehen, braucht man nur die Formel, aus welcher (13) durch Integration nach λ entstand, also die (7) analoge Formel für

$$\sum_1^r{}_i \frac{\mathsf{M}(x_i)}{\mathsf{N}(x_i)}\, d\omega_{x_i},$$

ins Auge zu fassen; in welcher Summe der bezügliche Theil zu

$$\sum_j \gamma_j P_{\xi_j \eta}(x_i)\, d\omega_{x_i} = d\lambda \left(\frac{1}{\lambda' - \lambda} - \frac{1}{\lambda'' - \lambda}\right) \sum_j \gamma_j = 0$$

wird, wegen (13'). Hat die Curve $\psi(\xi) - \lambda' \chi(\xi) = 0$ die weitere Eigenschaft, in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ die Grundcurve bez. in den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ zu treffen, so wird zugleich

$$\Delta_{\xi_j}^{(i-1)} D_{\xi_j} \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \nu_j - 1 \\ j = 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}.$$

Man hat also den Satz:

Existirt in dem Curvenbüschel

$$\psi(\xi) - \lambda \chi(\xi) = 0,$$

dessen Curven die Grundcurve f in ∞^1 Gruppen von je r Punkten treffen, von welchen Gruppen eine (für $\lambda = \infty$) aus den y_i, eine zweite (für $\lambda = 0$) aus den x_i besteht, eine Curve, welche zugleich durch die Parameterpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ hindurchgeht, derart, dass $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ einen Theil einer der ∞^1 Gruppen bildet, so wird die Summe der Integrale (13) *zu einem algebraischen Ausdruck in den ξ_j:*

$$\sum_1^s{}_j \sum_1^{\nu_j - 1}{}_i \gamma_{ji} \Delta_{\xi_j}^{(i-1)} D_{\xi_j} \lg \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)}.$$

*Trifft diese Curve die Grundcurve in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ bez. ν_1-, ν_2-, $\ldots$, ν_s-punktig, derart, dass $\left(\xi_1^{\nu_1}, \ldots, \xi_s^{\nu_s}\right)$ einen Theil einer der ∞^1 Gruppen bildet, so wird jene Integralsumme zu Null.**)

6. Die Formel (11') für

$$\lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} \cdot \frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)}$$

führt mit Hülfe von Vertauschung von Parameter und Argument auf die Darstellung

$$(14) \qquad \lg \frac{\chi(\xi) \cdot \psi(\eta)}{\psi(\xi) \cdot \chi(\eta)} = \sum_1^r{}_i \int_\eta^\xi \mathsf{X}_{x_i y_i}\, d\omega_\xi = \sum_1^r{}_i \int_\eta^\xi \int_{y_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_\xi\, d\omega_x$$

$$= \sum_i \int_\eta^\xi P_{x_i y_i}(\xi; a_1, \ldots, a_p) + \sum_i \lambda_i \int_\eta^\xi \Phi_i(\xi)\, d\omega_\xi;$$

*) Einen ähnlichen allgemeinen Satz findet man schon bei H. Humbert, Sur le théorème d'Abel etc., Nr. 10—12, Journ. de Mathémat. Sér. IV, t. III, 1887; mit dem Unterschiede, dass sich derselbe nicht auf die Unendlichkeitspunkte der *Form* $\frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}$, sondern auf die Nullpunkte von $\mathsf{N}(x)$ bezieht. In dieser nicht-invarianten Gestalt lässt er daher Ausnahmen zu, während unser Satz *ausnahmslos* gültig ausgesprochen ist.

wo nach (2), § 13:

$$\lambda_i = \sum_i \int_{y_i}^{x_i} B_{a_i}(x)\, d\omega_x = \left[D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} \right]_{\xi=a_i}$$

(nach (9′) dieses Paragraphen).

Dies ist die aus § 11, Nr. 1 durch Integration nach ξ für den Fall $\nu_i = \mu_{i'} = 1$ hervorgehende Darstellung. Dabei wurde aber das Abel'sche Theorem für Formen dritter, bez. zweiter Gattung doppelt angewandt; und in Folge dessen liefert umgekehrt die Formel von § 11, Nr. 1 vermöge des Vertauschungssatzes nicht schon die Formel (11′) dieses Paragraphen, auch nicht unter Anwendung des Abel'schen Theorems für Integrale erster Gattung ((8) dieses Paragraphen).

In der That schreibt sich jene Formel § 11, Nr. 1 nach (1) des § 13 und (8) dieses Paragraphen so:

$$(15)\quad D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \sum_i \int_{y_i}^{x_i} D_\xi P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots, a_p)\, d\omega_x = -\sum_1^p{}_i \Phi_i(\xi) \cdot \left\{ D_{a_i} \lg \frac{\chi(a_i)}{\psi(a_i)} - \sum_i \int_{y_i}^{x_i} E_i(x)\, d\omega_x \right\}.$$

Die linke Seite von (15), ist, nach § 7, Nr. 2, d) und (8) dieses Paragraphen, von den $a_1, \ldots, a_p$ unabhängig, und diese Gleichung sagt nur aus, dass ihre linke Seite eine ganz beliebige φ-Form sei, ohne einen Schluss auf das identische Verschwinden dieser Form zu bieten.

7. Um die Formeln von § 12, Nr. 2 in Integralformeln umzusetzen, denke ich in den beiden corresidualen Gruppen

$$(x;\ x_1, \ldots, x_p),$$
$$(\xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p)$$

die erste als gegeben, von der zweiten ξ als beweglich; so dass $\xi_1, \ldots, \xi_p$ Functionen von ξ werden, für welche nach dem Abel'schen Theorem (5):

$$(16)\qquad \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(\xi_i)\, d\omega_{\xi_i} + \varphi_\varkappa(\xi)\, d\omega_\xi = 0,$$

also

$$(16')\qquad \frac{d\omega_{\xi_i}}{d\omega_\xi} = D_\xi \omega_{\xi_i} = -\Phi_i(\xi; \xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Somit hat man als Integralgleichung von (6), § 12, wenn auch $(\eta;\ \eta_1, \ldots, \eta_p)$ corresidual zu $(x;\ x_1, \ldots, x_p)$:

$$(17) \qquad \sum_1^p \int_{\eta_i}^{\xi_i} B_x(\xi)\, d\omega_\xi = -\sum_1^p \Phi_i(x; x_1, \ldots, x_p) \int_\eta^\xi B_{x_i}(\xi) d\omega_\xi,$$

also auch, nach § 12, (8) und (8')

$$(18) \qquad \sum_1^p \int_{\eta_i}^{\xi_i} B_x(\xi)\, d\omega_\xi + \int_\eta^\xi B_x(\xi)\, d\omega_\xi = P_{\xi\eta}(x; x_1, \ldots, x_p),$$

in welch' letzterer Gleichung (nicht in (17)) die Ausdrücke $B_x(\xi)$ auch durch $D_x P_{xy}(\xi; a_1, \ldots, a_p)$ ersetzt werden dürfen.

Diese Darstellung der algebraischen Function $P_{\xi\eta}(x; x_1, \ldots, x_p)$ von ξ unterscheidet sich von der in § 13, (3) gegebenen dadurch, dass hier in allen Integralen 2^{ter} Gattung ein und derselbe Unstetigkeitspunkt als Parameter auftritt, dafür aber die Grenzpunkte verschieden werden; während dort umgekehrt die Grenzpunkte dieselben, die Parameter verschieden waren.

§ 15.

Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems.

1. Das Jacobi'sche Umkehrproblem fordert, aus den p Gleichungen

$$(1) \qquad \sum_1^p \int_{c_i}^{x_i} \varphi_x(x)\, d\omega_x = u_x \quad (x = 1, 2, \ldots, p)$$

wo die $c_1, c_2, \ldots, c_p$ feste Punkte sind, das System der p Punkte

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

von $f = 0$ als Function der p unabhängig-veränderlichen Argumente

$$u_1, u_2, \ldots, u_p$$

zu definiren.

Man gehe vom System

$$(u_1, \ldots, u_p) = (0, \ldots, 0),$$
$$(x_1, \ldots, x_p) = (c_1, \ldots, c_p)$$

aus und auf einem bestimmten Wege U_0 zum System $(u_1, \ldots, u_p)$ hin, so gelange man zu einem System $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, das mit einem auf *irgend* einem andern Wege U von $(0, \ldots, 0)$ nach $(u_1, \ldots, u_p)$ erlangten Endwerthsystem der $(x_1, \ldots, x_p)$ zu vergleichen ist.

Zu dem Zwecke sei zunächst angenommen, dass das gegebene Werthsystem $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ ein *nicht-singuläres* sei, nämlich ein solches, für welches die Determinante $\sum \pm \varphi_1(c_1) \ldots \varphi_p(c_p)$ der p Gleichungen

$$(2) \qquad \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} \equiv du_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

nicht verschwindet; d. h. dass die p Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_p$ nicht durch eine Curve φ verknüpft und von einander endlich verschieden seien.

Aus den Gleichungen

$$(3) \qquad \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{y_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = v_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

wird man dann die Coordinaten der Punkte y_i (oder gegebene Functionen derselben) nach ganzen positiven aufsteigenden Potenzen der $v_1, v_2, \ldots, v_p$ entwickeln können, gültig in einem Convergenzgebiet G, für das die absoluten Werthe der $v_\varkappa$ unterhalb gewisser endlicher Grössen sind. Innerhalb dieses endlichen Gebiets G sind die y_i eindeutig durch die $v_\varkappa$ bestimmt, unabhängig vom Wege von (0) nach den $(v_\varkappa)$, wenn derselbe nur ebenfalls innerhalb G fällt.

Nun bestimme man*) eine ganze positive Zahl r, so gross, dass

$$v_\varkappa = \frac{u_\varkappa}{r}$$

innerhalb G fällt, während $u_\varkappa$ an irgend einer Stelle der beiden Wege U_0, U oder am Endpunkt $(u_1, \ldots, u_p)$ sich befindet. So erhält man zwei Wege V_0, V innerhalb G; aber zum Endsystem beider, $(v_1 \ldots v_p)$, zugehörig aus (3) nur *ein* Werthsystem $(y_1^0, \ldots, y_p^0)$. Längs dieser Wege wird überall aus (2) und (3):

$$(4) \qquad \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} - r \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(y_i)\, d\omega_{y_i} = 0,$$

und

$$(5) \qquad \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{x_i^0} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x - r \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{y_i^0} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = 0 \quad (\text{längs } V_0, U_0),$$

$$(5') \qquad \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{x_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x - r \sum_{c_i}^{y_i^0} \int \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = 0 \quad (\text{längs } V, U),$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Die Gleichungen (4) sagen aber, wenn man dieselben erst durch die beiden Systeme

*) S. Weierstrass in § 4 seiner Abhandlung „Theorie der Abel'schen Functionen", Cr. J. Bd. 52.

$$r\sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(y_i)\, d\omega_{y_i} + \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(z)\, d\omega_z = 0,$$

$$\sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} + \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(z)\, d\omega_z = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

ersetzt, und das Abel'sche Differentialtheorem für Formen erster Gattung (§ 14, Nr. 3) doppelt anwendet, aus, dass ein oberes Grenzsystem der $(x_1, \ldots, x_p)$ *existirt*, und zwar, dass sich dasselbe aus dem Grenzsystem $(y_1^0, \ldots y_p^0)$ *algebraisch* ergiebt; nämlich: *zur r-fach gezählten Gruppe der* $(y_1^0, \ldots, y_p^0)$ *nehme man als corresidual die Gruppe bestehend aus der* $(r-1)$*-fach gezählten* $(c_1, \ldots, c_p)$ *und der Gruppe* $(x_1, \ldots, x_p)$.

Die auf dem Wege U gefundene Gruppe $(x_1, \ldots, x_p)$ *kann sich daher von der auf dem Wege* U_0 *gefundenen Gruppe* $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ *höchstens dadurch unterscheiden, dass jene dieser corresidual ist. Sind insbesondere* $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ *durch keine Curve* φ *verbunden, so ist die Gruppe* $(x_1, \ldots, x_p)$ *eindeutig durch die* $(u_1, \ldots, u_p)$ *bestimmt. Gehören zu* $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ ∞^α *dieser Gruppe corresiduale Gruppen von je p Punkten, so kann man durch geeignete Wege von* $(0, \ldots, 0)$ *nach* $(u_1, \ldots, u_p)$ *jedes dieser* ∞^α *Systeme erreichen.*

Die Gruppe $(x_1, \ldots, x_p)$, *oder vielmehr die zugehörige Corresidualschaar, hängt von dem System* $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ *eindeutig ab, für alle endlichen Werthe der* $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Dieser Beweis liefert also die analytische Fortsetzung der symmetrischen Functionen der p Punkte $x_1, \ldots, x_p$ von $u_1, \ldots, u_p$ über das ganze endliche u-Gebiet hin.

2. Der bezügliche Beweis im § 52 der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan zeigt nur, dass dasjenige singuläre Gebiet Γ des u-Raums, für dessen Punkte die symmetrischen Functionen der $x_1, \ldots, x_p$ unbestimmt werden, indem die Determinante $\sum \pm \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_p(x_p)$ verschwindet, aus dem u-Raum durch 2 Bedingungen ausgeschieden wird; und dass ausserdem für die symmetrischen Functionen der $x_1, \ldots, x_p$ keine singuläre Stelle existirt. Aber er zeigt nicht, ob die Beschaffenheit von Γ erlaubt, durch analytische Fortsetzung jede Stelle $(u_1, \ldots, u_p)$ zu erreichen, oder, wenn so, ob die *verschiedenen* Wege von $(0, \ldots, 0)$ nach $(u_1, \ldots, u_p)$ zum selben Werthe jener Functionen führen.

Diese Lücke lässt sich nun wieder durch das Abel'sche Differentialtheorem für Formen erster Gattung unmittelbar ausfüllen. Denn sei $(u_1', \ldots, u_p')$ eine Stelle von Γ, $(x_1', \ldots, x_p')$ irgend eine Gruppe aus der zugehörigen Corresidual-Schaar der $(x_1, \ldots, x_p)$; so bestimme man p beliebige feste Punkte $a_1, \ldots, a_p$ und p bewegliche Punkte $y_1, \ldots, y_p$ so, dass die beiden Gruppen von je $2p$ Punkten

$$(a_1, \ldots, a_p, \quad x_1', \ldots, x_p'),$$
$$(c_1, \ldots, c_p, \quad y_1, \ldots, y_p)$$

einander corresidual werden, und dass die Gruppe $(y_1, \ldots, y_p)$, welche $(x_1', \ldots, x_p')$ dabei zugehört, nicht durch eine Curve φ verknüpft ist.

Dies geht immer, da man von beliebigen p Punkten $y_1, \ldots, y_p$ *ausgehen* und dazu $a_1, \ldots, a_p$ bestimmen könnte. Man hat dann

$$(6) \quad \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(y_i)\, d\omega_{y_i} = \sum_1^p{}_i \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} = du_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Da nun für die symmetrischen Functionen der $y_1, \ldots, y_p$ die Stelle $(u_1', \ldots, u_p')$ keine singuläre ist, so kann man den u-Weg diese Stelle beliebig überschreiten lassen, ohne die Eindeutigkeit jener Functionen zu stören. Von diesen hängen aber die symmetrischen Functionen der $x_1, \ldots, x_p$ algebraisch und rational ab; so dass sich dieselben über die Stelle $u_1', \ldots, u_p'$, hinweg analytisch beliebig fortsetzen lassen.

3. Man könnte übrigens jene Lücke auch noch anders ausfüllen, indem sich mit Hülfe des Riemann-Roch'schen Satzes nachweisen liesse, dass das Gebiet Γ in der Nähe jeder Stelle $(u_1', \ldots, u_p')$ desselben nicht mehr als ∞^{p-3} benachbarte singuläre Stellen enthalten kann, also in der That nur $p-2$ Dimensionen besitzt. Im ebenen Raum von $2p$ Dimensionen (für die u als *complexe* Variabeln), mit einem singulären Gebiet Γ von nur $2(p-2)$ Dimensionen, kann aber zwischen irgend zwei Stellen ausserhalb Γ eine Γ nicht treffende Curve gezogen werden, und irgend zwei Curven dieser Art zwischen denselben festen Endpunkten können ohne Berührung von Γ in einander übergeführt werden.

Während der Beweis von Nr. 2 dem noch hinzufügt, dass Γ auch durchsetzt werden darf ohne Störung der Monodromie, zeigt diese Betrachtung von Nr. 3 den eigentlichen Grund der Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems. Die Thatsache, dass das singuläre Gebiet um 4 Dimensionen kleiner als das ganze ebene Gebiet, hört nämlich auf, sobald man, statt (1) zu betrachten, ein analoges Problem mit p' Integralen 1^{ter} Gattung und p' Variablen x_i hat, für das $p' < p$ ist.

4. Aus der Thatsache, dass die Gleichungen (1) eine und nur eine corresiduale Schaar von Lösungen $(x_1, \ldots, x_p)$ zulassen, schliesst man, dass dasselbe für

$$(7) \quad \sum_1^Q{}_i \int_{c_i}^{x_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

eintritt, wenn $Q > p$ ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur

$Q - p$ der Grössen x_i willkürlich anzunehmen; oder man wird p Grössen y aus

$$(8) \qquad \sum_1^p \int_{a_i}^{y_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

bestimmen, und aus dem Abel'schen Theoreme, wegen

$$(8') \qquad \sum_1^Q \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} - \sum_1^p \varphi_\varkappa(y_i)\, d\omega_{y_i} = 0,$$

die x-Schaar. Ferner muss dasselbe für $Q < p$ eintreten, wenn überhaupt eine Lösung existirt; man wird dann entweder $p - Q$ Integrale, je zwischen gleichen festen Grenzen, zu (7) zufügen, oder wieder aus (8), (8') diese Schaar finden. Ist insbesondere $u_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$, so genügt den Gleichungen (7) für jeden Werth von Q die Lösung

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_Q = c_Q;$$

also hat (7) keine anderen Lösungen, als die der Gruppe $(c_1, \ldots, c_Q)$ corresiduale Schaar von Gruppen von je Q Punkten. Dieses ist die in § 14, Nr. 3 erwähnte *Umkehr des Abel'schen Theorems für Integrale erster Gattung.*

§ 16.

Die Transcendente $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ und die Function $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

1. *Definition der Transcendenten.* Es seien wieder die Gleichungen des Jacobi'schen Umkehrproblems, (1), § 15, vorgelegt

$$(1) \qquad \sum_1^p \int_{c_i}^{x_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p),$$

und die zugehörigen Wege $c_i - x_i$ gegeben, oder bestimmt gedacht. Dann definire ich T durch

$$(2) \qquad \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} \equiv \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x_1, x_2, \ldots, x_p}{c_1, c_2, \ldots, c_p} = \sum_1^p \int_{c_i}^{x_i} \mathsf{X}_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x$$

$$\equiv \sum_1^p \int_\eta^\xi \mathsf{X}_{x_i c_i}(\xi)\, d\omega_\xi,$$

wo die Summe über die kanonischen Integrale dritter Gattung (§ 13, Nr. 1) erstreckt ist, und wo die Integrationswege $c_i - x_i$ diejenigen von (1) sein sollen, der Weg $\eta - \xi$ die Wege $c_i - x_i$ nicht schneiden soll, im Uebrigen beliebig ist.

Ferner (§ 13, Nr. 1):

$$(3)\quad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} \equiv D_\xi \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x_1, x_2, \ldots, x_p}{c_1, c_2, \ldots, c_p} - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x$$

$$= \sum_1^p{}_i \mathsf{X}_{x_i c_i}(\xi),$$

mit denselben Wegen $c_i - x_i$.

Man hat

$$(4)\quad \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} = \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{c} - \mathsf{T}_{\eta\zeta}\binom{x}{c}$$

bei geeigneter Wahl der Wege $\zeta - \xi$, $\zeta - \eta$.

Die Transcendente $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ ist, da das System $(x_1, \ldots, x_p)$ bei nicht-singulären Werthen der $u_1, \ldots, u_p$ sich eindeutig durch diese p Grössen bestimmt, als Function der $p+2$ Grössen $u_1, \ldots, u_p, \xi, \eta$ zu untersuchen. Für die Abhängigkeit von den $u_1, \ldots, u_p$ findet man:

$$(5)\quad \frac{\partial \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_\varkappa} = \sum_1^p{}_i \mathsf{X}_{\xi\eta}(x_i) \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial u_\varkappa} \equiv \sum_1^p{}_i \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial u_\varkappa} \int_\eta^\xi B_{x_i}(\xi)\, d\omega_\xi.$$

Aber aus (1)

$$(6)\quad \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial u_\varkappa} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial(\varphi_\varkappa(x_i))} = \Phi_i(a_\varkappa;\ x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

wo

$$\Phi = \sum \pm \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_p(x_p); \quad \varphi_\varkappa(a_\varkappa) = 1, \quad \varphi_j(a_\varkappa) = 0 \text{ für } j \neq k.$$

Also

$$(7)\quad \frac{\partial \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_\varkappa} = \sum_1^p{}_i \Phi_i(a_\varkappa;\ x_1, \ldots, x_p) \int_\eta^\xi B_{x_i}(\xi)\, d\omega_\xi$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

2. *Uebergang zu Functionen von p Variablen.* Die Gleichungen (7), verbunden mit Gleichung (17) von § 14, führen dazu, aus den $p+1$ Variablen $x_1, \ldots, x_p, \xi$ p Combinationen derselben $\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}$, und Analoges in Bezug auf η, einzuführen, indem man annimmt, dass die 3 Gruppen von je $p+1$ Punkten

$$(a_\varkappa;\ x_1, x_2, \ldots, x_p),$$
$$(\xi;\ \xi_{\varkappa 1}, \xi_{\varkappa 2}, \ldots, \xi_{\varkappa p}),$$
$$(\eta;\ \eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \ldots, \eta_{\varkappa p})$$

zu einander corresidual sind. So wird*)

*) S. Formel (32) der Weierstrass'schen Note in Cr. J. 47.

$$(8) \qquad \frac{\partial \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_x} = -\sum_1^p{}_i \int_{\eta_{xi}}^{\xi_{xi}} B_{a_x}(\xi)\, d\omega_\xi .$$

wo die Wege rechts durch das Abel'sche Theorem bestimmt sind. Schreibt man das Abel'sche Theorem für die ersten beiden Gruppen in der Form

$$(9) \qquad \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{\xi_{xi}} \varphi_h(x)\, d\omega_x = u_h - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\, d\omega_x + \int_\zeta^{a_x} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

$$\equiv v_h + \int_\zeta^{a_x} \varphi_h(x)\, d\omega_x \quad (h = 1,2,\ldots,p),$$

für die erste und dritte Gruppe:

$$(9') \qquad \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{\eta_{xi}} \varphi_h(x)\, d\omega_x = u_h - \int_\zeta^\eta \varphi_h(x)\, d\omega_x + \int_\zeta^{a_x} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

$$\equiv w_h + \int_\zeta^{a_x} \varphi_h(x)\, d\omega_x \quad (h = 1,2,\ldots,p),$$

so sieht man, dass der Differentialquotient (8) die Differenz zweier Functionen wird, von denen die eine nur von den p Grössen

$$(10) \qquad v_h = u_h - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\, d\omega_x \quad (h = 1,2,\ldots,p),$$

die andere von den p Grössen

$$(10') \qquad w_h = u_h - \int_\zeta^\eta \varphi_h(x)\, d\omega_x \quad (h = 1,2,\ldots,p),$$

wo ζ ein beliebiger fester Punkt ist, abhängt; denn auch die Wege rechts in (8) setzen sich aus den Wegen $c_i - \xi_{xi}$ und $\eta_{xi} - c_i$ von (9) und (9') genau zusammen. Diese Zerlegung geht also weiter als die durch Gleichung (4) angezeigte.

Aus (8) folgt:

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial u_h} \sum_1^p{}_i \int_{\eta_{xi}}^{\xi_{xi}} B_{a_x}(\xi)\, d\omega_\xi = \frac{\partial}{\partial u_x} \sum_1^p{}_i \int_{\eta_{hi}}^{\xi_{hi}} B_{a_h}(\xi)\, d\omega_\xi .$$

Hier kommen die mit den u sich ändernden Grössen nur in den oberen und unteren Grenzen der Integrale vor; da nun zwei Integrale

$$\int_{\alpha}^{s} \psi(\xi)\, d\omega_\xi, \qquad \int_{\beta}^{s} \psi(\xi)\, d\omega_\xi$$

bei derselben oberen Grenze s, aber mit verschiedenen unteren Grenzen oder auf verschiedenen Wegen genommen, sich nur um eine von s unabhängige Grösse unterscheiden können, so kann man, wenn man einführt

$$(12) \qquad Q_\xi = \frac{\partial}{\partial u_\varkappa} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{\lambda i}} B_{a_\lambda}(\xi)\, d\omega_\xi - \frac{\partial}{\partial u_\lambda} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi,$$

wo die α_i beliebige feste Punkte und die Wege beliebig sind, die Gleichung (11) auch so schreiben:

$$(13) \qquad Q_\xi = Q_\eta,$$

d. h. Q_ξ *ist von* ξ *unabhängig:*

$$(13') \qquad D_\xi Q_\xi = 0.$$

Diese Gleichung führt aber auch unmittelbar zur Bestimmung der Abhängigkeit von Q_ξ von den $u_1, \ldots, u_p$. Wegen (10) schreibt sich (12) zunächst:

$$(14) \quad Q_\xi = \frac{\partial}{\partial v_\varkappa} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{\lambda i}} B_{\sigma_\lambda}'(\xi)\, d\omega_\xi - \frac{\partial}{\partial v_\lambda} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi \equiv F(v_1, \ldots, v_p);$$

also aus (13') und (10):

$$\sum_1^p{}_i \frac{\partial F(v_1, \ldots, v_p)}{\partial v_i} D_\xi v_i = - \sum_1^p{}_i \frac{\partial F(v_1, \ldots, v_p)}{\partial v_i} \varphi_i(\xi) = 0.$$

Da man nun auch die $v_1, \ldots, v_p$, ξ als unabhängige Variable betrachten darf, und da zwischen den $\varphi_i(\xi)$ keine lineare Relation besteht, so wird

$$\frac{\partial F(v_1, \ldots, v_p)}{\partial v_i} \equiv \frac{\partial Q_\xi}{\partial v_i} = 0,$$

d. h. Q_ξ *ist auch von den* v_i, *also den* u_i, *unabhängig.* Setzt man $u_\lambda = u_\varkappa$, so zeigt sich, dass

$$(15) \qquad Q_\xi \equiv 0.^*)$$

3. *Einführung der Functionen von p Argumenten.* Die Gleichung (15) giebt, wenn man Q_ξ in der Form (14) schreibt, Anlass zur Einführung einer solchen Function von $v_1, \ldots, v_p$, welche einen Theil der in Nr. 2 genannten Zerlegung des Differentialquotienten (8), also auch von

*) S. Weierstrass in Cr. J. Bd. 49, Formel (33).

$$\frac{\partial \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial v_k},$$

bildet. Ich setze

$$(16) \qquad -\sum_{1}^{p}{}_{i}\int_{\alpha_i}^{\xi_{xi}} B_{a_x}(\xi)\, d\omega_\xi = \omega_x(v_1, v_2, \ldots, v_p) \equiv \omega_x(v),$$
$$(x = 1, 2, \ldots, p),$$

bei willkürlichem festem Punkte ξ von (10), willkürlichen festen Punkten α_i und willkürlichen Wegen $\alpha_i - \xi_{xi}$. Die Gleichung (15) sagt dann aus, *dass*

$$\omega_1(v)\, dv_1 + \omega_2(v)\, dv_2 + \cdots + \omega_p(v)\, dv_p$$

das vollständige Differential einer Function

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) \equiv \omega(v)$$

von den p Grössen

$$v_1, v_2, \ldots, v_p$$

ist.

Die so zu erhaltende Function $\omega(v)$ hängt aber, ausser von den p Argumenten v, auch noch von dem festen Punkte ξ ab. Denn lässt man die v constant, ändert aber ξ, so muss man nach (10) entweder die $x_1, \ldots, x_p$ oder ξ ändern, also jedenfalls die ξ_{xi} und damit, nach (16), die $\omega_x(v)$. Die $\omega_x(v)$ hängen ferner von den festen Punkten α_i ab, aber nach (16) nur je in einer additiven Constanten; $\omega(v)$ also in einem Gliede von der Form

$$\sum_x \psi_x(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\, v_x.$$

Endlich hängt auch $\omega(v)$ von den p festen Punkten $a_1, \ldots, a_p$ ausserhalb der p Argumente v ab.

Alle diese Vorkommnisse lassen sich nun, wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, heben, wenn man diejenige Transformation der Argumente v vornimmt, welche im Clebsch-Gordan'schen Werke eingeführt ist, und auch die unteren Grenzen α_i in (16) entsprechend ändert, also die $\omega_x(v)$ um Constanten, was ihre Eigenschaft als partielle Differentialquotienten einer Function nicht stört.

Die durch (8) direct angezeigte Zurückführung von $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ auf diese Function (oder auf $\omega(v)$), und die Untersuchung des Charakters dieser Function wird erst nachher ausgeführt werden.

§ 17.

Die Function $\Omega(V_1, V_2, \ldots, V_p)$.

1. *Transformation der Argumente $v_\varkappa$.* Der erste Gesichtspunkt ist der, dass man in Gleichungen (10) des § 16 die unteren Grenzpunkte c_i der u_λ so von ζ abhängig macht, dass die v_λ, bei gegebenen $\xi, x_1, \ldots, x_p$, von ζ unabhängig werden; d. h. dass

$$(1) \qquad \sum_1^p \int_{c_i}^{c_i'} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x - \int_\zeta^{\zeta'} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x = 0,$$

wenn die c' so von ζ' abhängen, wie die c_i von ζ. Hiernach soll sein:

$$(\xi;\ c_1', \ldots, c_p') \text{ corres. zu } (\xi';\ c_1, \ldots, c_p),$$

was auf die allgemeinste Weise geschehen kann, indem man $p+1$ willkürliche Punkte $\eta, C_1, \ldots, C_p$ von f annimmt, die Geraden $(\eta\zeta)$ und $(\eta\zeta')$ legt mit den bezügl. weiteren Schnittpunkten $s_1, \ldots, s_{m-2}$ und $s_1', \ldots, s_{m-2}'$ und dann die c, c' dadurch bestimmt, dass man die s, C, c durch eine zu f adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die s', C, c' durch eine zweite solche verbindet. Dann hängen bei gegebenen v die $\omega_\varkappa(v)$ nicht mehr von ζ ab, wenn man die α_i beliebig fest annimmt; wohl aber von den Punkten $\eta, C_1, \ldots, C_p$.

Man lasse aber η an ζ heranrücken, ziehe also in ζ die Tangente von f, und bestimme auch die C so als Functionen von ζ, dass die Punkte c_i bez. den Punkten C_i benachbart werden; d. h. man lege durch die $m-2$ weiteren Schnittpunkte t_j der Tangente in ζ eine zu f adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche f in noch p Punkten berühre. Solcher Curven giebt es eine endliche Anzahl, wenn die p Punkte durch keine Curve φ verknüpft sein sollen; es sei eine solche „eigentliche" Berührungscurve gewählt, bei der keiner der p Punkte mit ζ zusammenfällt, und solche p besonderen Punkte $c_i = C_i$ seien mit

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$$

bezeichnet. Diese Punkte $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ hängen nur von ζ ab. Bestimmt man jetzt die $\zeta_1', \ldots, \zeta_p'$ so nach (1), dass

$$(\xi;\ \zeta_1', \ldots, \zeta_p') \text{ corres. zu } (\xi';\ \zeta_1, \ldots, \zeta_p),$$

so werden auch die $\zeta_1', \ldots, \zeta_p'$ die Berührungspunkte einer eigentlichen adj. Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche noch durch die weiteren $m-2$ Schnittpunkte t_j' der Tangente in ζ' geht; Punkte, die also zwar eindeutig aus $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$ sich ergeben, aber doch von ζ' allein (vieldeutig) abhängen. In der That folgt aus (1) und aus

$$2\int_\zeta^{\zeta'} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x + \sum_1^{m-2} \int_{t_j}^{t_j'} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x = 0$$

auch:

$$2\sum_1^p \int_{\zeta_i}^{\zeta_i'} \varphi_h(x)\, d\omega_x + \sum_1^{m-2} \int_{t_j}^{t_j'} \varphi_h(x)\, d\omega_x = 0.$$

[Es ist dabei vom invarianten Standpunkt aus selbstverständlich, dass man auch, ohne Aenderung des Resultats, definiren könnte: man nehme irgend eine f in ζ berührende Curve φ; durch deren $2p-4$ weitere Schnittpunkte t_j eine eigentliche $\Phi^{(2)}$, welche f in noch p Punkten $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ berühre, analog für ζ'; so gilt (1) für

$$c_i = \zeta_i, \quad c_i' = \zeta_i'$$

und alles Uebrige. Die Punkte (ζ, t_j, ζ_i) bilden dann die $3(p-1)$ Berührungspunkte einer überall berührenden $\Phi^{(3)}$. Aus einer ∞^{2p-3}-Schaar solcher Berührungsgruppen, die ein System bilden, sind die hier vorkommenden p Punkte $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ offenbar dadurch ausgezeichnet, dass sie sich mit ∞^{p-2} (statt ∞^{p-3}) Gruppen von je $2p-3$ Punkten zu Gruppen des Systems ergänzen, nämlich mit den zu $(\zeta, t_1, \ldots, t_{2p-4})$ corresidualen Gruppen, d. i. mit den Gruppen, welche die durch ζ gehenden φ aus f ausschneiden*). Man kann auch sagen: die p Punkte $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$, doppelt gezählt, bilden eine Gruppe von $2p$ Punkten, welche corresidual ist zur Gruppe $(\zeta\zeta l_1, \ldots, l_{2p-2})$, wo die $l_1, \ldots, l_{2p-2}$ der Schnitt von f mit irgend einer φ-Curve sind.]

Wir setzen nun, statt der u und v von (1) und (10) des § 16:

$$(2)\quad U_h = \sum_1^p \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

$$(3)\quad V_h = \sum_1^p \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_h(x)\, d\omega_x = U_h - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

$$\equiv \sum_1^p \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

$$(h = 1, 2, \ldots, p),$$

wenn $(\xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p)$ corres. zu $(\zeta;\ \xi_1, \ldots, \xi_p)$.

Die Argumente V_h sind jetzt von ζ unabhängig geworden. Die linke Seite von (16), § 16, wird daher ebenfalls von ζ unabhängig und eine Function der $V_1, \ldots, V_p$; hängt aber immer noch von den $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ und den $a_1, \ldots, a_p$ ab. Die x_i und ξ dagegen treten nur in der Verbindung der $V_1, \ldots, V_p$ ein; diese aber, wie die ξ_{xi}, also

*) S. die Bemerkung von Frobenius, Gött. Nachr. vom 29. März 1888.

die linke Seite von (16), § 16, ändern sich nicht, wenn man die x_i, ξ durch solche $p+1$ Punkte x_i', ξ' ersetzt, für welche

$$(\xi'; x_1, \ldots, x_p) \text{ corresidual zu } (\xi; x_1', \ldots, x_p').$$

2. *Einführung der* $\Omega_\varkappa(V)$ *und von* $\Omega(V)$. Nach (10), § 16 hat man auch:

$$(4) \qquad V_\lambda = \sum_1^p \int_{\zeta_i}^{\xi_{\varkappa i}} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_\varkappa - \int_{\zeta}^{a_\varkappa} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_\varkappa$$

$$= \sum_1^p \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_\varkappa,$$

wenn

$$(a_\varkappa; x_1 x_2, \ldots, x_p) \text{ corres. zu } (\xi; \xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}),$$

$$(a_\varkappa; \xi_1 \xi_2, \ldots, \xi_p) \quad ,, \quad ,, \quad (\zeta; a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}),$$

also auch

$$(a_\varkappa; \xi_1 \xi_2, \ldots, \xi_p) \quad ,, \quad ,, \quad (\xi; a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}),$$

wo also die $a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}$ nur von $a_\varkappa$ abhängen. (Die Wege $a_{\varkappa i} - \xi_{\varkappa i}$ hängen nach dem Abel'schen Theorem ab von den Wegen $\zeta_i - x_i$). Man schafft daher aus der linken Seite von (16), § 16 die $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ weg und führt sie *in eine Function der* $V_1, \ldots, V_p$, *und ausserdem nur von* $a_\varkappa$, dadurch über, dass man dort setzt

$$\alpha_i = a_{\varkappa i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

So führen wir die folgende, von $\omega_\varkappa(v)$ um eine Constante verschiedene Function ein

$$(5) \qquad \Omega_\varkappa(V_1, \ldots, V_p) \equiv \Omega_\varkappa(V) = -\sum_1^p \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi.$$

Diese Summe von kanonischen Integralen zweiter Gattung, mit dem gemeinsamen Parameter $a_\varkappa$ und mit den Wegen von (4), ist bei nicht speciellem ξ endlich, da keiner der Punkte $a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}$ wegen der Annahme über die zu ζ gehörige Berührungscurve mit $a_\varkappa$ zusammenfällt.

Setzt man $\varkappa = 1, 2, \ldots, p$, so erhält man in (5) p Functionen der Argumente $V_1, \ldots, V_p$, welche sonst nur bezüglich von $a_1, \ldots, a_p$ abhängen und welche die partiellen Differentialquotienten *einer* Function von $V_1, \ldots, V_p$ sind, die ich mit $\Omega(V)$ bezeichne:

$$(6) \quad \Omega_1(V)\, dV_1 + \Omega_2(V)\, dV_2 + \cdots + \Omega_p(V)\, dV_p = d\Omega(V_1, \ldots V_p) \equiv d\Omega(V).$$

Dass diese Function von $a_1, \ldots, a_p$ überhaupt nicht abhängt, wird sich in Nr. 2 des folgenden Paragraphen zeigen. $\Omega(V)$ ist durch (6)

bis auf eine additive Constante bestimmt, welche man dazu benutzen kann, $\Omega(0, \ldots, 0)$ einen beliebigen numerischen Werth zu ertheilen.

3. *Die* $\Omega_\varkappa(V)$ *sind ungerade Functionen der Argumente* $V_1, \ldots, V_p$:

$$\Omega_\varkappa(-V_1, \cdots, -V_p) = -\Omega_\varkappa(V_1, \cdots, V_p). \tag{7}$$

Zum Beweise sei

$$-V_\lambda = \sum_1^p{}_i \int_{\xi_i}^{x_i'} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x = \sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi'_{\varkappa i}} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x,$$

so wird, mittels (3) und (4):

$$\sum_1^p{}_i \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x + \sum_1^p{}_i \int_{\xi_i}^{x_i'} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x = 0,$$

$$\sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x + \sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi'_{\varkappa i}} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x = 0;$$

und da diese Gleichungen für alle Werthe der $x_1, \ldots, x_p$ gelten, so sieht man, dass

$$(x_1, \ldots, x_p, \quad x_1', \ldots, x_p') \text{ corres. zu } (\xi_1^2, \ldots, \xi_p^2),$$
$$(\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}, \quad \xi'_{\varkappa 1}, \ldots, \xi'_{\varkappa p}) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (a^2_{\varkappa 1}, \ldots, a^2_{\varkappa p}).$$

Die $x_1', \ldots, x_p'$ entstehen also aus den $x_1, \ldots, x_p$, indem man die Tangente f in ξ zieht und durch deren $m-2$ weitere Schnittpunkte und durch die $x_1, \ldots, x_p$ eine adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legt, welche dann f noch in den $x_1', \ldots, x_p'$ schneidet. Ich will sagen:

Gruppe $(x_1', \ldots, x_p')$ *ist bezüglich* ξ^2 *zugeordnet zu Gruppe* $(x_1, \ldots, x_p)$.

Ebenso ist

Gruppe $(\xi'_{\varkappa 1}, \ldots, \xi'_{\varkappa i})$ bezüglich $a_\varkappa{}^2$ zugeordnet zu Gruppe $(\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p})$.

Bildet man nun die Summe

$$\Omega_\varkappa(V) + \Omega_\varkappa(-V) \equiv -\sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi - \sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi'_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi,$$

so wird dieselbe zunächst, nach dem Abel'schen Theorem, (9), § 14, eine algebraische Function von $a_\varkappa$. Aber nach dem Satze von Nr. 5 des § 14 verschwindet diese Function identisch; denn in der Gesammtheit der bezüglich $a_\varkappa$ einander zugeordneten Gruppenpaare von $2p$ Punkten enthält jedes Paar, das einen Punkt in $a_\varkappa$ selbst hat, noch einen zweiten in $a_\varkappa$, indem es aus $(a_\varkappa{}^2, l_1, \ldots, l_{2p-2})$ besteht, wo $l_1, \ldots, l_{2p-2}$ der Schnitt von f mit einer Curve φ ist. —

Man hätte auch direct von der Forderung ausgehen können, statt der $\omega_\varkappa(v)$ ungerade Functionen aufzustellen, und wäre dann ohne Weiteres auf die in Nr. 2 gegebene Bestimmung der α_i und die in Nr. 1 enthaltene Transformation der Argumente v_i geführt worden.

4. *Zurückführung der* T *auf die* Ω. Man lasse ξ auf gegebenem Wege in η übergehen, und nehme

$$(\xi;\ \xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}) \quad \text{corres. zu} \quad (\eta;\ \eta_{\varkappa 1}, \ldots, \eta_{\varkappa p});$$

so erhält man auch ein Wegsystem von den $\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}$ zu den $\eta_{\varkappa 1}, \ldots, \eta_{\varkappa p}$, das identisch ist mit dem in Nr. 2 des § 16 betrachteten; und damit sei:

$$(7) \qquad W_\lambda = U_\lambda - \int_\xi^\eta \varphi_\lambda(x)\, d\omega_\varkappa = \sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\eta_{\varkappa i}} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_\varkappa,$$

$$(8) \qquad \Omega_\varkappa(W_1, \ldots, W_p) \equiv \Omega_\varkappa(W) = -\sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\eta_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi.$$

Dann wird (8), § 16 zu

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_\varkappa} = \frac{\partial \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial U_\varkappa} = \Omega_\varkappa(V) - \Omega_\varkappa(W).$$

Seien ferner die Werthe von $U_\varkappa$, $V_\varkappa$, $W_\varkappa$ für $x_1 = c_1, \ldots, x_p = c_p$ mit

$$U_\varkappa^0,\ V_\varkappa^0,\ W_\varkappa^0$$

bezeichnet, so liefert (9):

$$(10) \qquad \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} = \Omega(V) - \Omega(W) - \Omega(V^0) + \Omega(W^0).$$

§ 18.

Die Function $\Omega(V)$ als Function der $p+1$ Punkte $\xi, x_1, x_2, \ldots, x_p$.

1. *Die speciellen und die adjungirten Transcendenten* T. In den Abel'schen Functionen von Clebsch-Gordan, Abschnitt VII, werden zur Zerlegung der Transcendenten $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ *zunächst* nicht Functionen der $V_1, \ldots, V_p$, sondern Functionen der $p+1$ Punkte $\xi, x_1, \ldots, x_p$ betrachtet: die sog. „speciellen" und „adjungirten" Transcendenten T. Dieselben werden sich hier als die Differentialableitungen unserer Function $\Omega(V)$ bez. nach $\xi, x_1, \ldots, x_p$ herausstellen.

$2p$ Punkte von f

$$x_1, \ldots, x_p,\quad x_1', \ldots, x_p',$$

welche aus 2 Punkten ξ, ζ von f dadurch entstehen, dass man die Gerade $\xi\zeta$ legt und durch deren weitere $m-2$ Schnittpunkte eine zu

f adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche f in jenen $2p$ Punkten trifft, will ich als „$\xi\zeta$ zugeordnet" bezeichnen. Einfacher: die $2p$ Punkte sind corresidual zu

$$(\xi, \zeta, l_1, \ldots, l_{2p-2}),$$

wo die l der Schnitt von f mit einer φ-Curve sind. Theilt man die $2p$ Punkte irgendwie in zwei Gruppen von je p:

$$(x_1, \ldots, x_p), \quad (x_1', \ldots, x_p'),$$

so nenne ich die beiden Gruppen „einander bezüglich $\xi\zeta$ zugeordnet". Es wird dann

$(\xi, x_1, \ldots, x_p, x_1', \ldots, x_p')$ corres. zu $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p, \xi_1, \ldots, \xi_p)$,

wo die $\xi_1, \ldots, \xi_p$ die in § 17, Nr. 1 eingeführten von ζ allein abhängigen Punkte sind; d. h.:

$$(1) \qquad \sum_1^p \int_{\zeta_i}^{x_i'} \varphi_k(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_k(x)\, d\omega_x = -\int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_k(x)\, d\omega_x.$$

Die „specielle Transcendente $\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$" sei nun definirt durch:

$$(2) \qquad \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) \equiv \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{2}\, \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x_1, \ldots, x_p}{x_1', \ldots, x_p'};$$

so dass

$$\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x') = -\,\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x).$$

Um dieselbe durch Ω-Functionen auszudrücken, hat man in (10), § 17 zu setzen

$$U_k = \sum_1^p \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_k(x)\, d\omega_x, \quad V_k = U_k - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_k(x)\, d\omega_x,$$

$$W_k = U_k, \quad V_k^0 = -\,U_k, \quad W_k^0 = -\,V_k, \quad \text{(nach (1))},$$

wonach

$$(3) \qquad \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \Omega(V) - \Omega(U).$$

Also auch

$$(4) \qquad \mathsf{T}_{\xi\eta}(x) = \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) - \mathsf{T}_{\eta\zeta}(x).$$

Zugleich zeigt (10), dass

$$(4') \qquad \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{c} = \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) - \mathsf{T}_{\xi\zeta}(c),$$

wie auch aus der Definition (2) direct zu erschliessen ist.

Unter „einem System adjungirter Transcendenten $\mathsf{T}^{(\varkappa)}$" werden die speciellen Transcendenten

$$(5) \qquad \mathsf{T}^{(\varkappa)} \equiv \mathsf{T}_{x_\varkappa\zeta}(x_{\varkappa,1}, \ldots, x_{\varkappa,\varkappa-1}, \xi, x_{\varkappa,\varkappa+1}, \ldots, x_{\varkappa,p}),$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

verstanden, wo

$$x_{\varkappa,\varkappa'};\ x_{\varkappa'},\quad (\varkappa' = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, p)$$

die $2(p-1)$ Schnittpunkte einer φ-Curve $\Phi_\varkappa(x;\ x_1, \ldots, x_p)$ mit $f = 0$ sind. Die unteren Grenzpunkte

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$$

von $\mathsf{T}^{(\varkappa)}$ sind dieselben für alle $\varkappa = 1, 2, \ldots, p$, und zwar diejenigen Punkte, für welche

$$(\zeta,\ x_1, \ldots, x_p) \quad \text{coresidual zu} \quad (\xi,\ \xi_1, \ldots, \xi_p);$$

denn die $x_\varkappa \xi$ zugeordneten $2p$ Punkte

$$(x_{\varkappa,1}, \ldots, x_{\varkappa,\varkappa-1},\ x_{\varkappa,\varkappa+1}, \ldots, x_{\varkappa,p};\ \xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p)$$

sind ja coresidual zu $x_\varkappa$, ξ, verbunden mit dem Schnitt einer φ, also zu

$$(x_\varkappa, \xi;\ x_{\varkappa,1}, \ldots, x_{\varkappa,\varkappa-1},\ x_{\varkappa,\varkappa+1}, \ldots, x_{\varkappa,p};\ x_1, \ldots, x_{\varkappa-1},\ x_{\varkappa+1}, \ldots, x_p).$$

Somit ist auch

$$\mathsf{T}^{(\varkappa)} = -\mathsf{T}_{x_\varkappa \zeta}(\xi_1, \ldots, \xi_p). \tag{5'}$$

Nach (3) wird

$$\mathsf{T}^{(\varkappa)} = -\Omega(V^{(\varkappa)}) + \Omega(U^{(\varkappa)}),$$

wo

$$U_h^{(\varkappa)} = \sum_1^p \int_{\zeta_i}^{\xi_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x = U_h - \sum_1^p \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

$$= U_h - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\, d\omega_x = V_h;$$

$$V_h^{(\varkappa)} = V_h - \int_\zeta^{x_\varkappa} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

also

$$\mathsf{T}^{(\varkappa)} = \Omega(V) - \Omega(V^{(\varkappa)}), \tag{6}$$

wo

$$V_h^{(\varkappa)} = V_h - \int_\zeta^{x_\varkappa} \varphi_h(x)\, d\omega_x \tag{6'}$$

unabhängig von $x_\varkappa$ ist.

2. Aus (3) und (6) hat man, da U_h von ξ, $V_h^{(\varkappa)}$ von $x_\varkappa$ unabhängig ist:

$$\begin{cases} D_\xi\, \Omega(V) = \quad D_\xi\, \mathsf{T}_{\xi\zeta}\,(x_1, \ldots, x_p) \equiv D_\xi\, \mathsf{T}, \\ D_{x_\varkappa} \Omega(V) = -D_{x_\varkappa} \mathsf{T}_{x_\varkappa \zeta}(\xi_1, \ldots, \xi_p) \equiv D_{x_\varkappa} \mathsf{T}^{(\varkappa)}: \end{cases} \tag{7}$$

Die Ableitungen unserer Function $\Omega(V)$ *nach* ξ *und den* $x_\varkappa$ *sind die Ableitungen der speciellen Transcendenten* T, $\mathsf{T}^{(\varkappa)}$ *bezüglich nach jenen Variablen.*

Es ist dabei zu beachten, dass die Ableitung $D_\xi \mathsf{T}$ nach *allem* ξ gemeint ist, sowohl nach dem Parameter ξ, als nach dem in den unteren Grenzpunkten von T implicit enthaltenen ξ.

Daher stimmt die Function $\Omega(V)$ genau überein mit der von Clebsch-Gordan (§ 49) durch $U(x_1, \ldots, x_p; \xi)$ bezeichneten und daselbst noch weiter ausgerechneten Function.

Aus dem Umstande, dass $\Omega(V)$ auch durch die rechten Seiten von (7) definirt werden kann, diese aber von den Punkten $a_1, \ldots, a_p$ ganz unabhängig sind, schliesst man noch (s. § 17, Nr. 2):

$\Omega(V)$ ist eine von den Hülfspunkten $a_1, \ldots, a_p$ unabhängige Function.

3. *Formeln für die specielle Transcendente.* Die Formeln (7) schreiben sich:

$$(8)\quad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \sum_\varkappa \Omega_\varkappa(V)\, \frac{\partial V_\varkappa}{\partial \omega_\xi} = \sum_\varkappa \sum_i \varphi_\varkappa(\xi) \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(x)\, d\omega_\varkappa.$$

$$(8')\quad -D_{x_h} \mathsf{T}_{x_h\zeta}(x) = \sum_\varkappa \Omega_\varkappa(V)\, \frac{\partial V_\varkappa}{\partial \omega_{x_h}} = -\sum_\varkappa \sum_i \varphi_\varkappa(x_h) \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(x)\, d\omega_\varkappa.$$

Wir entnehmen zunächst der Gleichung (8), dass $D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$, obwohl die unteren Grenzen von $\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$ von ζ abhängen, selbst nicht mehr von ζ abhängig ist; was auch aus (4) zu schliessen ist.

Aus (8) folgt ferner, indem man $\xi = a_\varkappa$ setzt, wodurch $\xi_{\varkappa i} = x_i$ wird:

$$(9)\qquad D_{a_\varkappa} \mathsf{T}_{a_\varkappa\zeta}(x_1, \ldots, x_p) = \sum_i \int_{a_{\varkappa i}}^{x_i} B_{a_\varkappa}(x)\, d\omega_\varkappa.$$

Da hier beide Seiten ausser von $x_1, \ldots, x_p$ nur von dem willkürlichen Punkte $a_\varkappa$ abhängen, setze man ξ statt $a_\varkappa$, ersetze also die $a_{\varkappa i}$ durch diejenigen in § 17, Nr. 1 eingeführten, von ξ allein abhängigen Punkte ξ_i, für welche

$$(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p) \quad \text{corresid. zu} \quad (\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_p);$$

so wird:

$$(10)\qquad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} \xi(x)\, d\omega_\varkappa,$$

(mit den durch

$$V_h = \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_\varkappa$$

vorgeschriebenen Wegen, wenn auch (7) gelten soll).

Dies ist *eine neue Ausdrucksweise des D_ξ einer speciellen Transcendente mit Parameter* ξ; und es hat ein Interesse, dieselbe ohne den Durchgang durch die Functionen Ω direct abzuleiten. Zu dem Zwecke gehe ich von (4')

$$\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{c} + \mathsf{T}_{\xi\zeta}(c) \tag{4'}$$

aus und nehme dabei für die c_i ein gewisses System von p Punkten

$$C_1, C_2, \ldots, C_p$$

an, nämlich irgend ein solches, das, *doppelt* gezählt, $2p$ den ξ, ζ zugeordnete Punkte vorstellt, für welches also:

$$2\sum_1^p{}_i \int_{\zeta_i}^{C_i} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x - \int_\zeta^\xi \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x = 0. \tag{11}$$

Da man die Wege auf einer der beiden Seiten von (4') beliebig wählen kann, wird man dann setzen können

$$\mathsf{T}_{\xi\zeta}(C) = 0,$$

und erhält:

$$\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) \equiv \tfrac{1}{2}\,\mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{x'} = \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{C}. \tag{12}$$

Dies ist *eine neue Darstellung der speciellen Transcendente* $\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$. Die Wege der beiden Seiten von (12) hängen nach dem Abel'schen Theorem von einander ab.

Um auf (10) zu kommen, hat man zunächst aus (12):

$$D_\xi \mathsf{T}_{\xi\eta}(x) = \sum_1^p{}_i \int_{C_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x - \sum_1^p{}_i \mathsf{X}_{\xi\zeta}(C_i)\, \frac{d\omega_{C_i}}{d\omega_\xi}. \tag{13}$$

Hier mache man zwei Specialisirungen. Erstens lasse man rechts das willkürliche ζ an ξ heranrücken; wobei die C_i^2 zu $2p$ Punkten werden, die ξ^2 zugeordnet sind. Das zweite Glied der rechten Seite verschwindet dabei. Zweitens aber kann man für die C_i ein besonderes Punktsystem gewählt denken, für das, statt (11):

$$\sum_i \int_\zeta^{C_i} \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x - \tfrac{1}{2} \int_\zeta^\xi \varphi_\lambda(x)\, d\omega_x = 0. \tag{11'}$$

Dieses geht, wenn ζ an ξ rückt, continuirlich in das frühere zu ξ gehörige System $\xi_1, \ldots, \xi_p$ über. Somit geht dann (13) in (10) über.

Aus (8) und (10) ergiebt sich noch:

$$\sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x = \sum_\varkappa \sum_i \varphi_\varkappa(\xi) \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(x)\, d\omega_x, \tag{14}$$

oder

$$(14') \qquad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \sum_1^p \varphi_\varkappa(\xi)\, D_{a_\varkappa} \mathsf{T}_{a_\varkappa \zeta}(\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p})$$

$$= -\sum_1^p \varphi_\varkappa(\xi)\, D_{a_\varkappa} \mathsf{T}_{a_\varkappa \zeta}(x'),$$

wo die ξ_ι, $a_{\varkappa\iota}$, $\xi_{\varkappa\iota}$, in § 17, Nr. 1 und 2, die x' in § 18, Nr. 1 aus den ξ, $x_1, \ldots, x_p$ definirt sind. Diese *Relation zwischen $p+1$ speciellen Transcendenten*, d. h. die Relation (14), liesse sich zwar ebenfalls aus Relationen wie (2), § 13, und dem Abel'schen Theorem direct herleiten, aber nur durch weitläufige Rechnungen. Indess würde diese directe Herleitung dann nöthig, wenn man von der Clebsch-Gordan'schen Definition der Function

$$U(x_1, \ldots, x_p, \xi) \equiv \Omega(V_1, \ldots, V_p)$$

durch die Differentialquotienten nach den $x_1, \ldots, x_p, \xi$ ausgehen und zur Weierstrass'schen Definition durch die Differentialquotienten nach den $V_1, \ldots, V_p$ gelangen wollte.

§ 19.

Nullpunkte und Monodromie der Function $Al(V) = e^{-\Omega(V)}$.

1. Es soll sich zunächst um die Unendlichkeitspunkte der Function

$$\Omega(V) \equiv U(x_1, \ldots, x_p; \xi)$$

als Function der Variablen $x_1, \ldots, x_p, \xi$ handeln. Und zwar genügte es dabei, $\Omega(V)$ als Function von ξ zu behandeln; denn da V nur in $-V$ übergeht, $\Omega(V)$ also unverändert bleibt, wenn man ξ durch irgend einen Punkt η und $x_1, \ldots, x_p$ durch die bezüglich $\xi\eta$ zugeordnete Gruppe ersetzt, so braucht man nur ξ mit $x_\varkappa$ zu vertauschen, $x_1, x_2, \ldots, x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa+1}, \ldots, x_p$ aber durch die $p-1$ Punkte $x_{\varkappa\varkappa'}$ zu ersetzen, welche mit diesen durch eine φ verknüpft sind.

Als Function von ξ kann $\Omega(V)$, wie die Darstellung der Ableitung nach ξ in (10), § 18 lehrt, nur dann unendlich werden, wenn ξ mit einem der Punkte $x_1, \ldots, x_p$ zusammenfällt. Rückt ξ an $x_\varkappa$, ohne dass $x_\iota = x_\varkappa \left(\iota \gtrless \varkappa\right)$, so verhält sich also, nach § 13, Nr. 1, $D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$ wie

$$\frac{f_c(x_\varkappa)}{(c\,\xi x_\varkappa)},$$

daher $\Omega(V)$ wie

$$\int^\xi \frac{f_c(x_\varkappa)}{(c\,\xi x_\varkappa)}\, d\omega_\xi = -\int^\xi \frac{(c x_\varkappa\, d\xi)}{(c x_\varkappa\, \xi)} = -\log(c x_\varkappa \xi).$$

Fallen aber zu gleicher Zeit $\varrho - 1$ weitere der Punkte x_i in x_x, so dass im Ganzen ϱ der Punkte $x_1, \ldots, x_p$ mit ξ zusammenrücken, so verhält sich, nach (10) § 18, $D_\xi T_{\xi\zeta}(x)$ wie

$$\varrho \frac{f_o(x_x)}{(c\xi x_x)},$$

also $\Omega(V)$ wie

$$-\varrho \log (cx_x\xi);$$

d. h. $\Omega(V)$ *wird für* $\xi = x_x$ *unendlich wie* $-\varrho$ *mal dem Logarithmus einer einfach verschwindenden Grösse, wo* ϱ *eine positive ganze Zahl.*

Ausserdem kann $\Omega(V)$ nur unabhängig von ξ zu unendlich werden. Dies kann, nach (8), § 18, nur geschehen, wenn einer der Punkte $\xi_{x1}, \ldots, \xi_{xp}$ mit a_x zusammenfällt; d. h. wenn entweder $\xi = x_i$, was der vorhergehende Fall ist, oder *wenn* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *durch eine Curve* φ *verknüpft sind*, wobei zugleich einige dieser Punkte mit ξ zusammenrücken könnten.

Das Verhalten von $\Omega(V)$ in diesem allgemeinen Falle lässt sich mit Hülfe von Gleichung (10) des § 17 auf den ersteren Fall reduciren. Durch $x_1, \ldots, x_p$ mögen $\infty^{\alpha-1}$ Curven φ gehen. Sei ferner mit willkürlichen Punkten $\xi, \xi', \xi'', \ldots, \xi^{(\alpha)}, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)}$:

$(x_1, \ldots, x_p, \xi)$ corres. zu $(y_1, \ldots, y_p, \eta)$;
$(y_1, \ldots, y_p, \xi')$ „ „ $(x_1', \ldots, x_p', \xi)$ und $(y_1', \ldots, y_p', \eta')$;
$(y_1', \ldots, y_p', \xi'')$ „ „ $(x_1'', \ldots, x_p'', \xi)$ „ $(y_1'', \ldots, y_p'', \eta'')$;
. . . . . .
$(y_1^{(\alpha-1)}, \ldots, y_p^{(\alpha-1)}, \xi^{(\alpha)})$ „ „ $(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_p^{(\alpha)}, \xi)$.

So wird durch successive Verbindung dieser Beziehungen:

$(x_1, \ldots, x_p, \xi', \xi'', \ldots, \xi^{(\alpha)})$ corres. zu $(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_p^{(\alpha)}, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)})$.

Durch die $p + \alpha$ Punkte der ersten Gruppe geht, wegen der Willkürlichkeit der $\xi^{(i)}$, keine Curve φ mehr; diese Gruppe gehört daher einer ∞^α-Schaar an (in welcher die Punkte $\xi^{(i)}$ fest werden). In der zweiten genannten Gruppe dieser Schaar sind die α Punkte $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)}$ ebenfalls willkürlich, diese Gruppe ist daher völlig bestimmt und $x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_p^{(\alpha)}$ gehören keiner Schaar an, d. h. *diese* p *Punkte sind durch keine* φ *verknüpft.*

Nun sei

$$V_h = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\, d\omega_x, \qquad V_h' = V_h - \int_\xi^\eta \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

dann ist auch:

$$V_k' = \sum_i \int_{\zeta_i}^{y_i} \varphi_k(x)\, d\omega_x = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i'} \varphi_k(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi'} \varphi_k(x)\, d\omega_x,$$

ferner

$$V_k'' = V_k' - \int_{\xi'}^{\eta'} \varphi_k(x)\, d\omega_x = \sum_i \int_{\zeta_i}^{y_i'} \varphi_k(x)\, d\omega_x$$

$$= \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i''} \varphi_k(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi''} \varphi_k(x)\, d\omega_x,$$

. . . . . .

$$V_k^{(\alpha)} = V_k^{(\alpha-1)} - \int_{\xi^{(\alpha-1)}}^{\eta^{(\alpha-1)}} \varphi_k(x)\, d\omega_x = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i^{(\alpha)}} \varphi_k(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi^{(\alpha)}} \varphi_k(x)\, d\omega_x;$$

und nach (10) des § 17:

$$\Omega(V) = \Omega(V') + \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} + C,$$

$$\Omega(V') = \Omega(V'') + \mathsf{T}_{\xi'\eta'}\binom{x'}{c} + C',$$

. . . . . .

$$\Omega(V^{(\alpha-1)}) = \Omega(V^{(\alpha)}) + \mathsf{T}_{\xi^{(\alpha-1)}\,\eta^{(\alpha-1)}}\binom{x^{(\alpha-1)}}{c} + C^{(\alpha-1)},$$

wo die $C, C', \ldots, C^{(\alpha-1)}$ von den $x_1, \ldots, x_p$ unabhängig sind. Somit

$$\Omega(V) = \Omega(V^{(\alpha)}) + \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} + \mathsf{T}_{\xi'\eta'}\binom{x'}{c} + \cdots + \mathsf{T}_{\xi^{(\alpha-1)}\,\eta^{(\alpha-1)}}\binom{x^{(\alpha-1)}}{c} + \sum C.$$

In dieser Reduction bezieht sich nun $\Omega(V^{(\alpha)})$ auf p Punkte $x_i^{(\alpha)}$, die auf keiner Curve φ liegen; $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)}$ kann man nach dem Obigen wegen ihrer Willkürlichkeit so annehmen, dass sie bez. mit keinem der Punkte $x, x', \ldots, x^{(\alpha-1)}$ zusammenfallen. Daher folgt nach § 13, Nr. 1:

$\Omega(V)$ *wird nur dann unendlich, wenn in*

$$V_k = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_k(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_k(x)\, d\omega_x$$

ξ *mit einem der Punkte* x_i *zusammenfällt, oder unabhängig von* ξ,

wenn nämlich durch $x_1, \ldots, x_p$ eine oder unendlich viele Curven φ gehen. Auch kann Beides zugleich eintreten. In jedem Falle wird dann $\Omega(V)$ unendlich wie eine endliche Summe von negativ genommenen Logarithmen von einfach verschwindenden Grössen.

Directer ergiebt sich dieses Verhalten in allen Fällen aus dem im Clebsch-Gordan'schen Werke entwickelten Ausdruck von

$$\Omega(V) = U(x_1, \ldots, x_p; \xi)$$

(s. § 50 dieses Werkes; es ist dabei nur $d\Pi_{\xi\eta}(x)$ durch $X_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x$ zu ersetzen), der nur Integrale dritter Gattung und ein Glied

$$-\log \sum \pm \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_p(x_p)$$

enthält.

2. Aus $\Omega(V)$ werde definirt:

$$Al(V_1 \ldots, V_p) \equiv Al(V) = e^{-\Omega(V)}. \tag{1}$$

Aus dem in Nr. 1 Bewiesenen ergeben sich für diese Function folgende Eigenschaften:

$Al(V)$ ist eine für alle endlichen Werthsysteme der $V_1, \ldots, V_p$ endliche Function. Dieselbe verschwindet, und zwar immer in endlicher ganzzahliger Ordnung, nur für diejenigen Werthsysteme $V_1, \ldots, V_p$, für welche, wenn man

$$V_h = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_h(x)\, d\omega_x, \quad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{2}$$

setzt, ξ mit einem der Punkte x_i zusammenfällt, oder $x_1, \ldots, x_p$ durch eine Curve φ verknüpft sind. Tritt der letztere Fall ein, so verschwindet $Al(V)$ als Function von ξ identisch; wenn nicht, als Function von ξ in den p Punkten $x_1, \ldots, x_p$ je einfach, bez. ϱ-fach an einer Stelle $\xi = x'$, mit der ϱ der Punkte $x_1, \ldots, x_p$ zusammenfallen.

3. *Monodromie.* Bewegt sich das Werthsystem der $V_1, \ldots, V_p$ von $(0, \ldots, 0)$ nach $(V_1, \ldots, V_p)$ hin auf einem bestimmten Wege, so ändern sich auch die $(x_1, \ldots, x_p)$ aus (2), d. h. aus

$$V_h = \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x, \quad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{2'}$$

nach § 15, von den dort behandelten singulären Stellen abgesehen, eindeutig, und ebenso, nach dem Abel'schen Theorem, die ξ_{x_i}, also die $\Omega_x(V)$ von § 17, und damit auch $\Omega(V)$ und $Al(V)$; und diese Aenderungen sind durchaus stetige. Betrachtet man zwei Wege der (V), welche zum selben Endsystem führen und ohne Ueberschreitung jener singulären Stellen in einander überführbar sind, so gelangt man

nicht nur zum selben Endsystem der (x), also der ξ_{xi}, sondern nach der Definition von (5), § 17 auch zu denselben Endwerthen der $\Omega_x(V)$, und somit von $Al(V)$. Von den in § 15 angegebenen für die (x) singulären Stellen (V) kommen für die Function $Al(V)$, da sie ausserdem sicher endlich und stetig ist, nur diejenigen Stellen (V) in Betracht, für welche $\Omega(V)$ unstetig ist. Aber gerade diese Stellen — $x_i = \xi$, oder $x_1, \ldots, x_p$ durch Curven φ verknüpft — sind in Nr. 1, 2 untersucht: in ihnen verschwindet $Al(V)$, aber nur in endlicher positiver ganzzahliger Ordnung, ist also daselbst ebenfalls endlich und stetig (ohne unbestimmt zu werden, wie die (x), wenn sie eine Specialgruppe bilden). Daher bleibt $Al(V)$, wenn man die Wege der (V) über jene speciellen Werthsysteme (V) führt, doch eindeutig, d. h. *$Al(V)$ hat für kein endliches Werthsystem der (V) eine singuläre Stelle.*

Somit lässt sich, nach bekannten Sätzen, *$Al(V)$ in eine Potenzreihe nach ganzen positiven aufsteigenden Potenzen der $V_1, V_2, \ldots, V_p$ entwickeln, die für alle endlichen Werthsysteme der (V) convergirt.*

Mit diesem Satze ist auch das Ziel unserer hier anzustellenden Betrachtungen erreicht. Wie man die Formel (10) des § 17 benutzen kann, um die kanonischen Integrale 3^{ter} und 2^{ter} Gattung auf die Functionen $Al(V)$ zurückzuführen oder, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, die symmetrischen rationalen Functionen der p oberen Grenzpunkte und beliebige rationale Functionen der Coordinaten eines Punktes der Grundcurve durch Quotienten von Producten von Functionen $Al(V)$ auszudrücken, ist im Clebsch-Gordan'schen Werke über Abel'sche Functionen so ausführlich dargestellt, dass es nicht nöthig wird, von unserem Standpunkte aus darauf einzugehen.

Erlangen, Juli 1890.

Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Hat eine mehrdeutige Function $F(w)$ die Form

$$F(w) = (w - \alpha_\nu)^{\beta_\nu} f(w),$$

wo $f(w)$ in der Umgebung des Punktes $w = \alpha_\nu$ eindeutig ist, so besitzt das Integral

$$\int_{\alpha_\nu}^{x} (w - x)^\lambda F(w)\, dw,$$

in welchem x gleichzeitig als Parameter und als obere Grenze vorkommt, die Eigenschaft, den constanten Factor $e^{2\pi i(\beta_\nu + \lambda)}$ aufzunehmen, wenn x einen positiven Umlauf um den Punkt α_ν ausführt*). Dieser Satz gestattet eine Erweiterung, indem gewissen Integralen mit geschlossener Integrationscurve eine ähnliche Eigenschaft auch im Fall der Umkreisung mehrerer singulärer Punkte zukommt. Man betrachtet im Folgenden ein Integral $\omega(x)$ der Function $(w - x)^\lambda F(w)$, genommen nach w, dessen Integrationsweg S in dem Punkte x beginnt und endigt und eine beliebige Anzahl von singulären Punkten der Function $F(w)$ umschliesst. Die Curve S, die sich selbst nicht schneiden möge, begrenze ein Flächenstück, auf welchem die singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ der Function $F(w)$ liegen, und $F(w)$ habe die Form

$$(1) \qquad F(w) = (w - \alpha_1)^{\beta_1} (w - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w - \alpha_m)^{\beta_m} H(w),$$

wo $H(w)$ in der Umgebung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eindeutig bleibt. Beschreibt dann die Variable x einen positiven Umlauf um

*) Cfr. die Abh. des Herrn Hossenfelder „Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung" im 4ten Bande dieser Annalen, sowie die Abh. des Verfassers „Ueber eine Classe von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben" (§ 2) im 104ten Bande des Crelle'schen Journals.

das ganze von der Curve S eingeschlossene Flächenstück, so dass die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, jedoch keine anderen singulären Punkte der Function $F(w)$, umkreist werden, so nimmt das Integral $\omega(x)$, wie in dem nachstehenden § 1 gezeigt wird, den Factor

$$e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)}$$

auf. Der Satz lässt sich auf mehrfache bestimmte Integrale von entsprechender Form ausdehnen. Der reelle Bestandtheil der Constante $\lambda + 1$ wird in § 1 als positiv vorausgesetzt, da das Integral $\omega(x)$ sonst divergent ist.

Genügt λ der letzteren Bedingung nicht, so bildet man in der Art, wie der Verfasser in dem Aufsatze „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“*) angegeben hat, ein Integral $\Omega(x)$, dessen Integrationsweg aus zwei Umläufen (einem positiven und einem negativen) um den Punkt x und zwei Umläufen um die Gesammtheit der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ besteht. Dieses Integral, welches in § 2 behandelt wird, nimmt ebenfalls, wenn x einen positiven Umlauf um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht, den Factor $e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)}$ auf. Ist der reelle Theil von $\lambda + 1$ positiv, so unterscheiden sich $\omega(x)$ und $\Omega(x)$ nur durch einen constanten Factor. Das Integral $\Omega(x)$ behält für jeden endlichen Werth von x, der nicht zu den singulären Werthen von $F(w)$ gehört, und für beliebige Werthe der in $F(w)$ vorkommenden Constanten einen bestimmten Sinn. Das in § 2 abgeleitete Resultat ist im Falle $m = 1$ zugleich eine Ergänzung des anfänglich genannten, auf das Integral $\int_{a_r}^{x} (w - x)^{\lambda} F(w)\, dw$ bezüglichen Satzes, da auch das letztere durch ein Integral mit doppeltem Umlauf zu ersetzen ist, sobald die reellen Theile der Constanten $\beta_r + 1$ und $\lambda + 1$ negativ werden.

---

*) Diese Annalen, Band 35, pag. 470.

Ich darf nicht unterlassen, zu erwähnen, dass Herr C. Jordan in dem bereits im Jahre 1887 veröffentlichten 3ten Bande seines „Cours d'Analyse de l'École Polytechnique“ (Paris, Gauthier-Villars), der mir bisher unbekannt geblieben war, neben anderen Integralen mit geschlossenem Integrationswege auch Integrale mit Doppelumlauf anwendet (§ 193 u. f.). Ferner wird in § 208 des genannten Bandes gezeigt, dass das Integral der Function $t^{p-1}(1-t)^{q-1}$, wenn man als Integrationsweg einen Doppelumlauf um die Punkte 0 und 1 wählt, gleich dem Producte aus $(1 - e^{2\pi i p})(1 - e^{2\pi i q})$ und dem Euler'schen Integrale erster Art ist. In Bezug auf einen Theil der in meinen Abhandlungen „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“ und „Zur Theorie der Euler'schen Integrale“ (Band 35 dieser Annalen, pag. 495) enthaltenen Sätze — die ich übrigens in druckfertiger Form schon im Frühjahr 1887 Fachgenossen vorgelegt habe — kommt also Herrn C. Jordan die Priorität zu.

§ 1.

Man verbinde die singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ der in (1) angegebenen Function $F(w)$ durch eine gebrochene, sich selbst nicht schneidende Linie $\mathfrak{A}$ (Fig. 1), so dass eine Umkreisung der Linie $\mathfrak{A}$ mit der Umkreisung der m Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ identisch ist. Dann kann das in der Einleitung definirte Integral $\omega(x)$ — nach § 1 des erwähnten Aufsatzes „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (Bd. 35 dieser Ann.) — kurz durch

$$\omega(x) = \int_x^{\bar{(\mathfrak{A})}} (w - x)^\lambda F(w)\, dw, \tag{2}$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$\omega(x) = \int_x^{\bar{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}} (w - x)^\lambda F(w)\, dw$$

bezeichnet werden.

Da der reelle Theil der Constante $\lambda + 1$ als positiv vorausgesetzt wird, so tragen die dem Punkte x unmittelbar benachbarten Theile des Integrationsweges nur unendlich wenig zum Werthe des Integrals $\omega(x)$ bei. Man darf also ein unendlich kleines Stück der Curve S nahe dem Punkte x fortlassen und auf diese Weise die geschlossene Integrationscurve in eine offene verwandeln. An der unteren Integralgrenze werde ein bestimmter Werth der Potenz $(w - x)^\lambda$ und ein bestimmter Werth der Function $F(w)$ fixirt. Derjenige Ausdruck, in welchen der gewählte Zweig der Function $F(w)$ übergeht, wenn w längs S den Umlauf um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ausgeführt hat, soll durch $F_1(w)$ bezeichnet werden.

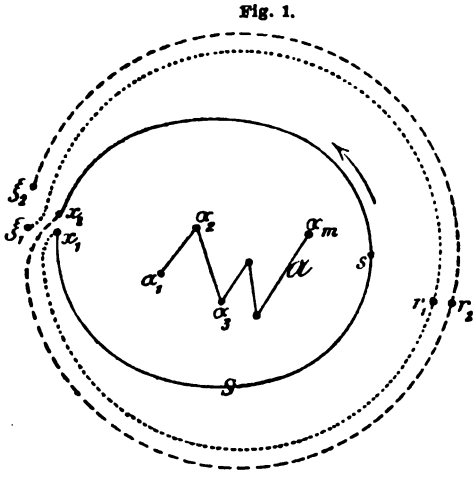
Es sei x_1 ein beliebiger Werth von x, ferner x_2 ein von x_1 unendlich wenig verschiedener Werth. Eine Curve $x_1 s x_2$ (Fig. 1), die unter Umkreisung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vom Punkte x_1 in positiver Drehungsrichtung zum Punkte x_2 führt, wird wiederum kurz durch S bezeichnet. Die Function $\omega(x_1)$ ist (abgesehen von dem unendlich kleinen Betrag, welcher dem kurzen Bogenstück $x_2 x_1$ entspricht) gleich dem längs dieser Curve S genommenen Integral

$$\omega(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (w - x_1)^\lambda F(w)\, dw. \tag{3}$$

Es handelt sich darum, die stetigen Aenderungen von $\omega(x)$ in dem Falle zu ermitteln, dass die Grösse x vom Punkte x_1 aus einen positiven Umlauf um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht. Da x sowohl untere als obere Integralgrenze in $\omega(x)$ ist, so tritt der Weg, den x durchläuft, doppelt zu dem anfänglichen Integrationswege von (3) hinzu; ausserdem ändert sich, wenn x variirt, die zu integrirende Function, da sie x als Parameter enthält.

Von x_1 aus werde (im positiven Sinne) eine ausserhalb S bleibende Curve $x_1 r_1 \xi_1$ bis zu einem dicht bei x_1 liegenden Punkte ξ_1, und ebenso von x_2 aus eine der letzteren benachbarte Curve $x_2 r_2 \xi_2$ gezogen (Fig. 1). Die vier Punkte x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 sollen einander unendlich nahe sein. Die Curven $x_1 r_1 \xi_1$ und $x_2 r_2 \xi_2$, die man schliesslich zusammenfallen lässt, geben den Weg der Variable x an. Es wird vorausgesetzt, dass auf dem Flächenstück zwischen $x_1 s x_2$ und $x_2 r_2 \xi_2$ keine singulären Punkte der Function $F(w)$ liegen. Betrachtet man für irgend einen der Curve $x_1 s x_2$ angehörigen Punkt w die Potenz $(w - x)^\lambda$, während x die Curve $x_1 r_1 \xi_1$ durchläuft, so besteht, von einem unendlich kleinen Unterschied abgesehen, die Gleichung

Fig. 1.



$$(4) \qquad (w - \xi_1)^\lambda = e^{2\pi i \lambda} (w - x_1)^\lambda,$$

da x den Punkt w im positiven Sinne umkreist hat.

Man bezeichnet durch $\omega(\xi_1)$ das Integral

$$\omega(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (w - \xi_1)^\lambda F(w)\, dw,$$

dessen Integrationsweg die Linie $\xi_1 r_1 x_1 s x_2 r_2 \xi_2$ ist. Die Grösse $\omega(\xi_1)$ stellt denjenigen Werth von $\omega(x)$ dar, welcher aus $\omega(x_1)$ schliesslich erhalten wird, wenn x die Curve $x_1 r_1 \xi_1$ durchläuft. Der Integrationsweg von $\omega(\xi_1)$ zerfällt in die drei Abschnitte $\xi_1 r_1 x_1$, $x_1 s x_2$ und $x_2 r_2 \xi_2$. Für die Punkte w des mittleren Abschnittes $x_1 s x_2$, welcher den Integrationsweg von $\omega(x_1)$ angiebt, ist die Gleichung (4) anzuwenden; die Werthe der Function $F(w)$ sind in diesen Punkten die nämlichen, wie bei dem Integral $\omega(x_1)$. Das in $\omega(\xi_1)$ enthaltene Integral längs der Curve $x_1 s x_2$ hat also den Werth $e^{2\pi i \lambda} \omega(x_1)$. Jedoch hebt sich dieser Bestandtheil von $\omega(\xi_1)$, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, gegen das Integral längs der Curve $\xi_1 r_1 x_1$ fort.

Da in $\omega(\xi_1)$ der Punkt x_1 kein singulärer Punkt der zu integrirenden Function ist, so kann der Integrationsweg von $\omega(\xi_1)$ in der Art vereinfacht werden, dass statt der zwei ersten Abschnitte $\xi_1 r_1 x_1$ und $x_1 s x_2$ der geradlinige, unendlich kleine Weg $\xi_1 x_2$ gewählt wird. Letzterer liefert aber (da $\lambda + 1 > 0$ ist) nur einen zu vernachlässigenden

Beitrag zu dem Werthe von $\omega(\xi_1)$. Mithin ist $\omega(\xi_1)$ gleich dem längs $x_2 r_2 \xi_2$ genommenen Integral.

Im Punkte $w = x_2$ und in den folgenden Punkten w der Curve $x_2 r_2 \xi_2$ hat die zu integrirende Function den Werth

$$(w - \xi_1)^\lambda F_1(w), \quad = e^{2\pi i \lambda}(w - x_1)^\lambda F_1(w).$$

Denn der jetzt anzuwendende Zweig der Function $F(w)$ wird durch $F_1(w)$ bezeichnet, und die Gleichung (4) bleibt gültig, da die Werthe der Potenz $(w - \xi_1)^\lambda$ für die Punkte w der Curve $x_2 r_2 \xi_2$ sich stetig an die Werthe anschliessen, die zur Curve $x_1 s x_2$ gehören. Demnach wird für $\omega(\xi_1)$ die Gleichung

$$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i \lambda} \int_{x_2}^{\xi_2} (w - x_1)^\lambda F_1(w)\, dw \tag{5}$$

erhalten.

Es soll nun die speciellere Voraussetzung gemacht werden, dass $F(w)$ eine Function sei, welche den constanten Factor $e^{2\pi i \sigma}$ aufnimmt, wenn w einen positiven Umlauf um die singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht. Man setzt also

$$F_1(w) = e^{2\pi i \sigma} F(w). \tag{6}$$

Dann ergiebt sich für $\omega(\xi_1)$ der Ausdruck

$$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} \int_{x_2}^{\xi_2} (w - x_1)^\lambda F(w)\, dw.$$

In dem rechts stehenden Integral kann der Integrationsweg $x_2 r_2 \xi_2$ durch den ursprünglichen Integrationsweg S ersetzt werden, da auf dem Flächenstück zwischen den beiden Wegen keine singulären Punkte liegen. Auf diese Weise entsteht, wenn man die vier Punkte x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 schliesslich in einen Punkt zusammenfallen lässt, die Gleichung

$$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}\, \omega(x_1). \tag{7}$$

Die Function $F(w)$ genügt der Bedingung (6) zunächst, wenn sie die Form

$$F(w) = (w - \alpha_1)^{\beta_1} (w - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w - \alpha_m)^{\beta_m} H(w) \tag{8}$$

hat, woselbst $H(w)$ eine in der Umgebung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eindeutige Function von w bedeutet. In diesem Falle ist

$$\omega(x) = \int_x^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)} (w - x)^\lambda (w - \alpha_1)^{\beta_1} (w - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w - \alpha_m)^{\beta_m} H(w)\, dw, \tag{9}$$

und

$$\sigma = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m,$$

wodurch die Gleichung (7) in

$$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)}\, \omega(x_1) \tag{10}$$

übergeht. Es ist hiermit der in der Einleitung angegebene Satz bewiesen, dass das Integral (9) den constanten Factor $e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)}$

aufnimmt, wenn x die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ im positiven Sinne umkreist. Die Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ sind keinen Beschränkungen unterworfen, und die Constante λ nur derjenigen, dass der reelle Theil von $\lambda + 1$ positiv sei.

Die Formeln (6) und (7) finden sodann auch auf den Fall Anwendung, wo die Function $F(w)$ selbst ein Integral von der Form (9) ist oder ein solches als Factor enthält. Es sei $\chi(w)$ ein zu (9) analoges Integral

$$(11)\quad \chi(w) = \int_w^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)} (v-w)^{\mu} (v-\alpha_1)^{\gamma_1} (v-\alpha_2)^{\gamma_2} \ldots (v-\alpha_m)^{\gamma_m} h(v)\, dv$$

und $F(w)$ die Function

$$(12)\quad F(w) = (w-\alpha_1)^{\beta_1} (w-\alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w-\alpha_m)^{\beta_m} H(w)\, \chi(w),$$

wo $H(w)$ und $h(v)$ in der Umgebung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ als eindeutig vorausgesetzt werden. Dann nimmt in (6) die Constante σ den Werth

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m + \mu$$

an. Folglich hat das Doppelintegral

$$\omega(x) = \int_x^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)} (w-x)^{\lambda} F(w)\, dw,$$

in welchem $F(w)$ den Ausdruck (12) bedeutet, die Eigenschaft, den Factor

$$e^{2\pi i(\beta_1+\gamma_1+\beta_2+\gamma_2+\cdots+\beta_m+\gamma_m+\lambda+\mu)}$$

aufzunehmen, wenn x einen positiven Umlauf um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ausführt. In der nämlichen Art lässt sich der Satz auf vielfache Integrale von beliebiger Ordnung ausdehnen.

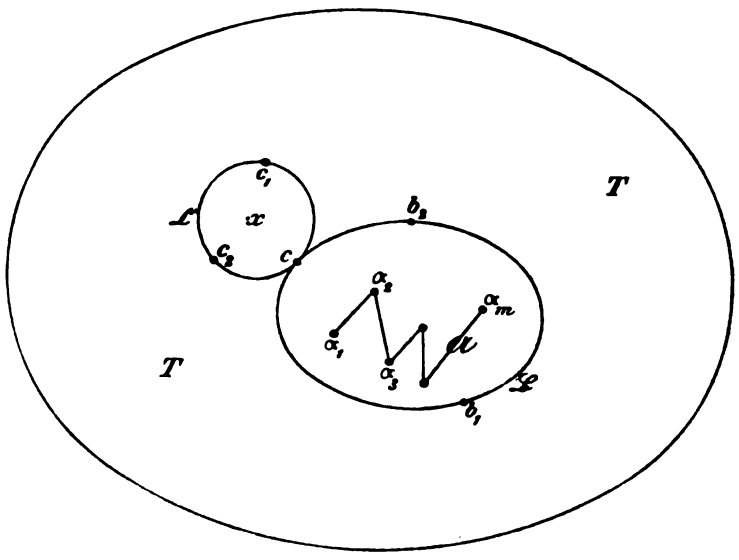
§ 2.

In den vorstehenden Rechnungen ist vorausgesetzt worden, dass der reelle Bestandtheil von $\lambda + 1$ positiv sei. Genügt die Constante λ dieser Bedingung nicht, so wird, weil das Integral (2) divergirt, der in § 1 bewiesene Satz illusorisch. Derselbe kann indessen, wie gezeigt werden soll, als ein specieller Fall eines Satzes, der für jeden Werth von λ einen Sinn behält, aufgefasst werden. Statt des in (2) angegebenen Integrals $\omega(x)$ wird ein anderes Integral $\Omega(x)$ betrachtet, dessen Integrationsweg aus einem Doppelumlauf um x und um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ besteht, und für das ebenfalls eine Gleichung von der Form (7) gilt.

Man verbinde wiederum die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, welche m beliebige singuläre Argumente der Function $F(w)$ darstellen, durch eine gebrochene, sich nicht schneidende Linie $\mathfrak{A}$ und nenne T ein Flächen-

stück, welches die ganze Linie $\mathfrak{A}$, jedoch keine anderen singulären Punkte von $F(w)$ als $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthält. Auf T befinde sich auch der Punkt x; ferner sei c ein beliebiger Punkt dieser Fläche, welcher keinem der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, x$ unendlich nahe liegt und der Linie $\mathfrak{A}$ nicht angehört. Von c aus werde innerhalb T eine geschlossene Linie cc_1c_2c gezogen, die man kurz $\mathfrak{C}$ nennt, und die den Punkt x, jedoch keinen der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ umschliesst. Ausser-

Fig. 2.



dem legt man eine geschlossene Curve cb_1b_2c, welche $\mathfrak{B}$ heissen möge, um die Linie $\mathfrak{A}$; der Punkt x befindet sich ausserhalb $\mathfrak{B}$. Es wird vorausgesetzt, dass die Punkte c_1, c_2, b_1, b_2 derartig liegen, dass der Weg cc_1c_2c den positiven Umlauf um x, der Weg cb_1b_2c den positiven Umlauf um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bedeutet (Fig. 2).

Es sei nun $\Omega(x)$ dasjenige nach w genommene Integral der Function

$$(w - x)^\lambda F(w),$$

dessen Integrationscurve sich aus den 4 auf einander folgenden Theilen

$$cc_1c_2c, \quad cb_1b_2c, \quad cc_2c_1c, \quad cb_2b_1c$$

zusammensetzt. Die Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ werden auf diese Weise zweimal durchlaufen, zuerst beide in positiver, dann beide in negativer Drehungsrichtung. Nach der obengenannten Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" wendet man für $\Omega(x)$ die abgekürzte Bezeichnung

$$\Omega(x) = \int_c^{(x, \mathfrak{A}, x-, \mathfrak{A}-)} (w - x)^\lambda F(w)\, dw \tag{13}$$

an.

Es werde vorausgesetzt, dass die Function $F(w)$ die (in (6) angegebene) Eigenschaft habe, den Factor $e^{2\pi i\sigma}$ aufzunehmen, wenn die Variable w die Linie $\mathfrak{A}$ im positiven Sinne umkreist. Man nennt $\Phi(w)$ die zu integrirende Function in $\Omega(x)$, so dass

$$\Phi(w) = (w - x)^\lambda F(w) \tag{14}$$

ist. An der unteren Grenze $w = c$ des Integrals $\Omega(x)$ wird ein bestimmter Werth $\Phi(c)$ gewählt, der Φ_0 heissen möge. Man bezeichnet ferner durch $N(x)$ das längs cc_1c_2c, sowie durch $M(x)$ das längs cb_1b_2c erstreckte Integral von $\Phi(w)$, falls an der unteren Grenze c dieser Integrale der Werth Φ_0 als Anfangswerth von $\Phi(w)$ genommen wird. Analog zu (2) schreibt man abgekürzt

$$\begin{cases} N(x) = \int_c^{\bar{c}(\mathfrak{a})} (w - x)^\lambda F(w)\, dw, \\ M(x) = \int_c^{\bar{c}(\mathfrak{B})} (w - x)^\lambda F(w)\, dw. \end{cases} \tag{15}$$

Das Integral $\Omega(x)$ lässt sich linear durch $N(x)$ und $M(x)$ ausdrücken. Bildet man die Gleichung

$$\Omega(x) = \Omega_1(x) + \Omega_2(x) + \Omega_3(x) + \Omega_4(x),$$

wo $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, $\Omega_3(x)$, $\Omega_4(x)$ die Integrale längs je eines der 4 Abschnitte des gegebenen Weges

$$cc_1c_2c,\quad cb_1b_2c,\quad cc_2c_1c,\quad cb_2b_1c$$

bedeuten sollen, so ist

$$\Omega_1(x) = N(x),\quad \Omega_2(x) = e^{2\pi i\lambda} M(x).$$

Denn bei $N(x)$, $M(x)$, $\Omega_1(x)$ hat die Function $\Phi(w)$ an der unteren Integralgrenze den Werth Φ_0, während man an der unteren Grenze von $\Omega_2(x)$, wegen der vorhergehenden Umkreisung des Punktes x, den Werth $e^{2\pi i\lambda}\Phi_0$ für $\Phi(w)$ zu setzen hat. In $\Omega_3(x)$ gehört zur unteren Grenze der Werth $e^{2\pi i(\lambda+\sigma)}\Phi_0$, zur oberen der Werth $e^{2\pi i\sigma}\Phi_0$; am Endpunkte des Integrationsweges von $\Omega_4(x)$ nimmt die Function $\Phi(w)$ wieder den Werth Φ_0 an. Indem man, unter Multiplication mit -1, bei $\Omega_3(x)$ und $\Omega_4(x)$ die Integrationscurve umkehrt, ergiebt sich

$$\Omega_3(x) = -e^{2\pi i\sigma} N(x),\quad \Omega_4(x) = -M(x),$$

so dass für $\Omega(x)$ die Gleichung

$$\Omega(x) = (1 - e^{2\pi i\sigma})\, N(x) + (e^{2\pi i\lambda} - 1)\, M(x) \tag{16}$$

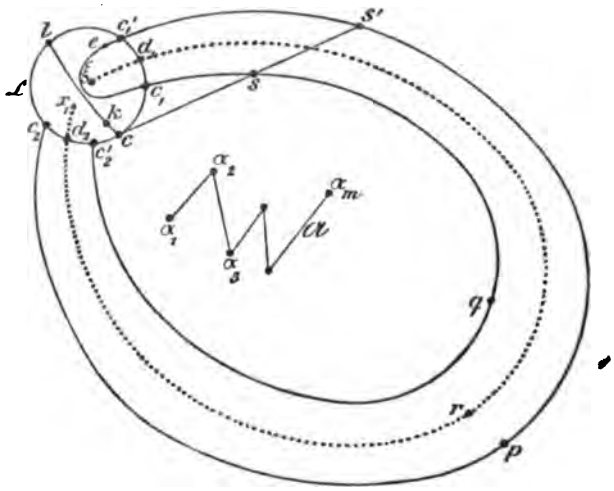
erhalten wird.

Um zu untersuchen, in welcher Weise die Grösse $\Omega(x)$ sich ändert, wenn die Variable x einen positiven Umlauf um die Linie $\mathfrak{A}$ ausführt, reicht es wegen der Gleichung (16) aus, das Verhalten der Grössen $M(x)$ und $N(x)$ im gedachten Falle festzustellen. Man darf

voraussetzen, dass die Curve, auf welcher x bei Umkreisung der Linie $\mathfrak{A}$ fortschreitet, den Integrationsweg von $M(x)$ vollständig umschliesst, da letzterer auf eine der Linie $\mathfrak{A}$ beliebig nahe kommende Curve zusammengezogen werden kann. Dann wird, indem die Variable x ihre Curve durchläuft, in jedem Element des Integrals $M(x)$ die Grösse w von x umkreist, woraus folgt, dass der schliessliche Werth von $M(x)$ gleich dem Product aus dem anfänglichen Werthe und der Constante $e^{2\pi i\lambda}$ ist. Bei $N(x)$ modificirt sich, wenn x in der angegebenen Weise variirt, auch der Integrationsweg, da derselbe der x-Curve ausweichen muss*). Um diese Aenderung zu verfolgen, soll zunächst die x-Curve näher bezeichnet werden.

Es sei, wie im vorigen Paragraphen, x_1 der anfängliche Werth von x, und ξ ein unendlich nahe bei x_1 liegender Punkt; x durchlaufe die Curve $x_1 r \xi$ (die punktirte Linie in Fig. 3), welche den gegebenen Integrationsweg $\mathfrak{C}$ des Integrals $N(x)$ in den Punkten d_2 und d_1 schneiden möge. Nan nennt c_1 und c_1' zwei Punkte von $\mathfrak{C}$, welche nicht weit von d_1 entfernt sind, und zwischen denen d_1 liegt; ebenso

Fig. 3.



befinde sich d_2 zwischen den benachbarten Punkten c_2 und c_2' der Linie $\mathfrak{C}$. Es sei ferner l ein Punkt von $\mathfrak{C}$, welcher c gegenüber liegt, in dem Sinne, dass er von c durch d_1 und durch d_2 getrennt ist. In genauerer Bezeichnung ist $\mathfrak{C}$ hiernach die Curve $cc_1d_1c_1'lc_2d_2c_2'c$. Wenn x auf der Curve $x_1 r \xi$ bis zum ersten Schnittpunkte d_2 gelangt ist, so muss im Integral $N(x)$ die Variable w den Punkt d_2 umgehen,

*) Cfr. § 1 der obenerwähnten Abhandlung des Verfassers „Ueber eine Classe von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben", Crelle's Journal, Bd. 104.

damit die x-Curve und der Integrationsweg sich nicht schneiden, und bei dem weiteren Fortschreiten von x wiederholt sich (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Aenderung) fortwährend dieses Zurückweichen des Integrationsweges vor der x-Curve. Statt des directen Weges von c_2 zu c_2' (auf der Curve $\mathfrak{C}$) erhält man daher (Fig. 3) für die Variable w einen Weg

$$c_2 p c_1' e c_1 q c_2',$$

welcher den Curvenbogen $d_2 r d_1 \xi$ von beiden Seiten umgiebt. In ähnlicher Weise weicht auch der Theil $c c_1 d_1 c_1' l$ des Integrationsweges $\mathfrak{C}$ dem Wege von x aus. Man ziehe vom Punkte c eine Linie ckl, welche zwischen x_1 und ξ hindurchgeht; dieselbe tritt an Stelle des Weges $c c_1 d_1 c_1' l$, da die x-Curve den Integrationsweg gewissermassen vor sich herschiebt. Also ist, nachdem x die Curve $x d_2 r d_1 \xi$ durchlaufen hat, der ursprüngliche Integrationsweg $c c_1 d_1 c_1' l c_2 d_2 c_2' c$ des betrachteten Integrals durch den Integrationsweg

$$ckl c_2 p c_1' e c_1 q c_2' c$$

zu ersetzen. Die anfänglichen Werthe der Integrale $M(x)$ und $N(x)$ sollen kurz durch $M(x_1)$ und $N(x_1)$, die schliesslichen Werthe derselben durch $M(\xi)$ und $N(\xi)$ bezeichnet werden. Bei $M(x_1)$ und $N(x_1)$ sei wiederum Φ_0 der Werth der Function $\Phi(w)$ an der unteren Integralgrenze $w = c$.

Die Elemente des Integrals $N(x)$, welche der unteren Grenze $w = c$ benachbart sind, nehmen den Factor $e^{2\pi i \lambda}$ auf, wenn x die Curve $x_1 r \xi$ durchläuft. Denn letztere umschliesst die betreffenden Punkte w, so dass (abgesehen von einem unendlich kleinen Unterschiede) die Potenz $(w-\xi)^\lambda$ gleich $e^{2\pi i \lambda}(w-x_1)^\lambda$ zu setzen ist. Wegen der Stetigkeit von $\Phi(w)$ innerhalb des bestimmten Integrals überträgt sich dieser Factor $e^{2\pi i \lambda}$ auf sämmtliche Elemente desselben.

Da im Integral $N(\xi)$ der Punkt x_1 kein singulärer ist, so kann man statt des Abschnitts $ckl c_2 p$ des Integrationsweges einen kürzeren Weg von c nach p wählen. Andererseits sollen gewisse Strecken zum Integrationswege hinzugefügt werden. Es sei s' ein beliebiger Punkt des Integrationsweges zwischen p und c_1' (Fig. 3); man verbindet c und s' durch eine Linie css', welche zwischen $\mathfrak{A}$ und ξ hindurchgeht und den Bogen $c_1 q$ des Integrationsweges in einem Punkte s schneiden möge. Die Einschaltung der zwei Strecken $s'sc$ und css' in den Integrationsweg ändert, da die Integrale längs $s'sc$ und css' sich gegenseitig aufheben, den Werth von $N(\xi)$ nicht. Ebenso darf man zu dem letzten Theil des Integrationswegs noch einmal die Strecken sc und cs (welche unmittelbar auf einander folgen sollen) hinzufügen. Mit Rücksicht hierauf kann der Integrationsweg von $N(\xi)$ aus folgenden 3 Theilen zusammengesetzt werden

$$ckl c_2 p s' sc, \quad css' c_1' e c_1 sc, \quad csq c_2' c.$$

Der erste Theil stellt einen Umlauf um die Linie $\mathfrak{A}$ dar; das Integral längs desselben ist (bis auf eine unendlich kleine Differenz) gleich dem Ausdruck

$$e^{2\pi i\lambda} M(x_1),$$

da es sich von dem oben definirten Integral $M(x_1)$ nur dadurch unterscheidet, dass an der unteren Integralgrenze der Werth der zu integrirenden Function nicht Φ_0, sondern $e^{2\pi i\lambda}\Phi_0$ ist. Das Integral längs $css'c_1'ec_1sc$ stimmt mit dem Producte

$$e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} N(x_1)$$

überein. Denn einerseits ist der singuläre Punkt ξ, der vom Integrationswege umkreist wird, von x_1 nur unendlich wenig verschieden, andererseits ist an der unteren Integralgrenze der Werth $e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}\Phi_0$ anzuwenden, weil $F(w)$ in Folge des Umlaufs um die Linie $\mathfrak{A}$ den Factor $e^{2\pi i\sigma}$ aufgenommen hat. Am Anfangspunkte der Strecke $csqc_2'c$ hat $\Phi(w)$ den Werth $e^{2\pi i(\sigma+2\lambda)}\Phi_0$, am Endpunkte derselben den Werth $e^{4\pi i\lambda}\Phi_0$, wie sich aus den Drehungsrichtungen des Umlaufs um ξ und des zweiten Umlaufs um $\mathfrak{A}$ unmittelbar ergiebt. Indem man bei dem Integral längs $csqc_2'c$ unter Aenderung des Vorzeichens den Integrationsweg umkehrt, findet man dasselbe gleich dem Producte

$$-e^{4\pi i\lambda} M(x_1).$$

Auf diese Weise entstehen für $M(\xi)$ und $N(\xi)$ die Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{cases} M(\xi) = e^{2\pi i\lambda} M(x_1), \\ N(\xi) = e^{2\pi i\lambda}(1-e^{2\pi i\lambda}) M(x_1) + e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} N(x_1). \end{cases}$$

Für $\Omega(\xi)$ hat man nach (16) den Ausdruck

$$\Omega(\xi) = (1-e^{2\pi i\sigma})\, N(\xi) + (e^{2\pi i\lambda} - 1) M(\xi).$$

Setzt man für $M(\xi)$ und $N(\xi)$ die in (17) erhaltenen Werthe ein, so entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} \Omega(\xi) = {} & e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}(1-e^{2\pi i\sigma}) N(x_1) \\ & + e^{2\pi i\lambda}[(1-e^{2\pi i\sigma})(1-e^{2\pi i\lambda}) + e^{2\pi i\lambda} - 1] M(x_1) \end{aligned}$$

oder

$$\Omega(\xi) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}[(1-e^{2\pi i\sigma}) N(x_1) + (e^{2\pi i\lambda} - 1) M(x_1)].$$

Da aber nach (16)

$$\Omega(x_1) = (1-e^{2\pi i\sigma})\, N(x_1) + (e^{2\pi i\lambda} - 1)\, M(x_1)$$

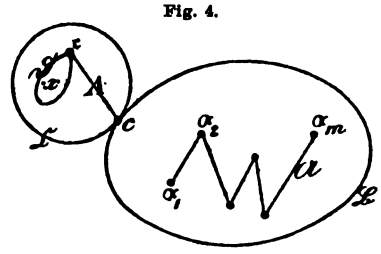
ist, so gelangt man zu der Formel:

$$(18)\qquad \Omega(\xi) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}\, \Omega(x_1).$$

Die Function $\Omega(x)$ nimmt also, wie behauptet wurde, den Factor $e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}$ auf, wenn die Variable x einen positiven Umlauf um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht.

Der Werth des Integrals $\Omega(x)$ ist von der Wahl des Punktes c, in welchem der Integrationsweg beginnt und endigt, unabhängig. Man beweist dies, indem man der Curve $\mathfrak{C}$ eine besondere Gestalt giebt. Wird der Punkt c mit einem beliebigen anderen Punkte c des Flächenstücks T durch eine Linie Λ, die innerhalb T bleibt und die Linie $\mathfrak{A}$ nicht schneidet, verbunden, und von c eine geschlossene Curve $\mathfrak{D}$ um den Punkt x gezogen (Fig. 4), so kann man die zuvor angewendete Curve $\mathfrak{C}$ durch die Linie Λ, die Linie $\mathfrak{D}$ und die in umgekehrter Richtung zum zweiten Male durchlaufene Linie Λ ersetzen. Hierdurch wird das Integral $N(x)$ gleich dem Trinom

Fig. 4.



$$\int_a^c \Phi(w)\,dw + \int_c^{\bar{(x)}} \Phi(w)\,dw + \int_c^a \Phi(w)\,dw.$$

Wie oben gezeigt wurde, hat $\Phi(w)$ am Endpunkte des ganzen Integrationsweges von $\Omega(x)$ denselben Werth, wie am Ausgangspunkte, so dass das erste der Theilintegrale, in welche man $\Omega(x)$ zerlegt, sich wieder stetig an das letzte anschliesst. In Folge dessen darf man bei der genannten Zerlegung das Integral

$$\int_a^c \Phi(w)\,dw$$

zum letzten Summandus machen und erhält hierdurch für $\Omega(x)$ den Ausdruck

$$\Omega(x) = \int_c^{\bar{(x)}} \Phi(w)\,dw + \int_c^{\bar{(\mathfrak{A})}} \Phi(w)\,dw + \int_c^{\bar{(x-)}} \Phi(w)\,dw + \int_c^{\bar{(\mathfrak{A}-)}} \Phi(w)\,dw,$$

welcher sich von dem früheren Ausdruck der Grösse $\Phi(x)$ nur dadurch unterscheidet, dass der Punkt c an die Stelle des Punktes c getreten ist.

Ist der reelle Bestandtheil der Constante $\lambda + 1$ positiv, so kann man (Fig. 2) den Punkt c unendlich nahe an den Punkt x heranrücken lassen und die Dimensionen der Curve $\mathfrak{C}$ verschwindend klein nehmen. Hierdurch wird $N(x)$ unendlich klein, und $M(x)$ mit dem in (2) bezeichneten Integral $\omega(x)$ identisch. Aus (16) ergiebt sich dann die Gleichung

$$\Omega(x) = (e^{2\pi i\lambda} - 1)\,\omega(x), \tag{19}$$

welche die Beziehung zwischen den Integralen $\Omega(x)$ und $\omega(x)$ in allen Fällen, wo $\omega(x)$ überhaupt einen bestimmten Sinn hat, ausdrückt.

Kiel, im Mai 1890.

Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Zu den linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, welche durch einfache bestimmte Integrale auflösbar sind, gehört die von Herrn Tissot im 17ten Bande von Liouville's Journal*) aufgestellte Gleichung, welche durch Integrale von der Form**)

$$(1)\quad \int_{a_k}^{a_l} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

befriedigt wird. Da ausser $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ auch die Werthe $-\infty$ und x als Integralgrenzen in (1) zulässig sind, so liefern diese Ausdrücke das vollständige Integral der genannten Differentialgleichung.

In den nachstehenden Untersuchungen, welche sich auf die nämliche Differentialgleichung beziehen, wird das System der particulären Lösungen derselben vervollständigt, indem die Hauptintegrale für die Umgebungen der einzelnen singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ und für das Gebiet der grossen Werthe von x, welches kurz die Horizontfläche der x-Ebene heissen möge, ermittelt werden. Diese Hauptintegrale lassen sich sämmtlich als bestimmte Integrale darstellen, in denen die zu integrirende Function die gleiche wie in dem Integral (1) ist; als Integrationswege kommen bei denselben neben einfachen Verbindungslinien auch geschlossene Curven, resp. Doppelumläufe vor. Die logarithmischen Fälle der Differentialgleichung werden hier nicht in Betracht gezogen.

Die particulären Integrale der Tissot'schen Gleichung werden in den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ nur wie Potenzen von $x-a_1$, $x-a_2$ etc. unstetig; man kann bei jedem zur Umgebung von a_r gehörigen Hauptintegral, falls dasselbe für $x=a_r$ unendlich wird, die

*) pag. 177 „Sur un déterminant d'intégrales définies", 1852.

**) Die obige Bezeichnung stimmt mit der von Herrn Tissot angewendeten nicht völlig überein; namentlich ist hier (abgesehen von der Wahl anderer Buchstaben) u durch $-u$, und $n+1$ durch n ersetzt worden.

Unstetigkeit durch Division mit einer passenden Potenz von $x - a_\nu$ beseitigen. Dagegen treten für ein unbegrenzt wachsendes x Unstetigkeiten zweiter Art auf, die sich mit den Unstetigkeiten der Potenzen von x nicht vergleichen lassen.

Als eine wesentliche Eigenschaft der Tissot'schen Differentialgleichung ist hervorzuheben, dass dieselbe ein particuläres Integral besitzt, welches eine transcendente ganze Function von x ist. Dieses Integral, welches im Folgenden durch Y bezeichnet wird, hat in jedem beliebigen Theile der x-Ebene den Charakter eines Hauptintegrals. Für die Ermittelung der Hauptintegrale im Gebiete der grossen Werthe von x erweist sich bei der vorliegenden Differentialgleichung die Lösung durch bestimmte Integrale als besonders zweckmässig. Wegen der bei $x = \infty$ vorhandenen Unstetigkeiten zweiter Art wird die Methode, die Differentialgleichung durch Reihen mit fallenden Potenzen zu integriren, illusorisch. Die Hauptintegrale der Horizontfläche lassen sich jedoch sämmtlich in Gestalt bestimmter Integrale darstellen, wobei der in der vorstehenden Abhandlung „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve" bewiesene Satz zur Anwendung gelangt.

Man leitet in dem nachfolgenden § 1 zunächst die Bedingungen ab, unter denen ein bestimmtes Integral von der Form

$$\int U (u-x)^{\lambda-1} du,$$

wo U nur von u abhängt, die Tissot'sche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung befriedigt. In §§ 2—4 wird auf die Tissot'sche Gleichung 3^{ter} Ordnung näher eingegangen. Die Hauptintegrale derselben für die Umgebungen der zwei endlichen singulären Punkte a_1 und a_2 sind in § 2, die Hauptintegrale für den Bezirk der grossen Werthe von x in § 3 angegeben. Der § 4 enthält einen zweiten Beweis der Eigenschaft des particulären Integrals Y, für alle endlichen Argumente x eindeutig und stetig zu sein.

Die Tissot'sche Gleichung liefert, wie am Schlusse des § 3 gezeigt wird, einen Anhalt für die Beantwortung der Frage, welche Bedeutung die divergenten Potenzreihen für die linearen Differentialgleichungen haben, denen sie formell genügen. Man findet in § 3 ein Hauptintegral der Horizontfläche, das ζ genannt wird, und das sich in eine convergente Reihe von der Form

$$(x-a_1)^{\lambda-1}\left\{\Lambda_0 + \frac{\Lambda_1}{x-a_1} + \frac{\Lambda_2}{(x-a_1)^2} + \cdots\right\}$$

entwickeln lässt. Die Grössen Λ_ν stellen transcendente Constanten dar, von denen je drei auf einander folgende, Λ_ν, $\Lambda_{\nu+1}$, $\Lambda_{\nu+2}$, durch eine lineare Relation mit rationalen Coefficienten verbunden sind, während

der Quotient $\frac{\Lambda_{\nu+1}}{\Lambda_\nu}$ irrational ist. Da nun die Differentialgleichung, wenn man dieselbe durch eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten

$$S = (x-a_1)^{\lambda-1}\left\{c_0 + \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{(x-a_1)^2} + \cdots\right\}$$

integrirt, ausschliesslich rationale Beziehungen zwischen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ergiebt, so kann der Forderung, dass in letzterer Reihe die Function ζ enthalten sei, nur dadurch genügt werden, dass neben c_0 auch c_1 willkürlich bleibt. Für beliebige Werthe von c_0 und c_1 fällt aber die obige Reihe S in die Classe der divergenten Reihen, da ausser ζ kein anderes particuläres Integral mit dem Anfangsexponenten $\lambda - 1$ im Horizontgebiete existirt.

In §§ 5 und 6 wird die Tissot'sche Gleichung n^{ter} Ordnung behandelt. Man leitet in § 5 die Systeme der Hauptintegrale für die Umgebungen der Punkte a_ν und für die Horizontfläche zunächst unter der Voraussetzung ab, dass die reellen Bestandtheile der Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \lambda$ positiv sind. In § 6 wird von dieser Voraussetzung abgesehen. Die verschiedenen particulären Lösungen der Tissot'schen Gleichung lassen sich auch im allgemeinen Falle durch bestimmte Integrale darstellen, wenn man Integrale, deren Integrationsweg aus einem Doppelumlauf besteht, zu Hülfe nimmt. In § 7 wird auf die Bestimmung von Hauptintegralen für ringförmige Flächen eingegangen. Grenzt man in der x-Ebene irgend ein ringförmiges Flächenstück ab, welches eine beliebige Anzahl der singulären Punkte der Differentialgleichung umschliesst, selbst aber frei von singulären Punkten ist, so gehören auch zu einem solchen Flächenstück gewisse Hauptintegrale, d. h. particuläre Integrale, welche, wenn x auf dem ringförmigen Flächenstück einen Umlauf um die im Innern liegenden singulären Punkte ausführt, entweder unverändert bleiben oder nur einen constanten Factor aufnehmen. Es lässt sich nun das vollständige System der Hauptintegrale, die zu einer ringförmigen Fläche gehören, für die Tissot'sche Differentialgleichung allgemein aufstellen. Auch bei diesen Betrachtungen findet der Satz Anwendung, welcher in der vorstehenden Abhandlung abgeleitet wurde.

§ 1.

Die Tissot'sche Differentialgleichung kann auf die Form

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} - [(\lambda-n)_1 \varphi'(x)+\psi(x)]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ + [(\lambda-n+1)_2 \varphi''(x) + (\lambda-n+1)_1 \psi'(x)]\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ - [(\lambda-n+2)_3 \varphi'''(x) + (\lambda-n+2)_2 \psi''(x)]\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \\ + \cdots + (-1)^{n-\nu}[(\lambda-\nu-1)_{n-\nu}\varphi^{(n-\nu)}(x) \\ \qquad + (\lambda-\nu-1)_{n-\nu-1}\psi^{(n-\nu-1)}(x)]\frac{d^\nu y}{dx^\nu} \\ + \cdots + (-1)^{n-1}[(\lambda-2)_{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+(\lambda-2)_{n-2}\psi^{(n-2)}(x)]\frac{dy}{dx} \\ + (-1)^n(\lambda-1)_{n-1}\psi^{(n-1)}(x)\,y = 0 \end{cases}$$

gebracht werden, woselbst $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die ganzen Functionen $(n-1)^{ten}$ Grades von x

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}), \\ \psi(x) = \varphi(x)\left[1+\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right], \end{cases}$$

und $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. die Ableitungen derselben bedeuten. Die Grössen $\lambda, a_1, b_1, \ldots$ sind constant; unter $(\lambda-n)_1$, $(\lambda-n+1)_2$, etc. werden Binomialcoefficienten verstanden. Man setzt y gleich dem bestimmten Integral

$$(4)\qquad y = \int_g^h U(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

in welchem die Grösse U nur von u abhängt, g constant, und h entweder constant oder gleich x ist. Falls h den Werth x hat, wird der reelle Theil der Constante $\lambda - n$ als positiv vorausgesetzt. Dann hat man

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = (-1)^\nu(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-\nu)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-\nu-1}du.$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke kann die Gleichung (2) durch die Constante

$$(-1)^n(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)$$

dividirt werden, da

$$(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-\nu)(\lambda-\nu-1)_{n-\nu} = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n)}{1.2\ldots(n-\nu)},$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-\nu)(\lambda-\nu-1)_{n-\nu-1} = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)}{1.2\ldots(n-\nu-1)}$$

ist. Man erhält hierdurch die Gleichung

$$(\lambda - n)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-n-1}\left\{\varphi(x) + \varphi'(x)\frac{u-x}{1} + \varphi''(x)\frac{(u-x)^2}{1.2} + \cdots + \frac{\varphi^{(n-1)}(x)(u-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\right\} du$$
$$+\int_g^h U(u-x)^{\lambda-n}\left\{\psi(x)+\psi'(x)\frac{u-x}{1} + \psi''(x)\frac{(u-x)^2}{1.2} + \cdots + \frac{\psi^{(n-1)}(x)(u-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\right\} du = 0,$$

welche, nachdem der Taylor'sche Satz auf die in den Klammern befindlichen Ausdrücke angewendet worden ist, die Gestalt

$$\left\{\begin{array}{c}(\lambda-n)\int_g^h \varphi(u)\ U(u-x)^{\lambda-n-1}\,du \\ +\int_g^h \psi(u)\ U(u-x)^{\lambda-n}\,du\end{array}\right\} = 0 \tag{5}$$

annimmt*). Nach der Formel der theilweisen Integration ist aber

$$(\lambda-n)\int_g^h \varphi(u)\ U(u-x)^{\lambda-n-1}\,du$$
$$= [\varphi(u)\ U(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g}^{u=h} - \int_g^h \frac{d[\varphi(u)\,U]}{du}(u-x)^{\lambda-n}\,du.$$

Also ergiebt sich aus (2) die Gleichung

$$\left\{\begin{array}{c}[\varphi(u)\ U(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g}^{u=h} \\ \int_g^h (u-x)^{\lambda-n}\left\{\frac{d[\varphi(u)\,U]}{du} - \psi(u)\,U\right\} du\end{array}\right\} = 0. \tag{6}$$

Man stellt nun für die Function U die Differentialgleichung

$$\frac{d[\varphi(u)\,U]}{du} - \psi(u)\,U = 0 \tag{7}$$

auf und unterwirft die Grössen g und h der Gleichung

$$[\varphi(u)\,U(u-x)^{\lambda-n}]_{u=h} - [\varphi(u)\,U(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g} = 0, \tag{8}$$

in welcher man die Werthe $u = g$ und $u = h$ durch den Integrationsweg von (4) in Verbindung gebracht denkt und die bezüglichen Aenderungen der von u abhängigen Function als stetige voraussetzt.

---

*) Diese Rechnung ist derjenigen völlig analog, welche der Verfasser im Abschnitt II der Abhandlung „Ueber hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung" in Crelle's Journal Bd. 71, pag. 336, angestellt hat (man beachte auch die Berichtigung in Crelle's Journ. Bd. 73, pag. 142—43). Jedoch bedeutet $\varphi(x)$ daselbst nicht eine ganze Function $(n-1)^{ten}$ Grades, sondern eine ganze Function n^{ten} Grades von x.

Sind die Bedingungen (7) und (8) erfüllt, so befriedigt das Integral (4) die Differentialgleichung (2). In die aus (7) folgende Gleichung

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{du} = \frac{\psi(u) - \varphi'(u)}{\varphi(u)}$$

werden gemäss (3) die Werthe

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = 1 + \frac{b_1}{u-a_1} + \frac{b_2}{u-a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{u-a_{n-1}},$$

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{d\log\varphi(u)}{du} = \frac{1}{u-a_1} + \frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{1}{u-a_{n-1}}$$

eingesetzt, wodurch die Gleichung

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{du} = \frac{d\log U}{du} = 1 + \frac{b_1-1}{u-a_1} + \frac{b_2-1}{u-a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}-1}{u-a_{n-1}}$$

entsteht. Indem man dieselbe integrirt (unter Fortlassung der willkürlichen Integrationsconstante), findet man für U den Ausdruck

$$U = e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}. \tag{9}$$

Die Bedingung (8) lautet hiernach

$$\left\{\begin{array}{l}[e^u(u-a_1)^{b_1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}}(u-x)^{\lambda-n}]_{u=h}\\ -[e^u(u-a_1)^{b_1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}}(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g}\end{array}\right\} = 0. \tag{10}$$

Man setzt die Ungleichheiten

$$b_1 > 0,\ b_2 > 0, \ldots, b_{n-1} > 0,\ \lambda > n \tag{11}$$

als erfüllt voraus, die, falls die Constanten $b_1, \ldots, b_{n-1}, \lambda$ nicht reell sind, für die reellen Bestandtheile derselben gelten sollen. Dann ist der Gleichung (10) genügt, sobald für g und für h Werthe aus der Reihe

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_{n-1},\ -\infty,\ x \tag{12}$$

substituirt werden. Bei dieser Bestimmung der Grenzen g, h ist das Integral

$$y = \int_g^h \Phi(u, x)\,du, \tag{13}$$

in welchem $\Phi(u, x)$ die Function

$$\Phi(u, x) = e^u(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}(u-x)^{\lambda-1} \tag{14}$$

bedeutet, eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (2).

Man nimmt an, dass die Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sämmtlich von einander verschieden sind. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass keine der Constanten

$$\left\{\begin{array}{l}b_1+\lambda,\ b_2+\lambda, \ldots, b_{n-1}+\lambda,\ \lambda,\\ b_1+b_2+\cdots+b_{n-1},\quad b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+\lambda\end{array}\right.$$

gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei.

§ 2.

Es soll zunächst auf die Differentialgleichung 3ter Ordnung, die sich aus (2) für $n = 3$ ergiebt, eingegangen werden. Die Gleichungen (2) und (3) lauten für $n = 3$:

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi(x)\frac{d^3y}{dx^3} - [(\lambda-3)_1\varphi'(x) + \psi(x)]\frac{d^2y}{dx^2} \\ + [(\lambda-2)_2\varphi''(x) + (\lambda-2)_1\psi'(x)]\frac{dy}{dx} - (\lambda-1)_2\psi''(x)y = 0, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2), \\ \psi(x) = (x-a_1)(x-a_2) + b_1(x-a_2) + b_2(x-a_1). \end{cases}$$

Der Gleichung (15) genügt, wie bewiesen, das Integral

$$(17)\qquad y = \int_g^h e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

dessen Grenzen g, h aus den Werthen

$$a_1,\ a_2,\ -\infty,\ x$$

gewählt werden. Man setzt, gemäss (11), die reellen Theile der Constanten b_1, b_2, $\lambda - 3$ zunächst als positiv voraus.

In der Umgebung eines jeden der singulären Punkte a_1 und a_2 existiren ein mehrdeutiges Hauptintegral und zwei von einander unabhängige eindeutige Integrale. Der Ausdruck

$$(18)\qquad \eta_1 = \int_{a_1}^x e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

stellt das mehrdeutige Hauptintegral im Bezirk von a_1, und der Ausdruck

$$(19)\qquad \eta_2 = \int_{a_2}^x e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

das mehrdeutige Hauptintegral im Bezirk von a_2 dar. Auf das Integral (18) wird die Substitution

$$u - a_1 = \mathfrak{u}(x-a_1)$$

angewendet, wodurch dasselbe in das Product aus der Constante $(-1)^{\lambda-1}(a_1-a_2)^{b_2-1}e^{a_1}$ und der Function

$$(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}\int_0^1 e^{\mathfrak{u}(x-a_1)}\mathfrak{u}^{b_1-1}(1-\mathfrak{u})^{\lambda-1}\left(1-\mathfrak{u}\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^{b_2-1}d\mathfrak{u}$$

übergeht. Setzt man nun

$$e^{\mathfrak{u}(x-a_1)}\left[1-\mathfrak{u}\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right]^{b_2-1}$$
$$= \gamma_0 + \gamma_1\mathfrak{u}(x-a_1) + \gamma_2\mathfrak{u}^2(x-a_1)^3 + \cdots + \gamma_\nu\mathfrak{u}^\nu(x-a_1)^\nu + \cdots + \text{inf.},$$

so haben die Constanten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ die Werthe

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_1 = \frac{1}{1} - \frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1},\ \gamma_2 = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1}\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1} + \frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2}\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1} + \frac{1}{1}\frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2} - \frac{(b_2-1)_3}{(a_2-a_1)^3}, \ldots,$$

$$\gamma_\nu = \frac{1}{\nu!} - \frac{1}{(\nu-1)!}\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1} + \frac{1}{(\nu-2)!}\frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2} - \cdots \pm \frac{1}{1}\frac{(b_2-1)_{\nu-1}}{(a_2-a_1)^{\nu-1}} \mp \frac{(b_2-1)_\nu}{(a_2-a_1)^\nu},$$

wo $(b_2-1)_\mu$ den μ^{ten} Binomialcoefficienten von b_2-1, und $\mu!$ die Zahl $1.2\ldots\mu$ bedeutet. Es ergiebt sich demnach die Beziehung

$$\frac{\eta_1}{(-1)^{\lambda-1}(a_1-a_2)^{b_2-1}e^{a_1}(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\gamma_\nu(x-a_1)^\nu\int_0^1 u^{b_1+\nu-1}(1-u)^{\lambda-1}du = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\gamma_\nu(x-a_1)^\nu E(b_1+\nu,\lambda),$$

wenn für das Euler'sche Integral erster Art die abgekürzte Bezeichnung

$$E(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du$$

benutzt wird. Da aber für ein positives ganzzahliges ν die Formel

$$(20)\quad E(p+\nu,q) = \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+\nu-1)}E(p,q)$$

gilt, so erhält man für das Integral (18) die Gleichung

$$(21)\quad \eta_1 = A_1(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\gamma_\nu\frac{b_1(b_1+1)\ldots(b_1+\nu-1)}{(b_1+\lambda)(b_1+\lambda+1)\ldots(b_1+\lambda+\nu-1)}(x-a_1)^\nu,$$

in welcher A_1 die Constante

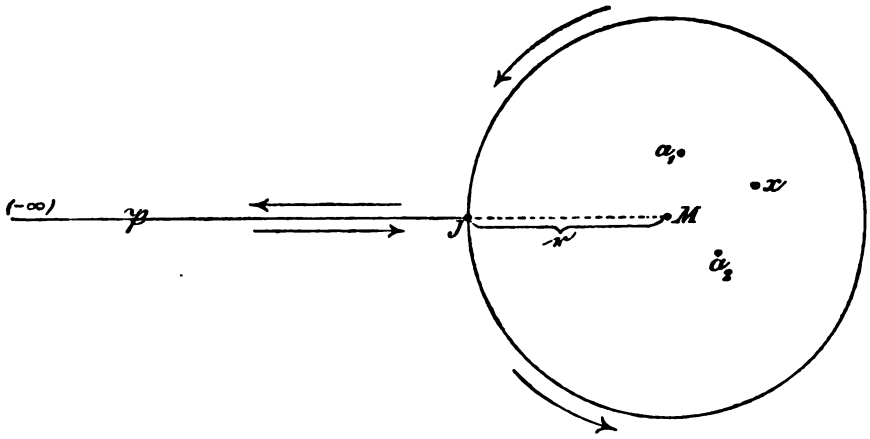
$$A_1 = (-1)^{\lambda-1}(a_1-a_2)^{b_1-1}e^{a_1}E(b_1,\lambda)$$

bedeutet. Für das Integral (19) entsteht eine analoge Gleichung, wenn a_1 und a_2, b_1 und b_2 mit einander vertauscht werden.

Es soll ferner als Integrationsweg des Integrals (17) eine geschlossene Curve genommen werden, welche in $-\infty$ beginnt und endigt. Der Gleichung (10) ist durch die Werthe $g = h = -\infty$ genügt. Man zieht, nachdem für x ein bestimmter Werth gewählt worden ist, um einen beliebigen Punkt M als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Punkte x, a_1 und a_2 umschliesst. Der Radius r dieses Kreises bleibt im Uebrigen willkürlich, möge jedoch so gross genommen

werden, dass der Punkt x sowohl dem Punkte a_1 als dem Punkte a_2 näher liegt, als irgend ein Punkt der Peripherie. Man zieht ferner vom Punkte M aus eine Parallele $\mathfrak{P}$ zur negativen reellen Axe; der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden $\mathfrak{P}$ heisse J. Lässt man

Fig. 1.



nun in (17) die Integrationsvariable u zuerst die Gerade $\mathfrak{P}$ von $-\infty$ bis zum Punkte J, hierauf den Kreis (im positiven Sinne) und zum zweiten Male die genannte Gerade von J bis $-\infty$ durchlaufen, so ist nach § 1 der Ausdruck (17) eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (15). Das so definirte Integral, das Y heissen möge, wird in abgekürzter Weise (cfr. § 1 der Abhandlung des Verfassers „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" im 35ten Bande dieser Annalen) durch das Symbol

$$(22) \qquad Y = \int_{-\infty}^{(x,a_1,a_2)} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

dargestellt.

Das Integral (22) ist eine transcendente ganze Function von x, d. h. dasselbe ist endlich und stetig, sobald x im Endlichen liegt, und hat für jeden Werth von x nur einen Werth, nachdem bestimmte Anfangswerthe der Potenzen $(u-a_1)^{b_1-1}$, $(u-a_2)^{b_2-1}$, $(u-x)^{\lambda-1}$ gewählt worden sind. Lässt man die Grösse x innerhalb der oben erwähnten Kreisfläche (Fig. 1) eine geschlossene Curve durchlaufen, welche den Punkt a_1 oder den Punkt a_2 oder beide Punkte umschliesst, so liefert der Endpunkt dieser Curve denselben Werth der zu integrirenden Function in (22), wie der Ausgangspunkt, da x keinen der Punkte u umkreist hat; auch bleibt der Integrationsweg des Integrals (22) ungeändert, weil er von der x-Curve nicht geschnitten wird. Hieraus

folgt, dass der Ausdruck (22) in der ganzen Ebene eine eindeutige Function von x ist; denn ausser a_1 und a_2 sind für die particulären Integrale der Gleichung (15) keine (im Endlichen liegende) singuläre Punkte vorhanden. Der Beweis, dass das Integral (22) für ein endliches x auch endlich und stetig ist, ergiebt sich einerseits aus dem Umstande, dass die sehr entfernten Theile des Integrationsweges nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe des bestimmten Integrals liefern, andererseits daraus, dass für die übrigen Theile des Integrationsweges die Potenzen $(u-a_1)^{b_1-1}$, $(u-a_2)^{b_2-1}$, $(u-x)^{\lambda-1}$ einen endlichen Werth haben.

Um das Integral (22) nach steigenden Potenzen von $x-a_1$ zu entwickeln, substituirt man für $(u-x)^{\lambda-1}$ die Reihe

$$(u-x)^{\lambda-1}=[u-a_1-(x-a_1)]^{\lambda-1}=(u-a_1)^{\lambda-1}\left(1-\frac{x-a_1}{u-a_1}\right)^{\lambda-1}$$
$$=(u-a_1)^{\lambda-1}\left\{1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_1}{u-a_1}+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{x-a_1}{u-a_1}\right)^\nu+\cdots\right\},$$

welche im vorliegenden Falle stets convergirt, weil (nach der Definition des Kreisradius r) für jeden Punkt u des Integrationsweges die Ungleichheit

$$\text{mod. }(x-a_1)<\text{mod. }(u-a_1)$$

besteht. Hierdurch ergiebt sich für Y der Ausdruck

$$Y=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu K_\nu(x-a_1)^\nu, \tag{23}$$

wenn durch K_ν das constante Integral

$$\int e^u(u-a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2}(u-a_2)^{b_2-1}du,$$

dessen Integrationsweg mit dem des Integrals (22) übereinstimmt, bezeichnet wird. Für K_ν hat man den abgekürzten Ausdruck

$$K_\nu=\int_{-\infty}^{(a_1,a_2)}e^u(u-a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2}(u-a_2)^{b_2-1}du, \tag{24}$$

da a_1 und a_2 singuläre Punkte der zu integrirenden Function sind, die vom Integrationswege umschlossen werden. In (24) wird eine neue Variable u mittelst der Gleichung

$$u=u-a_1,\quad u=u+a_1$$

eingeführt. Diese Substitution liefert, wenn die Differenz a_2-a_1 durch p bezeichnet wird, für K_ν die Gleichung

$$(25) \qquad K_\nu = e^{a_1 i} \int_{-\infty}^{\bar{}(0,p)} e^u u^{b_1+\lambda-\nu-2} (u-p)^{b_2-1} du,$$

da den Werthen $u = a_1$ und $u = a_2$ die Werthe $u = 0$ und $u = p$ entsprechen. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass in Fig. 1 der Kreismittelpunkt M, der beliebig war, mit dem Punkte a_1 zusammenfalle. Dann durchläuft in (25) die Variable u einerseits einen Abschnitt der negativen reellen Axe (in beiden Richtungen), andererseits einen Kreis, welcher den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat und den Punkt p umschliesst.

Die Grösse K_ν hat die Form eines Integrals, das einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten genügt, wenn p als die unabhängige Variable aufgefasst wird. In § 3 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten" im 36^{ten} Bande dieser Annalen wird gezeigt, dass das Integral

$$\int_{\infty}^{\bar{}(0,x)} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du$$

die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2y}{dx^2} = (x-\varrho) \frac{dy}{dx} + \alpha y$$

befriedigt, und dass dasselbe mit der Reihe

$$\bar{\Gamma}(1-\varrho) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1.\varrho} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)} x^2 + \cdots + \text{inf.} \right\}$$

identisch ist. Das Symbol $\bar{\Gamma}(a)$ stellt das geschlossene Integral

$$\int_{-\infty}^{\bar{}(0)} e^u u^{a-1} du$$

dar, welches, wenn der reelle Theil von a ein positives Vorzeichen hat, mit dem Euler'schen Integral $\Gamma(a)$ durch die Gleichung

$$\bar{\Gamma}(a) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}) \Gamma(a) = 2i \sin(\pi a) \Gamma(a)$$

verbunden ist. Ferner möge, wie dort, durch $F(\alpha; \varrho; x)$ die Reihe

$$(26) \qquad F(\alpha; \varrho; x) = 1 + \frac{\alpha}{1.\varrho} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)} x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

bezeichnet werden. Ersetzt man in dem oben erwähnten Integral die Grössen x, α, ϱ durch die respectiven Werthe p, $1-b_2$, $\nu-b_1-b_2-\lambda+3$, so erhält man das auf der rechten Seite von (25) stehende bestimmte Integral. Demnach besteht die Gleichung

$$K_\nu = e^{a_1 i} \bar{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-\nu-2) F(1-b_2; \nu-b_1-b_2-\lambda+3; p).$$

Für die Constante $\overline{\Gamma}(a-\nu)$ gilt die Formel (Gleichung (38) der Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" im 35ten Bande dieser Annalen)

$$\overline{\Gamma}(a-\nu) = \frac{(-1)^\nu \overline{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-\nu)}.$$

Also ist

$$\overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-\nu-2) = (-1)^\nu \frac{\overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-2)}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu},$$

wenn unter $[s]_\nu$, für ein beliebiges s und für ein positives ganzzahliges ν, der Werth

$$[s]_\nu = s(s-1)(s-2)\dots(s-\nu+1), \quad [s]_0 = 1, \tag{27}$$

verstanden wird. Man findet auf diese Weise für K_ν den Ausdruck

$$K_\nu = \frac{(-1)^\nu B}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu} F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ p), \tag{28}$$

in welchem B die Constante

$$B = e^{a_1 i} \overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-2),$$

und p die Differenz $a_2 - a_1$ bedeutet. Nach Substitution dieses Werthes von K_ν nimmt die Gleichung (23) die Form

$$\left\{\begin{aligned} Y &= \overline{\int_{-\infty}^{(x,a_1,a_2)}} e^{ui}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du \\ &= B\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(\lambda-1)_\nu (x-a_1)^\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu} F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1) \end{aligned}\right. \tag{29}$$

an.

In dem Integral Y ist keiner der singulären Punkte a_1, a_2 vor dem anderen bevorzugt, woraus folgt, dass in (29) die Constanten a_1 und a_2, b_1 und b_2 mit einander vertauscht werden können. Daher besteht, wenn man B' die Constante

$$e^{a_2 i} \overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-2)$$

nennt, für Y auch die Gleichung

$$Y = B'\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(\lambda-1)_\nu (x-a_2)^\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu} F(1-b_1;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_1-a_2).$$

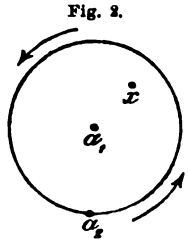
Um ausser Y je eine weitere eindeutige Lösung der Gleichung (15) für die Umgebung des Punktes a_1, bezw. für die Umgebung des Punktes a_2 zu erhalten, wählt man beide Grenzen g, h des Integrals (17) zunächst gleich a_2, dann gleich a_1. Wird als Weg der Variable u eine geschlossene Curve genommen, welche im Punkte a_2 beginnt und endigt und die Punkte x und a_1 umschliesst, so ergiebt sich aus

(17) ein Integral der Differentialgleichung, das in der Umgebung des Punktes a_1 (aber nicht in der des Punktes a_2) eindeutig ist. Dasselbe heisse $y_2^{(1)}$, so dass

$$(30) \qquad y_2^{(1)} = \int_{a_2}^{\overline{(x,a_1)}} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

gesetzt wird. Der Integrationsweg sei, um eine bestimmte Curve zu fixiren, ein durch den Punkt a_2 gehender Kreis, in dessen Innern die Punkte x und a_1 liegen (Fig. 2). Führt die Grösse x innerhalb dieses Kreises einen Umlauf um den Punkt a_1 aus, so bleibt in (30) der Integrationsweg ungeändert, und die zu integrirende Function hat, da alle Punkte u ausserhalb der x-Curve liegen, schliesslich denselben Werth wie am Anfang. Folglich ist $y_2^{(1)}$ eine in der Umgebung des Punktes a_1 eindeutige Function von x. Ferner ist $y_2^{(1)}$ für $x = a_1$ endlich und stetig, da die zu integrirende Function endlich und stetig bleibt, und der Integrationsweg eine endliche Länge hat. Man entwickelt das Integral $y_2^{(1)}$ nach steigenden Potenzen von $x-a_1$, indem man, wie oben, für $(u-x)^{\lambda-1}$ die Reihe

Fig. 2.



$$(u-a_1)^{\lambda-1}\left\{1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_1}{u-a_1}+\cdots+(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{x-a_1}{u-a_1}\right)^\nu+\cdots\right\}$$

einsetzt. Dieselbe ist convergent, weil x zur Umgebung des Punktes a_1 gehören soll, also mod. $(x-a_1) <$ mod. $(u-a_1)$ vorausgesetzt werden darf. Es ergiebt sich hierdurch die Gleichung

$$(31) \qquad y_2^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu \mathfrak{K}_\nu (x-a_1)^\nu,$$

woselbst $\mathfrak{K}_\nu$ das constante Integral

$$\mathfrak{K}_\nu = \int_{a_2}^{\overline{(a_1)}} e^u (u-a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2}(u-a_2)^{b_2-1}\,du$$

ist. Wird letzteres durch die Substitution $u = \mathfrak{u} + a_2$, $\mathfrak{u} = u - a_2$ umgeformt, so durchläuft die Variable $\mathfrak{u}$, der obigen Bestimmung gemäss, vom Nullpunkte aus einen Kreis, welcher den Punkt $a_1 - a_2$, $= -p$, umschliesst, und es entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{K}_\nu = e^{a_2}\int_0^{\overline{(-p)}} e^{\mathfrak{u}}(\mathfrak{u}+p)^{b_1+\lambda-\nu-2}\mathfrak{u}^{b_2-1}\,d\mathfrak{u}.$$

Aber nach der oben erwähnten Abhandlung „Ueber die lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten“ (Gl. (35)) ist

$$\int_0^{\overline{(x)}} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du$$
$$= \overline{E}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x),$$

wo F das Functionszeichen $(26)_1$ und $\overline{E}(r, s)$ das geschlossene Integral

$$\overline{E}(r, s) = \int_0^{\overline{(1)}} u^{r-1}(u-1)^{s-1} du \tag{32}$$

bedeutet. Hieraus folgt für $\mathfrak{R}_\nu$ der Ausdruck

$$\mathfrak{R}_\nu = e^{a_2}(-p)^{b_1+b_2+\lambda-\nu-2} \overline{E}(b_2, b_1+\lambda-\nu-1) F(b_2; b_1+b_2+\lambda-\nu-1; -p).$$

Nun gilt, wenn ν eine positive ganze Zahl ist, für $\overline{E}(r, s-\nu)$ die Formel (cfr. „Zur Theorie der Euler'schen Integrale", (27a))

$$\overline{E}(r, s-\nu) = (-1)^\nu \frac{[r+s-1]_\nu}{[s-1]_\nu} \overline{E}(r, s)$$
$$= (-1)^\nu \frac{(r+s-1)(r+s-2)\ldots(r+s-\nu)}{(s-1)(s-2)\ldots(s-\nu)} \overline{E}(r, s).$$

Indem man dieselbe für $r = b_2$, $s = b_1 + \lambda - 1$ anwendet und $\mathfrak{B}$ die (von ν unabhängige) Constante

$$\mathfrak{B} = e^{a_2}(a_1-a_2)^{b_1+b_2+\lambda-2} \overline{E}(b_2, b_1+\lambda-1)$$

nennt, findet man

$$\mathfrak{R}_\nu = \frac{\mathfrak{B}}{(a_2-a_1)^\nu} \frac{[b_1+b_2+\lambda-2]_\nu}{[b_1+\lambda-2]_\nu} F(b_2; b_1+b_2+\lambda-\nu-1;\ a_1-a_2).$$

Die Reihenentwicklung des Integrals (30) lautet also

$$y_2^{(1)} = \mathfrak{B} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu (\lambda-1)_\nu \frac{[b_1+b_2+\lambda-2]_\nu}{[b_1+\lambda-2]_\nu} \left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^\nu$$
$$\cdot F(b_2; b_1+b_2+\lambda-\nu-1; a_1-a_2).$$

Durch Vertauschung der Punkte a_1 und a_2 erhält man aus (30) das Integral

$$y_1^{(2)} = \int_{a_1}^{\overline{(x, a_2)}} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1} du, \tag{33}$$

das ebenfalls die Differentialgleichung (15) befriedigt und in der Umgebung von a_2 eine eindeutige stetige Function von x ist.

§ 3.

Das in (22) definirte Integral Y stellt, als transcendente ganze Function von x, auch im Gebiet der grossen x ein Hauptintegral der Differentialgleichung (15) dar. Neben Y existiren in dem genannten

Gebiete der x-Ebene, welches kurz als Horizontfläche bezeichnet wird, zwei mehrdeutige Hauptintegrale.

Da die Differentialgleichung (15) keine anderen endlichen singulären Punkte als a_1 und a_2 hat, so sind ihre Hauptintegrale im Gebiet der grossen Werthe von x dadurch charakterisirt, dass sie einen constanten Factor aufnehmen, wenn x die Punkte a_1 und a_2 in einer geschlossenen, sich nicht schneidenden Curve umkreist. Wählt man nun in (17) die vom Punkte a_1 zum Punkte a_2 gezogene Gerade als Integrationsweg, so erhält man das Integral

$$\zeta = \int_{a_1}^{a_2} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du, \tag{34}$$

dessen sämmtliche Elemente den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ aufnehmen, wenn x einen positiven Umlauf um die Verbindungslinie von a_1 und a_2 ausführt. Der genannte Factor tritt, weil alle Punkte u innerhalb der von x beschriebenen Curve liegen, zu der Potenz $(u-x)^{\lambda-1}$ hinzu, während die übrigen Factoren der zu integrirenden Function, sowie der Integrationsweg unverändert bleiben. Demnach ist ζ ein Hauptintegral der Horizontfläche, welches daselbst die gleiche Art von Mehrdeutigkeit zeigt, wie die Potenz x^λ. Der Quotient $\frac{\zeta}{x^{\lambda-1}}$ behält für $x=\infty$ einen endlichen Werth, da aus (34) die Gleichung

$$\frac{\zeta}{x^{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1}\int_{a_1}^{a_2} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\Big(1-\frac{u}{x}\Big)^{\lambda-1}du$$

folgt, auf deren rechter Seite eine stetig bleibende Function zwischen endlichen Grenzen integrirt wird. Um für ζ eine Potenzreihe abzuleiten, construire man um a_1 als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Peripherie durch a_2 geht, und setze voraus, dass der Punkt x ausserhalb dieses Kreises liege. Dann besteht für alle Punkte u der Verbindungslinie von a_1 und a_2 die Ungleichheit mod. $(u-a_1) <$ mod. $(x-a_1)$, so dass die Reihe

$$\begin{aligned}(u-x)^{\lambda-1} &= (-1)^{\lambda-1}(x-a_1)^{\lambda-1}\Big(1-\frac{u-a_1}{x-a_1}\Big)^{\lambda-1}\\ &= (-1)^{\lambda-1}(x-a_1)^{\lambda-1}\Big\{1-(\lambda-1)_1\frac{u-a_1}{x-a_1}+\cdots\\ &\qquad +(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\Big(\frac{u-a_1}{x-a_1}\Big)^\nu+\cdots\Big\}\end{aligned}$$

convergirt. Die Substitution derselben in das Integral (34) führt zu der Gleichung

$$\zeta = (-1)^{\lambda-1}(x-a_1)^{\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}{}'(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu L_\nu (x-a_1)^{-\nu},$$

wo durch L_ν das constante Integral

$$L_\nu = \int_{a_1}^{a_2} e^u (u-a_1)^{b_1+\nu-1}(u-a_2)^{b_2-1}\,du$$

bezeichnet wird. Indem man $u - a_1 = \mathfrak{u}$ setzt und für $a_2 - a_1$ wiederum p schreibt, erhält man für L_ν den Ausdruck

$$L_\nu = e^{a_1}\int_0^p e^{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{u}^{b_1+\nu-1}(\mathfrak{u}-p)^{b_2-1}\,d\mathfrak{u},$$

der, wegen der Gleichung (cfr. Gl. (10) und (11) der Abh. „Ueber d. lin. Differentialgleichung 2ter Ord. mit lin. Coeff." im 36ten Bande dieser Annalen)

$$\int_0^x e^{\mathfrak{u}}\,(\mathfrak{u}-x)^{-\alpha}\,\mathfrak{u}^{\alpha-\varrho}\,d\mathfrak{u}$$
$$= (-1)^{-\alpha}E(\alpha-\varrho+1,\,1-\alpha)x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\,2-\varrho;\,x),$$

mit dem Producte

$$(-1)^{b_2-1}e^{a_1}p^{b_1+b_2+\nu-1}E(b_1+\nu,\,b_2)\,F(b_1+\nu;\,b_1+b_2+\nu;\,p)$$

identisch ist. Wird $[s]_\nu^+$ für ein beliebiges s und für ein positives ganzzahliges ν als der Werth

$$[s]_\nu^+ = s(s+1)\cdots(s+\nu-1), \quad [s]_0^+ = 1, \tag{35}$$

definirt, so ist nach (20)

$$E(b_1+\nu,\,b_2) = \frac{[b_1]_\nu^+}{[b_1+b_2]_\nu^+}E(b_1,\,b_2).$$

Also hat man

$$L_\nu = (-1)^{1-\lambda}\,\mathfrak{C}(a_2-a_1)^\nu\,\frac{[b_1]_\nu^+}{[b_1+b_2]_\nu^+}\,F(b_1+\nu;\,b_1+b_2+\nu;\,a_2-a_1),$$

wo $\mathfrak{C}$ die Constante

$$\mathfrak{C} = (-1)^{\lambda+b_2}e^{a_1}\,(a_2-a_1)^{b_1+b_2-1}\,E(b_1,\,b_2)$$

bedeutet. Für das Integral ξ ergiebt sich auf diese Weise die Reihenentwickelung

$$\begin{cases} \xi = \int_{a_1}^{a_2} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du \\ = \mathfrak{C}(x-a_1)^{\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu\,\frac{(\lambda-1)_\nu[b_1]_\nu^+}{[b_1+b_2]_\nu^+}\left(\frac{a_2-a_1}{x-a_1}\right)^\nu \\ \qquad\qquad \cdot F(b_1+\nu;\,b_1+b_2+\nu;\,a_2-a_1). \end{cases} \tag{36}$$

Das dritte Hauptintegral der Horizontfläche wird durch den Ausdruck

$$\omega = \int_x^{(a_1,\,a_2)} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du \tag{37}$$

dargestellt. Dieses Integral ω, dessen Integrationsweg aus einem

(bei x beginnenden und endigenden) Umlaufe um die Verbindungslinie der Punkte a_1 und a_2 besteht, nimmt den Factor

$$e^{2\pi i(b_1+b_2+\lambda)}$$

auf, wenn die Variable x die genannte Verbindungslinie im positiven Sinne umkreist (cfr. § 1 des vorstehenden Aufsatzes „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve"). Der Quotient $\frac{\omega}{x^{b_1+b_2+\lambda}}$ ist also ausserhalb einer die Punkte a_1 und a_2 umschliessenden Curve eine eindeutige Function von x. Dem vollständigen Integral der Differentialgleichung (15) wird man hiernach im Gebiete der grossen Werthe von x die Form

$$y = C_1\zeta + C_2 Y + C_3\omega$$

geben, wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Constante sind.

Nach einem von Herrn Fuchs bewiesenen Satze*) sind die Summe der zu den Hauptintegralen gehörigen Potenzexponenten, genommen in Bezug auf alle endlichen singulären Punkte, und die Summe der betreffenden Exponenten für das Gebiet der grossen x gleich zwei Werthen, die sich nur um eine ganze Zahl von einander unterscheiden. Wendet man diesen Satz auf die Differentialgleichung (15) an, so ergiebt sich, da $0, 1, b_1 + \lambda - 1$, bezw. $0, 1, b_2 + \lambda - 1$ die Anfangsexponenten der Reihen in der Umgebung des Punktes a_1, bezw. a_2 sind, für die erstere Summe der Ausdruck $b_1 + b_2 + 2\lambda$. In der Horizontfläche sind die zu Y, ζ, ω gehörigen Exponenten gleich $0, \lambda - 1, b_1 + b_2 + \lambda$, ihre Summe gleich $b_1 + b_2 + 2\lambda - 1$, so dass die hier ermittelten Werthe in der That dem obigen Satze entsprechen.

Versucht man, die Differentialgleichung (15) durch eine Reihe von der Form

$$(38) \quad y = c_0(x-a_1)^\varkappa + c_1(x-a_1)^{\varkappa-1} + c_2(x-a_1)^{\varkappa-2} + \cdots$$

zu integriren, so findet man für den Anfangsexponenten $\varkappa$ die quadratische Gleichung

$$[\varkappa - (\lambda-1)]\,[\varkappa - (\lambda-2)] = 0.$$

Wird $\varkappa = \lambda - 1$ gesetzt, so bleibt von den Coefficienten ausser c_0 auch c_1 willkürlich. Die Reihe (38) ist im Allgemeinen divergent. Ueber die ihr zukommende Bedeutung geben aber die vorstehenden Rechnungen einen gewissen Aufschluss. Die Reihe (38) enthält als speciellen Fall die in (36) angeführte Reihe, die mit dem Integral ζ identisch ist, und zwar geht sie in letztere über, wenn für $\varkappa$ und $\frac{c_1}{c_0}$ die Werthe $\varkappa = \lambda - 1$ und

$$\frac{c_1}{c_0} = (1-\lambda)\frac{L_1}{L_0} = \frac{(1-\lambda)b_1}{(b_1+b_2)}(a_2-a_1)\,\frac{F(b_1+1;\ b_1+b_2+1;\ a_2-a_1)}{F(b_1;\ b_1+b_2;\ a_2-a_1)}$$

*) Cfr. Crelle's Journal Bd. 66, pag. 142.

gewählt werden. In diesem Falle convergirt also die Reihe (38). In allen übrigen Fällen ist sie divergent. Denn die Ausdrücke ξ, Y, ω stellen das vollständige System der Hauptintegrale für den Bezirk der grossen Werthe von x dar; ausser ξ ist kein particuläres Integral der Differentialgleichung (15) vorhanden, das, wenn x die Verbindungslinie von a_1 und a_2 umkreist, den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ aufnähme. Hieraus geht hervor, dass die erwähnte Gleichung für den Exponenten $\varkappa$, obwohl sie quadratisch ist, doch nur zu einem der particulären Integrale der Gleichung (15) in Beziehung steht, nämlich zu dem Integral ξ, dessen Unstetigkeit bei $x = \infty$ durch Division mit der Potenz $x^{\lambda-1}$ beseitigt werden kann. Der Umstand, dass für $\varkappa = \lambda - 1$ der Quotient $\frac{c_1}{c_0}$ bei der obigen formellen Lösung der Differentialgleichung beliebig bleibt, gestattet, den irrationalen Werth $(1-\lambda)\frac{L_1}{L_0}$ für $\frac{c_1}{c_0}$ einzuführen, wodurch jene allein convergente Reihe aus (38) erhalten wird. Damit aber c_1 willkürlich neben c_0 sei (also auch der Fall $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ möglich werde), muss formell der Werth $\varkappa = \lambda - 2$ ausser dem Werthe $\varkappa = \lambda - 1$ zulässig, mithin die Gleichung für $\varkappa$ quadratisch sein. Je drei Grössen L_ν, $L_{\nu+1}$, $L_{\nu+2}$ stehen, wie sich leicht zeigen lässt, zu einander in der Beziehung

$$(a_1-a_2)(b_1+\nu)L_\nu + (a_1-a_2+b_1+b_2+\nu)L_{\nu+1} + L_{\nu+2} = 0.$$

Definirt man Λ_ν als das Product

$$\Lambda_\nu = (-1)^{\lambda-1+\nu}(\lambda-1)_\nu L_\nu,$$

so dass die Reihe für ξ

$$\xi = (x-a_1)^{\lambda-1}\left\{\Lambda_0 + \frac{\Lambda_1}{x-a_1} + \frac{\Lambda_2}{(x-a_1)^2} + \cdots\right\}$$

lautet, so geht die obige Gleichung zwischen L_ν, $L_{\nu+1}$, $L_{\nu+2}$ in die Relation

$$\left.\begin{aligned}&(a_1-a_2)(b_1+\nu)(\lambda-\nu-1)(\lambda-\nu-2)\Lambda_\nu\\ &-(a_1-a_2+b_1+b_2+\nu)(\nu+1)(\lambda-\nu-2)\Lambda_{\nu+1}+(\nu+1)(\nu+2)\Lambda_{\nu+2}\end{aligned}\right\} = 0$$

über. Letztere ist mit derjenigen Relation identisch, welche bei der Integration der Differentialgleichung (15) durch die Reihe (38) die Coefficienten c_ν, $c_{\nu+1}$, $c_{\nu+2}$ mit einander verbindet.

Es ist bisher vorausgesetzt worden, dass die reellen Bestandtheile der Constanten b_1, b_2, $\lambda - 3$ positiv seien. Die auf λ bezügliche Beschränkung kann nun dahin abgeändert werden, dass der reelle Theil von λ selbst als positiv vorausgesetzt wird. Denn da die Reihen, in welche die bestimmten Integrale entwickelt worden sind, der Differentialgleichung (15) für beliebige Werthe der Constanten b_1, b_2 und λ genügen, so brauchen letztere nur diejenigen Bedingungen zu erfüllen, von denen die Convergenz der bestimmten Integrale abhängt. Die hier

betrachteten Integrale haben aber, sobald b_1, b_2, λ im reellen Theil positiv sind, sämmtlich einen bestimmten Sinn. Auf den Fall, wo die reellen Theile von b_ν, λ negativ sind, wird in § 6 näher eingegangen.

§ 4.

Da das Integral Y mit der in (29) angegebenen Reihe identisch ist, so kann man die Eigenschaften desselben durch Betrachtung jener Reihe ableiten. Es soll nun der Satz, dass Y eine transcendente ganze Function von x ist, auch in der Art bewiesen werden, dass man zeigt, dass die Reihe (29) für jeden endlichen Werth von x convergirt.

In der Reihe

$$F(\alpha;\ \varrho;\ z) = 1 + \frac{\alpha}{1.\varrho} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)} z^2 + \cdots + \text{inf.}$$

sei $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$, wo ϱ_1 und ϱ_2 reelle Werthe bedeuten; ferner werde mod. α kurz durch α', und mod. z durch z' bezeichnet. Ist ϱ_1 positiv und grösser als α', so besteht, wie sich aus der folgenden einfachen Rechnung ergiebt, die Ungleichheit

$$\text{mod. } F(\alpha;\ \varrho;\ z) < e^{z'}. \tag{39}$$

Da für reelle positive Werthe der Grösse ϱ_1 und einer sonst beliebigen Grösse σ

$$\text{mod. } (\alpha+\sigma) \leqq \alpha' + \sigma,$$

$$\text{mod. } (\varrho+\sigma) = \text{mod. } (\varrho_1+\sigma+i\varrho_2) \geqq \varrho_1 + \sigma,$$

$$\text{mod. } \frac{\alpha+\sigma}{\varrho+\sigma} \leqq \frac{\alpha'+\sigma}{\varrho_1+\sigma}$$

ist, so folgt aus der Voraussetzung $\varrho_1 > \alpha'$ die Ungleichheit

$$\text{mod. } \frac{\alpha+\sigma}{\varrho+\sigma} < 1,$$

die auch für $\sigma = 0$ gilt. Man findet also, indem man durch k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet und der Grösse σ nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots, k-1$ giebt, die Ungleichheiten

$$\text{mod. } \left(\frac{\alpha}{\varrho}\ \frac{\alpha+1}{\varrho+1}\ \frac{\alpha+2}{\varrho+2} \cdots \frac{\alpha+k-1}{\varrho+k-1}\right) < 1,$$

$$\text{mod. } \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+k-1)}\ \frac{z^k}{1.2\ldots k}\right) < \frac{z'^k}{1.2\ldots k}.$$

Aber der Modul einer Reihe ist höchstens gleich der Summe der Moduln der einzelnen Terme. Daher ergiebt sich

$$\text{mod. } F(\alpha;\ \varrho;\ z) < 1 + \frac{z'}{1} + \frac{z'^2}{1.2} + \cdots + \frac{z'^k}{1.2\ldots k} + \cdots + \text{inf.},$$

d. h.

$$\text{mod. } F(\alpha;\ \varrho;\ z) < e^{z'}.$$

Diese Ungleichheit wird auf die in der Reihe (29) vorkommenden Ausdrücke

$$F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1)$$

angewendet. Dass man $b_1+b_2+\lambda$ als einen nicht ganzzahligen Werth voraussetzt, wurde bereits in § 1 erwähnt. Wird mod. (a_2-a_1) durch $\mathfrak{p}$ bezeichnet, so besteht nach (39) die Ungleichheit

$$\text{(40)} \qquad \text{mod. } F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1) < e^{\mathfrak{p}},$$

sobald der reelle Theil der Zahl $\nu-b_1-b_2-\lambda+3$ grösser als mod. $(1-b_2)$ ist. Der Modul der Constante $b_1+b_2+\lambda-2$ möge β heissen; dann übersteigt der reelle Theil von $\nu-b_1-b_2-\lambda+3$ die Zahl $\nu-\beta$, da er mindestens den Werth $\nu-\beta+1$ hat. Wählt man also irgend eine bestimmte positive ganze Zahl m, welche der Ungleichheit

$$m-\beta > \text{mod. } (1-b_2)$$

genügt, so ist um so mehr der reelle Theil von $m-b_1-b_2-\lambda+3$ grösser als mod. $(1-b_2)$. Folglich gilt bei dieser Definition von m die Ungleichheit (40) für alle Werthe ν, die $\geqq m$ sind.

Durch R_m soll nun die Summe aller derjenigen Terme der Reihe (29) bezeichnet werden, welche eine höhere Potenz von $x-a_1$ als die $(m-1)^{\text{te}}$ enthalten. Man setzt also (unter Anwendung der Bezeichnung (27))

$$R_m = B\sum_{\nu=m}^{\nu=\infty} \frac{(\lambda-1)_\nu\,(x-a_1)^\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}\, F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1).$$

Es ist aber (wenn $\nu \geqq m$), da $(\lambda-1)_\nu$ den Binomialcoefficienten bedeutet,

$$\frac{(\lambda-1)_\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu} = \frac{1}{1\cdot 2\ldots\nu}\,\frac{[\lambda-1]_\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\ldots\nu}\,\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m)}{(b_1+b_2+\lambda-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-m-2)}$$

$$\cdot\,\frac{(\lambda-m-1)(\lambda-m-2)\ldots(\lambda-\nu)}{(b_1+b_2+\lambda-m-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-\nu-2)},$$

so dass in R_m der Factor

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m)}{(b_1+b_2+\lambda-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-m-2)}$$

vor das Summenzeichen tritt. Das Product aus dem letztgenannten Factor und der Constante B heisse B_1. Ferner werde in dem Quotienten

$$\frac{(\lambda-m-1)(\lambda-m-2)\ldots(\lambda-\nu)}{(b_1+b_2+\lambda-m-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-\nu-2)}$$

das Vorzeichen aller in den Klammern stehenden Grössen geändert, wodurch derselbe die Form

$$\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\lambda-1)\dots(m-\lambda+1)}{(\nu-b_1-b_2-\lambda+2)(\nu-b_1-b_2-\lambda+1)\dots(m-b_1-b_2-\lambda+3)} = \frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}}$$

annimmt, während sein Werth sich nicht ändert. Auf diese Weise entsteht für R_m die Gleichung

$$R_m = B_1 \sum_{\nu=m}^{\nu=\infty} \frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}} \frac{(x-a_1)^\nu}{1.2\dots\nu} \cdot F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1).$$

Man nennt zur Abkürzung s_ν die Grösse

$$s_\nu = \text{mod.} \left\{ \frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}} \frac{(x-a_1)^\nu}{1.2\dots\nu} \cdot F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1) \right\}$$

und S die Summe

$$S = s_m + s_{m+1} + s_{m+2} + \dots + \text{inf.}.$$

Der Beweis, dass die Reihe (29) convergirt, ist erbracht, sobald man zeigt, das S einen endlichen Werth hat.

Es sei λ' der Modul von λ, und $\varkappa$ irgend eine reelle positive Zahl, die den Werth β, d. h. mod. $(b_1+b_2+\lambda-2)$, übersteigt. Dann ist

$$\text{mod.}(\varkappa-\lambda) \leqq \varkappa+\lambda', \quad \text{mod.}(\varkappa-[b_1+b_2+\lambda-2]) \geqq \varkappa-\beta,$$

woraus, wenn $\varkappa$ successiv gleich ν, $\nu-1, \dots, m+1$ gesetzt wird (die Zahl m ist nach ihrer Definition grösser als β), die Ungleichheiten

$$\text{mod.}[(\nu-\lambda)(\nu-\lambda-1)\dots(m-\lambda+1)] \leqq (\nu+\lambda')(\nu+\lambda'-1)\dots(m+\lambda'+1),$$

$$\text{mod.}[(\nu-b_1-b_2-\lambda+2)(\nu-b_1-b_2-\lambda+1)\dots(m-b_1-b_2-\lambda+3)] \geqq (\nu-\beta)(\nu-\beta-1)\dots(m-\beta+1)$$

folgen. Indem man dieselben durch einander dividirt, findet man

$$\text{mod.} \frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}} \leqq \frac{\nu+\lambda'}{\nu-\beta} \frac{\nu+\lambda'-1}{\nu-\beta-1} \dots \frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}.$$

Aber von den Brüchen

$$\frac{\nu+\lambda'}{\nu-\beta}, \quad \frac{\nu+\lambda'-1}{\nu-\beta-1}, \dots, \frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$$

ist $\frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$ der grösste. Denn werden durch $\sigma-\beta$ und $\tau-\beta$ zwei reelle positive Zahlen bezeichnet, so ist im Fall $\sigma > \tau$

$$1 + \frac{\beta+\lambda'}{\sigma-\beta} < 1 + \frac{\beta+\lambda'}{\tau-\beta},$$

d. h.

$$\frac{\sigma+\lambda'}{\sigma-\beta} < \frac{\tau+\lambda'}{\tau-\beta}.$$

Man verstärkt demnach die obige Ungleichheit, indem man für jeden der $\nu - m$ Brüche den Werth $\frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$ einführt. Hierdurch ergiebt sich

$$\text{mod.}\ \frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}} < \Theta^{\nu-m},$$

wo Θ die (positive reelle) Constante

$$\Theta = \frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$$

bedeutet. Nach Berücksichtigung dieser und der in (40) angegebenen Ungleichheit erhält man, wenn mod. $(x - a_1) = \xi$ gesetzt wird, die Beziehung

$$s_\nu < e^{\mathfrak{p}}\,\Theta^{\nu-m}\,\frac{\xi^\nu}{1.2\ldots\nu},$$

woraus

$$S < e^{\mathfrak{p}}\xi^m\left\{\frac{1}{1.2\ldots m} + \frac{\Theta\xi}{1.2\ldots(m+1)} + \frac{\Theta^2\xi^2}{1.2\ldots(m+2)} + \cdots\right\}$$

folgt. Es ist um so mehr

$$S < e^{\mathfrak{p}}\xi^m\left\{1 + \frac{\Theta\xi}{1} + \frac{\Theta^2\xi^2}{1.2} + \frac{\Theta^3\xi^3}{1.2.3} + \cdots\right\},$$

d. h.

$$S < e^{\mathfrak{p}+\Theta\xi}\xi^m.$$

Da nun $\mathfrak{p}$, m, Θ bestimmte endliche Constanten bezeichnen, so ist S ein endlicher Werth, sobald der Punkt x im Endlichen liegt. Mithin ist die Reihe (29) für jedes endliche Argument x unbedingt convergent.

§ 5.

Analoge Resultate wie für die Differentialgleichung (15) findet man für die in (2) genannte Tissot'sche Gleichung n^{ter} Ordnung. Die verschiedenen particulären Integrale derselben entsprechen in ihrer Form den in §§ 2 und 3 behandelten Functionen.

Die Differentialgleichung (2) besitzt, wie die Gleichung (15), ein particuläres Integral Y, das eine transcendente ganze Function von x ist. Dasselbe wird durch den Ausdruck

$$Y = \int_{-\infty}^{(x, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})} \Phi(u, x)\,du \tag{41}$$

angegeben, in welchem $\Phi(u, x)$ die Function (14) bedeutet. Man setzt voraus, dass von den verschiedenen Zweigen der Function $\Phi(u, x)$ in (41) ein bestimmter gewählt worden ist. Der Integrationsweg von Y ist aus Fig. 1 ersichtlich, wenn nur der dort gezeichnete Kreis so gross genommen wird, dass er alle singulären Punkte $a_1, \ldots, a_{n-1}$ umschliesst. Dass das Integral (41) in der Umgebung eines beliebigen

singulären Punktes a_k eine eindeutige Function von x ist, folgt aus dem Umstand, dass es unverändert bleibt, wenn x einen Umlauf um a_k ausführt. Ausserdem ist, wie man leicht beweist, der Werth des Integrals ein endlicher, sobald x endlich ist. Es darf ferner in (41), da mod. $(u-a_1) >$ mod. $(x-a_1)$ ist (wenn man den erwähnten Kreis gross genug wählt), für $(u-x)^{\lambda-1}$ die convergente Reihe

$$(u-a_1)^{\lambda-1}\left[1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_1}{u-a_1}+\cdots+(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{x-a_1}{u-a_1}\right)^\nu+\cdots\right]$$

substituirt werden. Hierdurch erhält man die Gleichung

$$Y=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu P_\nu(x-a_1)^\nu, \tag{42}$$

in welcher P_ν den Werth

$$P_\nu=\int_{-\infty}^{(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})} e^u(u-a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}du$$

hat. Der Integrationsweg von P_ν stimmt mit dem von Y überein, ist also (da x in P_ν nicht vorkommt) als ein einfacher Umlauf um die Punktengruppe $a_1, \ldots, a_{n-1}$ zu bezeichnen. Sieht man einen der Parameter $a_1, \ldots, a_{n-1}$, z. B. a_1, als unabhängige Variable an, so ist P_ν selbst ein zu Y analoges particuläres Integral einer Tissot'schen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. So wird für $n=4$ die Grösse P_ν mit dem Integral (22) identisch, falls in diesem die Werthe x, λ durch $a_1, b_1+\lambda-\nu-1$, und die Werthe a_1, a_2, b_1, b_2 durch a_2, a_3, b_2, b_3 ersetzt werden.

In dem Bezirke eines beliebigen singulären Punktes a_k wird das einzige daselbst vorhandene mehrdeutige Hauptintegral durch den Ausdruck

$$\eta_k=\int_{a_k}^{x}\Phi(u,x)\,du \tag{43}$$

dargestellt, in welchem $\Phi(u,x)$ wiederum die Function (14) bezeichnet. Substituirt man hierin

$$u-a_k=\mathfrak{u}(x-a_k)$$

und nennt H die Function

$$H=e^{\mathfrak{u}(x-a_k)}\left(1-\mathfrak{u}\frac{x-a_k}{a_1-a_k}\right)^{b_1-1}\cdots$$

$$\cdots\left(1-\mathfrak{u}\frac{x-a_k}{a_{k-1}-a_k}\right)^{b_{k-1}-1}\left(1-\mathfrak{u}\frac{x-a_k}{a_{k+1}-a_k}\right)^{b_{k+1}-1}\cdots$$

$$\cdots\left(1-\mathfrak{u}\frac{x-a_k}{a_{n-1}-a_k}\right)^{b_{n-1}-1},$$

so entsteht die Gleichung

$$\eta_k = \text{Const.}\,(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}\int_0^1 u^{b_k-1}(1-u)^{\lambda-1}\,H\,du.$$

Die Coefficienten der Entwickelung der Function H nach steigenden Potenzen von $u(x-a_k)$ mögen $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ heissen, so dass

$$H = \delta_0 + \delta_1 u(x-a_k) + \delta_2 u^2(x-a_k)^2 + \cdots + \delta_\nu u^\nu (x-a_k)^\nu + \cdots$$

gesetzt wird. Dann findet man für η_k, nach Benutzung der Formel (20), die zu (21) analoge Gleichung

$$(44)\quad \eta_k = A(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\delta_\nu\,\frac{b_k(b_k+1)\cdots(b_k+\nu-1)}{(b_k+\lambda)\cdots(b_k+\lambda+\nu-1)}\,(x-a_k)^\nu,$$

in der A die Constante

$$(-1)^{\lambda-1}\,e^{a_k}\,E(b_k,\lambda)\,(a_k-a_1)^{b_1-1}\,(a_k-a_2)^{b_2-1}\ldots$$

bedeutet.

Es werde ferner von einem singulären Punkte a_l aus, der verschieden von a_k, aber sonst beliebig ist, eine geschlossene, sich nicht schneidende Curve gezogen, welche den Punkt x und den Punkt a_k, jedoch keinen der übrigen singulären Punkte umschliesst. Das längs dieser Curve genommene Integral

$$(45)\qquad y_l^{(k)} = \int_{a_l}^{(x,a_k)} \Phi(u,x)\,du,$$

welches analog zum Integral (30) gebildet ist und (nach § 1) der Differentialgleichung (2) genügt, ist eine eindeutige stetige Function von x in der Umgebung des Punktes $x = a_k$. Denn es bleibt unverändert, wenn die Variable x innerhalb der genannten Curve den Punkt a_k umkreist, und der Werth desselben ist ein endlicher, da nach (11) der reelle Theil von b_l positiv ist. Man entwickelt das Integral $y_l^{(k)}$ nach steigenden Potenzen von $x-a_k$, indem man für $(u-x)^{\lambda-1}$ die Reihe

$$(u-a_k)^{\lambda-1}\left[1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_k}{u-a_k}+\cdots+(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{x-a_k}{u-a_k}\right)^\nu+\cdots\right]$$

einführt. Dann ergiebt sich

$$(46)\qquad y_l^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x-a_k)^\nu,$$

wo zur Abkürzung

$$\mathfrak{P}_\nu = \int_{a_l}^{(a_k)} e^u(u-a_k)^{b_k+\lambda-\nu-2}\,U_k\,du,$$

$$U_k = (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_{k-1})^{b_{k-1}-1}\,(u-a_{k+1})^{b_{k+1}-1}\ldots$$
$$\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}$$

gesetzt wird. Der Integrationsweg von $\mathfrak{P}_\nu$ ist mit dem von $y_i^{(k)}$ identisch. Auch die Grösse $\mathfrak{P}_\nu$ stellt, wie P_ν, ein particuläres Integral einer Tissot'schen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, wenn einer der Parameter $a_1, \ldots, a_{n-1}$ als unabhängige Variable aufgefasst wird. Denn die zu integrirende Function in $\mathfrak{P}_\nu$ hat die Form (14), und der Integrationsweg entspricht der in (10) angegebenen Bedingung.

Durch Anwendung der particulären Lösungen (41), (43) und (45), welche in der Umgebung des Punktes a_k den Charakter von Hauptintegralen haben, erhält man als vollständiges Integral der Differentialgleichung (2) die Summe

$$C_1\eta_k + C_2 y_1^{(k)} + C_3 y_2^{(k)} + \cdots + C_k y_{k-1}^{(k)} + C_{k+1} y_{k+1}^{(k)} + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}^{(k)} + C_n Y,$$

in der $C_1, C_2, \ldots, C_n$ willkürliche Constante bedeuten.

Im Bezirk der grossen Werthe von x existiren $n-2$ von einander unabhängige particuläre Integrale der Gleichung (2), welche die Eigenschaft haben, nach Division durch $x^{\lambda-1}$ eine im genannten Gebiet eindeutige und stetige Function von x zu liefern. Durchläuft x (im positiven Sinne) eine sich nicht schneidende Curve, welche alle singulären Punkte $a_1, \ldots, a_{n-1}$ umschliesst, so nimmt in dem Integral

$$\xi_{k,l} = \int_{a_k}^{a_l} \Phi(u, x)\, du, \tag{47}$$

dessen Integrationsweg innerhalb jener Curve liegen soll, jedes einzelne Element den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ auf. Der Quotient $\frac{\xi_{k,l}}{x^{\lambda-1}}$ ist daher in der Horizontfläche eine eindeutige Function von x. Die Gleichung

$$\frac{\xi_{k,l}}{x^{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1} \int_{a_k}^{a_l} e^u (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1} \left(1-\frac{u}{x}\right)^{\lambda-1} du$$

zeigt ausserdem, dass dieser Quotient in den unendlich entfernten Theilen der x-Ebene einen endlichen Werth behält. Bei der Entwickelung von $\xi_{k,l}$ in eine Potenzreihe, die für grosse Werthe von x convergirt, soll, in Analogie zu (36), die Differenz $x - a_k$ als Potenzbasis gewählt werden. Man setzt

$$(u-x)^{\lambda-1} = (-1)^{\lambda-1} (x-a_k)^{\lambda-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu (\lambda-1)_\nu \left(\frac{u-a_k}{x-a_k}\right)^\nu$$

und erhält hierdurch die Gleichung

$$\xi_{k,l} = (-1)^{\lambda-1} (x-a_k)^{\lambda-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu (\lambda-1)_\nu\, Q_\nu (x-a_k)^{-\nu}, \tag{48}$$

in der Q_ν das constante Integral

$$Q_\nu = \int_{a_k}^{a_l} e^u (u-a_k)^{b_k+\nu-1} U_k\, du,$$

und U_k (wie oben) das Product

$$(u - a_1)^{b_1-1}(u - a_2)^{b_2-1} \ldots (u - a_{k-1})^{b_{k-1}-1}(u - a_{k+1})^{b_{k+1}-1} \ldots$$
$$\ldots (u - a_{n-1})^{b_{n-1}-1}$$

bezeichnet. Die Grösse Q_ν hat wiederum die Form eines particulären Integrals einer Tissot'schen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man bemerke, dass die Integrale $\zeta_{l,m}$, wenn l und m von k verschieden sind, in der Umgebung des Punktes a_k eindeutige und stetige Functionen von x darstellen und daher auch an Stelle der in (45) angegebenen Integrale $y_l^{(k)}$ angewendet werden können.

Das in (41) definirte Integral Y ist im Gebiete der grossen Werthe von x das einzige eindeutige Integral der Differentialgleichung (2). Als mehrdeutiges Hauptintegral im genannten Gebiete findet man ferner den Ausdruck

$$\omega = \int_x^{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})} \Phi(u, x)\, du, \tag{49}$$

in welchem die Variable u vom Punkte x aus einen positiven Umlauf um die $n-1$ Punkte $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ausführt. Denn ω genügt der Differentialgleichung (2) und nimmt (nach § 1 des vorstehenden Aufsatzes „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve") den Factor

$$e^{2\pi i(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+\lambda)}$$

auf, wenn x die Punktengruppe $a_1, \ldots, a_{n-1}$ in positiver Drehungsrichtung umkreist.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich, dass die Functionen

$$\zeta_{1,2},\ \zeta_{2,3},\ \ldots,\ \zeta_{n-2,n-1},\ Y,\ \omega \tag{50}$$

n von einander unabhängige particuläre Lösungen von (2) sind, die in der Horizontfläche den Charakter von Hauptintegralen haben. Die Summe

$$C_1\zeta_{1,2} + C_2\zeta_{2,3} + \cdots + C_{n-2}\zeta_{n-2,n-1} + C_{n-1}Y + C_n\omega,$$

in der $C_1, \ldots, C_n$ willkürliche Constanten bezeichnen, stellt demnach eine für das Gebiet der grossen Werthe von x geeignete Form des allgemeinen Integrals der Gleichung (2) dar.

§ 6.

Die in § 5 als particuläre Lösungen der Gleichung (2) ermittelten bestimmten Integrale sind sämmtlich convergent, wenn die reellen Bestandtheile der Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \lambda$ das positive Vorzeichen haben. Ist aber der reelle Theil einer Constante b_ν, resp. der Constante λ negativ oder gleich Null, so werden diejenigen Integrale

divergent, in denen a_ν, resp. x als Grenze vorkommt. Der kürzeren Bezeichnung halber wird, wie in (11), festgesetzt, dass, wenn die Constanten b_ν, λ nicht reell sind, die Ungleichheiten $b_\nu > 0$, $b_\nu < 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ sich auf die reellen Bestandtheile derselben beziehen sollen.

An Stelle des Integrals (43)

$$\eta_k = \int_{a_k}^{x} \Phi(u, x)\, du$$

kann, wenn $b_k > 0$, aber $\lambda < 0$ ist, der Ausdruck

$$\int_{a_k}^{\overline{(x)}} \Phi(u, x)\, du, \tag{51}$$

und wenn $\lambda > 0$, $b_k < 0$ ist, der Ausdruck

$$\int_{x}^{\overline{(a_k)}} \Phi(u, x)\, du \tag{52}$$

angewendet werden. Die Integrationswege von (51) und (52) bestehen aus einem einmaligen Umlauf um den Punkt x, bezw. um den Punkt a_k. Der Bedingung (10) geschieht Genüge, da bei dem ersteren Integral $g = h = a_k$, bei dem letzteren $g = h = x$ gesetzt wird. Ist weder b_k noch λ im reellen Theil positiv, so möge statt η_k das Integral

$$\int_{c}^{\overline{(x,\, a_k,\, x-,\, a_k-)}} \Phi(u, x)\, du \tag{53}$$

genommen werden, dessen untere Grenze ein beliebiger (nicht singulärer) Punkt c ist, und dessen Integrationsweg aus je einem positiven und je einem negativen Umlauf um den Punkt x und um den Punkt a_k, und zwar in der in (53) angedeuteten Reihenfolge, besteht. Der Bedingung (10) geschieht durch diesen Integrationsweg Genüge. Die Integrale (51), (52) und (53) lassen sich nach steigenden Potenzen von $x - a_k$ in Reihen entwickeln, welche sich von der Entwickelung (44) des Integrals η_k nur durch diejenigen Constanten unterscheiden, welche als Factoren vor die ganze Reihe treten. Während in (44) die Constante A das Euler'sche Integral $E(b_k, \lambda)$ als Factor enthält, kommen bei den aus den Integralen (51), (52), (53) entstehenden Reihen die constanten Integrale $\overline{E}(b_k, \lambda)$, $\overline{E}(\lambda, b_k)$, $\mathfrak{E}(b_k, \lambda)$ als Multiplicatoren vor*).

In analoger Weise ersetzt man das in (47) bezeichnete Integral $\zeta_{k,l}$ durch ein Integral, dessen Integrationsweg eine einfache geschlossene

*) Cfr. die Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" im 35ten Bande dieser Annalen, §§ 1—2.

Curve, resp. ein Doppelumlauf ist, sobald die reellen Bestandtheile der Constanten b_k, b_l negativ oder gleich Null werden.

Das Integral Y behält, gemäss seiner Definition in (41), für beliebige Werthe der Constanten einen bestimmten Sinn. Dagegen werden die Integrale $y_i^{(k)}$ und ω, bei denen, nach (45) und (49), die Variable u eine im Punkte a_l, resp. x, beginnende einfache geschlossene Curve durchläuft, für $b_l < 0$, resp. für $\lambda < 0$ divergent. Man wendet nun an Stelle von (45) im Fall $b_l < 0$ das Integral

$$\int_c^{\overline{(\mathfrak{R},\, a_l,\, \mathfrak{R}-,\, a_l-)}} \Phi(u, x)\, du \tag{54}$$

und an Stelle von ω im Fall $\lambda < 0$ das Integral*)

$$\int_c^{\overline{(\mathfrak{A},\, x,\, \mathfrak{A}-,\, x-)}} \Phi(u, x)\, du \tag{55}$$

an, woselbst $\mathfrak{R}$ die Verbindungslinie der Punkte x und a_k, und $\mathfrak{A}$ eine die $n-1$ Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ verbindende gebrochene Linie bedeuten möge. Die Integrale (54) und (55), bei denen x als ein endlicher, von $a_1, \ldots, a_{n-1}$ verschiedener Werth vorausgesetzt wird, sind ohne jede weitere Einschränkung convergent. Als untere Grenze c derselben kann ein beliebiger, nicht singulärer Werth gewählt werden.**)

---

*) Cfr. § 2 der vorstehenden Abh. „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve."

**) Herr C. Jordan veröffentlicht in dem (bereits auf pag. 501 dieses Bandes erwähnten) Band III seines Cours d'Analyse (Paris 1887), § 192 u. f., werthvolle Entwickelungen, welche in mancher Beziehung den in dieser Abhandlung angestellten Untersuchungen parallel laufen, jedoch auf allgemeineren Voraussetzungen beruhen. Herr C. Jordan behandelt in § 192 eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von derjenigen Form, die bei der verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung (Crelle's Journ. Bd. 71, pag. 336) vorliegt, und auf die man die Tissot'sche Differentialgleichung bringen kann (cfr. der obige § 1); er beschränkt aber die Betrachtung nicht auf den Fall, wo der Coefficient $\varphi(x)$ der höchsten Ableitung $\frac{d^n y}{dx^n}$ (in der Bezeichnung des § 1) eine ganze Function n^{ten} Grades (wie bei der hypergeometrischen Differentialgleichung) oder eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (wie bei der Tissot'schen Differentialgleichung) ist, sondern lässt auch niedrigere Grade dieser Function zu. Ist $\varphi(x)$ eine ganze Function $(n-s)^{\text{ten}}$, und $\psi(x)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x, so wird die in § 1 dieses Aufsatzes angegebene Differentialgleichung (2) durch s transcendente ganze Functionen von x, die wesentlich von einander verschieden sind, befriedigt. Man schreibt dieselben als bestimmte Integrale, indem man als untere und als obere Integralgrenze Punkte des unendlichen Horizonts, bei welchem s Abschnitte zu unterscheiden sind, wählt (§ 195 des Bandes III). Das Ziel der obigen Abhandlung lag, wie ich bereits in der Einleitung erwähnt

§ 7.

Zum Schluss sollen die Rechnungen der §§ 5 und 6 noch in der Weise ergänzt werden, dass man in der x-Ebene ein beliebiges ringförmiges Flächenstück, auf dem keine singulären Punkte liegen, betrachtet und die zugehörigen Hauptintegrale der Differentialgleichung (2) aufstellt.

Ist eine homogene lineare Differentialgleichung frei von logarithmischen Integralen, so gehören, wie aus den bekannten Untersuchungen des Herrn L. Fuchs folgt*), zu einer beliebigen geschlossenen Curve stets n particuläre Integrale von der Beschaffenheit, dass sie, wenn x den Umlauf längs der geschlossenen Curve vollendet hat, entweder ihren früheren Werth wiedererhalten oder einen constanten Factor aufnehmen. Befindet sich im Innern der geschlossenen Curve nur ein einziger singulärer Punkt der Differentialgleichung, so kann man die betreffenden Integrale kurz die Hauptintegrale dieses singulären Punktes nennen. Umschliesst die Curve sämmtliche singuläre Punkte, so sind die zugehörigen Integrale die Hauptintegrale für das Gebiet der grossen Werthe von x. Zwischen diesen beiden Annahmen liegt nun der Fall, dass von der betrachteten Curve, welche sich selbst nicht schneiden möge, mehrere singuläre Punkte der Differentialgleichung, jedoch nicht alle, umschlossen werden. Indem man die singulären Punkte, die im Innern der Curve liegen, durch eine gebrochene Linie verbindet und das der letzteren benachbarte Gebiet fortlässt, verwandelt man den von der geschlossenen Curve begrenzten Theil der x-Ebene in ein ringförmiges Flächenstück, welches keine singulären Punkte mehr enthält. Die zu der Curve gehörigen Hauptintegrale sind dann zugleich als die Hauptintegrale dieser ringförmigen Fläche zu bezeichnen.

Treten in einem Gebiete gleichzeitig mehrere eindeutige particuläre Integrale auf, resp. mehrere Integrale von derselben Mehrdeutigkeit, so sind selbstverständlich die Hauptintegrale der Gleichung dort keine völlig bestimmten Functionen; man erhält vielmehr eine Gruppe von particulären Integralen (multiplicirt mit willkürlichen Constanten), aus denen beliebige lineare Ausdrücke gebildet werden können. Dies gilt auch für die ringförmigen Flächenstücke der x-Ebene.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ diejenigen singulären Punkte der Differentialgleichung (2), welche sich im Innern einer geschlossenen, sich selbst

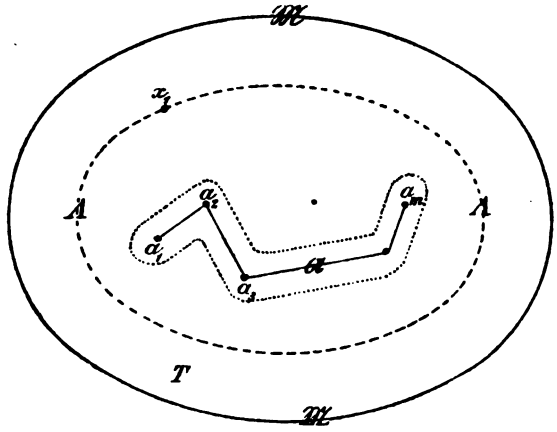
---

habe, hauptsächlich in der Aufstellung der vollständigen Systeme der Hauptintegrale der Tissot'schen Gleichung für die einzelnen Abschnitte der x-Ebene, wofür der in der vorgedruckten Arbeit abgeleitete Satz sich als wesentlich erwies.

*) § 3 der Abhandlung „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" in Bd. 66 des Crelle'schen Journals.

nicht schneidenden Curve $\mathfrak{M}$ befinden (Fig. 3). Das von der Curve $\mathfrak{M}$ umschlossene Flächenstück heisse T. Die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mögen durch eine gebrochene Linie $\mathfrak{A}$, welche sich selbst nicht schneidet und aus T nicht heraustritt, mit einander verbunden werden. Das ring-

Fig. 3.



förmige Flächenstück, welches aus T entsteht, wenn man die gebrochene Linie $\mathfrak{A}$ und ihre nächste Umgebung fortlässt, wird T' genannt. Innerhalb T' ziehe man, als Weg der Variable x, von einem beliebigen Punkte x_1 aus die sich selbst nicht schneidende, geschlossene Linie Λ, welche die Linie $\mathfrak{A}$ umgiebt.

In (47) wurde $\zeta_{k,l}$ als das particuläre Integral

$$\zeta_{k,l} = \int_{a_k}^{a_l} \Phi(u, x)\, du$$

definirt, in welchem $\Phi(u, x)$ die Function (14) bedeutet. Da nun nach der Voraussetzung die $n - m - 1$ singulären Punkte a_{m+1}, $a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}$ ausserhalb der Curve $\mathfrak{M}$ liegen, so erfahren die $n - m - 2$ Integrale

(56) $$\zeta_{m+1,m+2},\ \zeta_{m+2,m+3},\ \ldots,\ \zeta_{n-2,n-1},$$

deren Integrationswege die Curve $\mathfrak{M}$ nicht schneiden sollen, keinerlei Aenderung, wenn die Variable x längs der Curve Λ die gebrochene Linie $\mathfrak{A}$ umkreist. Denn die zu integrirende Function $\Phi(u, x)$ hat im Endpunkte der x-Curve den nämlichen Werth wie im Ausgangspunkte derselben, und die Integrationswege werden durch den obigen Umlauf nicht beeinflusst. Diese Eigenschaft kommt ausserdem dem Integral

(57) $$\int_{a_{n-1}}^{-\infty} \Phi(u, x)\, du$$

und der in (41) angegebenen transcendenten ganzen Function Y zu.

Auch in (57) soll der Integrationsweg ausserhalb der Curve $\mathfrak{M}$ bleiben. Man erhält auf diese Weise $n - m$ von einander unabhängige particuläre Integrale der Tissot'schen Gleichung, welche auf der ringförmigen Fläche T' eindeutige stetige Functionen von x sind.

Die $m - 1$ Integrale

$$\xi_{1,2},\ \xi_{2,3},\ \ldots,\ \xi_{m-1,m}, \tag{58}$$

deren Integrationswege aus den Abschnitten der gebrochenen Linie $\mathfrak{A}$ gebildet werden mögen, sind mehrdeutige Hauptintegrale für die Fläche T'. Denn die Aenderung, die sie erleiden, wenn x die Curve Λ im positiven Sinne durchläuft, besteht nur in der Aufnahme des Factors $e^{2\pi i\lambda}$, welcher in jedem einzelnen Integralelemente zu der Function $\Phi(u, x)$ hinzutritt.

Das n^{te} Hauptintegral für die Fläche T' wird durch das bestimmte Integral

$$\int_x^{(\mathfrak{A})} \Phi(u, x)\, du \tag{59}$$

angegeben, dessen Integrationsweg im Punkte x beginnt und endigt und einen einfachen Umlauf um die gebrochene Linie $\mathfrak{A}$ beschreibt. Nach § 1 der vorstehenden Abhandlung „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve" nimmt das Integral (59) den Factor

$$e^{2\pi i(b_1+b_2+\cdots+b_m+\lambda)} \tag{60}$$

auf, wenn x die Linie $\mathfrak{A}$ im positiven Sinne umkreist. Im allgemeinen Falle, wo $b_1, b_2, \ldots$ und λ beliebige Constanten sind, stellt der Ausdruck (59) ein Hauptintegral der Fläche T' von einer diesem Flächenstück eigenthümlichen Mehrdeutigkeit dar; denn die Aufnahme des Factors (60) erfolgt nur bei dem Integral (59) und nur im Falle eines Umlaufs um die Linie $\mathfrak{A}$.

Die obigen Betrachtungen übertragen sich, wie hier erwähnt sein möge, fast vollständig auf die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit den n endlichen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (Crelle's Journ., Bd. 71, pag. 336). Man hat dann in (13) und in den bestimmten Integralen der §§ 5 und 6 die Function $\Phi(u, x)$ durch das Product

$$(u - a_1)^{b_1-1}(u - a_2)^{b_2-1} \ldots (u - a_n)^{b_n-1}(u - x)^{\lambda-1} \tag{61}$$

zu ersetzen. Die Gleichung besitzt (wie die Tissot'sche) $n - m$ particuläre Integrale, welche auf der ringförmigen Fläche T' eindeutig und stetig bleiben. Dies sind (während das Integral Y fortfällt) die $n - m - 1$ zu (56) analogen Ausdrücke

$$\xi_{m+1,m+2},\ \xi_{m+2,m+3},\ \ldots,\ \xi_{n-1,n}$$

und das zu (57) analoge Integral zwischen den Grenzen a_n und ∞. Ferner sind die mehrdeutigen Hauptintegrale (58) und (59) auch hier direct anwendbar, nachdem die Function (61) an die Stelle der Function $\Phi(u, x)$ getreten ist. Das Entsprechende gilt auch von der allgemeineren, in der Anmerkung zu pag. 539 genannten Differentialgleichung. Die zur ringförmigen Fläche T' gehörigen eindeutigen Integrale von der Form (56) verringern sich zugleich mit der Anzahl der singulären Punkte der Gleichung; andererseits treten die s particulären Integrale hinzu, welche transcendente ganze Functionen von x sind*).

Kiel, im Mai 1890.

---

*) Als Arbeiten, in denen die Integration linearer Differentialgleichungen mittelst bestimmter Integrale von einem ähnlichen Gesichtspunkte aus, wie in dem obigen Aufsatze, resp. wie in meinen früheren Publicationen, behandelt wird, sind auch die folgenden (in russischer Sprache geschriebenen) Abhandlungen des Herrn P. Nekrassoff in Moskau zu nennen: 1. „Die allgemeine Differentiation"; 2. „Anwendung der allgemeinen Differentiation auf die Integration der Differentialgleichungen von der Form $\sum (a_s + b_s x)\, x^s D^s y = 0$"; 3. „Anwendung der allgemeinen Differentiation auf die Reduction vielfacher Integrale (mit Rücksicht auf die Integration der Laplace'schen Gleichung)"; 4. „Die linearen, durch bestimmte Integrale lösbaren Differentialgleichungen". Die Abhandlungen sind in dem Math. Journal der Math. Gesellschaft der Universität Moskau erschienen, und zwar die 3 ersten in Bd. XIV, 1889, die vierte in Bd. XV, 1890. Wie mir der Verfasser mittheilt, wird derselbe demnächst über die von ihm daselbst erhaltenen Resultate in den mathematischen Annalen ausführliches Referat erstatten.

d. 27. November 1890.

Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Eine Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie, die ich die letzten beiden Semester hindurch gehalten habe, gab mir die willkommene Gelegenheit, auf jene Gedankenreihen zurückzugreifen, denen ich in verschiedenen Arbeiten aus den Jahren 1871—73 Ausdruck gegeben habe*). Indem ich die neuere Litteratur des Gegenstandes verglich, bemerkte ich, dass die fundamentalen Auffassungen, von denen ich damals ausging, immer nur erst theilweises Verständniss gefunden haben, und dass gewisse damit zusammenhängende Fragestellungen, über welche ich mir seit lange bestimmte Ansichten gebildet habe, noch gar nicht behandelt sind. Mittlerweile erfahre ich, dass eine zusammenhängende Darstellung der Theorie, von einem Standpunkte aus, der von dem meinigen jedenfalls nicht sehr verschieden ist, demnächst von Hrn. Lindemann in dem zweiten Bande von Clebsch's Vorlesungen über Geometrie publicirt werden wird. Um so lieber kann ich mich nachstehend auf die Besprechung solcher Punkte beschränken, in denen ich Neues zu bieten habe, oder deren Darlegung in einer besonderen Form mir erwünscht erscheint. In I reproducire ich zunächst gewisse Ideen, die Clifford im Jahre 1873 darlegte, die aber bisher nur wenig bekannt geworden sind, trotz des

*) Es sind dies insbesondere:

Zwei Arbeiten „über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" in den Bänden 4 und 6 dieser Annalen (1871, 1872),

meine Programmschrift „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (Erlangen 1872, bei A. Deichert; dieselbe ist erst vor kurzem, mit Zusätzen und Verbesserungen von meiner Seite versehen, durch Hrn. Gino Fano in Bd. 17 der Annali di Matematica (1890) in italienischer Uebersetzung neu publicirt worden),

ein Aufsatz: „Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve" in den Berichten der Erlanger physikalisch-medicinischen Gesellschaft von 1873 (wiederabgedruckt in Bd. 22 dieser Annalen).

grossen Interesses, welches sich an dieselben knüpft*). Dieselben geben mir den Anlass, in II die Frage der „Nicht-Euklidischen Raumformen", über welche Hr. Killing vor einigen Jahren ein eigenes Werk publicirte**), aufs Neue aufzunehmen: mein Resultat ist, dass eine Reihe solcher „Raumformen" existirt, welche bisher noch nicht die verdiente Beachtung gefunden haben. Eben in diesem Nachweise, sowie in den verschiedenartigen Bemerkungen, die ich mit demselben weiterhin verknüpfe, dürfte die Hauptbedeutung meiner diesmaligen Darlegungen enthalten sein. In III entwickele ich eine besonders einfache Art, auf Grund rein projectiver Betrachtungen die analytische Geometrie einzuführen. Im Princip kommt dieselbe selbstverständlich auf die betreffenden Ideen v. Staudt's (oder auch von Moebius) zurück, aber sie ist wesentlich anschaulicher, als die mir sonst bekannten Darstellungen der Theorie, und dürfte also an ihrem Theile die Schwierigkeiten vermindern, die immer noch bei verschiedenen Mathematikern meinen früheren hierauf bezüglichen Ausführungen entgegenzustehen scheinen***). In IV endlich discutire ich allgemeinere Fragen: ich erläutere die principielle Bedeutung derjenigen Auffassungsweise der Nicht-Euklidischen Geometrie, die von der projectiven Geometrie beginnt, und nehme ausführlicher, als ich früher that, Stellung zum Problem der geometrischen Axiome.

*) Wie ich von Hrn. Lindemann erfahre, wird er in seiner demnächstigen Publication einen Haupttheil der Clifford'schen Betrachtungen (nämlich denjenigen, der sich auf die Theorie der windschiefen Parallelen und die zugehörigen Schiebungen des Raumes bezieht) seinerseits zur Darstellung bringen. Bisher sind diese Fragen am ausführlichsten von Sir R. S. Ball behandelt. Vergl. insbesondere dessen neueste Abhandlung „On the theory of the Content" in den Transactions der R. Irish Academy, vol. 29 (1889), deren bezüglicher Inhalt in das Schlusscapitel von Gravelius' „Theoretischer Mechanik starrer Systeme" (Berlin 1889) aufgenommen ist. Ueber Clifford's bez. Originalmittheilungen vergl. weiter unten im Texte.

**) Leipzig, bei Teubner 1885.

***) So äussert sich z. B. Hr. Ball in der Einleitung zu seiner oben genannten Abhandlung:

„In that theory (the Non-Euclidian Geometry) it seems as if we try to replace our ordinary notion of distance between two points by the logarithm of a certain anharmonic ratio. But this ratio itself involves the notion of distance measured in the ordinary way. How then can we supersede the old notion of distance by the Non-Euclidian notion, inasmuch as the very definition of the latter involves the former"?

Und Cayley selbst äussert sich auf p. 605 des zweiten Bandes seiner Collected Papers (Cambridge 1889), indem er v. Staudt's Einführung der Zahlen bespricht:

„It must however be admitted that, in applying this theory of v. Staudt's to the theory of distance, there is at least the appearance of arguing in a circle".

I.

Ueber Clifford's Ideen von 1873.

Gleich nach Veröffentlichung meiner ersten Abhandlung zur Nicht-Euklidischen Geometrie hat sich Clifford mit der ihm eigenthümlichen Unmittelbarkeit geometrischer Intuition auf das eifrigste den damit gegebenen Fragestellungen zugewandt. Durchdrungen von der besonderen Symmetrie und Eleganz der *elliptischen* Geometrie, suchte er deren Eigenart nach geometrischer und mechanischer Seite hin in besonders einfacher Weise zu formuliren. Die Verhandlungen der Londoner Mathematischen Gesellschaft enthalten hierüber nur zwei vorläufige Mittheilungen; es sind dies:

1) *Preliminary sketch of biquaternions* (Bd. 4, 1873),
2) *On the free motion under no forces of a rigid system in an n-fold homaloid* (Bd. 7, 1876),

die in Clifford's gesammelten Abhandlungen (Mathematical Papers, London, Macmillan 1882) unter Nr. XX und XXVI abgedruckt sind. Am letztgenannten Orte folgen dann aber noch unter Nr. XLI, XLII, XLIV drei weitere hierher gehörige Aufsätze:

1) *Motion of a solid in elliptic space* (aus dem Jahre 1874),
2) *Further Note on Biquaternions* (von 1876),
3) *On the Theory of screws in a space of constant positive curvature* (ebenfalls von 1876).

Ich kann auf die zahlreichen, interessanten Ideen, welche Clifford in diesen Arbeiten darlegt, hier leider nur sehr unvollständig eingehen. In der That möchte ich mich hier auf eine einzelne Stelle der „preliminary sketch of biquaternions" beschränken, wo Clifford in einer neuen, sogleich darzulegenden Weise *parallele* Linien des elliptischen Raumes definirt und daran folgende Bemerkung knüpft, die ich wörtlich reproducire (cf. ges. Werke; p. 193 oben):

„There are many points of analogy between the *parallels* here defined and those of parabolic geometry. Thus, if a line meets two parallel lines, it makes equal angles with them; and a series of parallel lines meeting a given line constitute a ruled surface of zero curvature. *The geometry of that surface is the same as that of a finite parallelogramm whose opposite sides are regarded as identical.*"

Eben die Verhältnisse auf der letztgenannten Fläche erschienen Clifford besonders bemerkenswerth: auf der Versammlung der British Association for the Advancement of Science vom Jahre 1873, die in Bradford stattfand, hat er eigens über dieselbe vorgetragen und mir, wie Sir R. S. Ball und anderen Mathematikern, die damals anwesend waren, wiederholt deren Eigenschaften persönlich erläutert. In den

bez. Reports ist nur der Titel des Clifford'schen Vortrags wiedergegeben*), um so wichtiger ist es mir, hier nachträglich Einiges davon zur Geltung zu bringen. Ich beginne damit, einige zugehörige analytisch-geometrische Formeln in derjenigen Weise zu entwickeln, die ich wiederholt in meinen Vorlesungen befolgte**): wie Clifford selbst die bez. Resultate abgeleitet hat, vermag ich im Einzelnen nicht zu sagen.

Wir betrachten zunächst die gewöhnliche Interpretation von $x + iy$ auf der Einheitskugel. Bei derselben haben bekanntlich zwei *diametrale* Punkte Argumente folgender Form:

$$(1) \qquad re^{i\varphi}, \quad -\frac{1}{r}e^{i\varphi}$$

(ich werde zwei solche Argumente späterhin kurzweg „diametral" nennen). Wir betrachten ferner lineare Substitutionen von $\lambda = x + iy$:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

bei denen zwei diametrale Elemente festbleiben, die sich also geometrisch als eine Drehung der Kugel um einen ihrer Durchmesser darstellen. Wie anderweitig bekannt und beispielsweise auf p. 33, 34 meiner „Vorlesungen über das Ikosaeder" ausgeführt ist, kann man einer solchen Substitution folgende Gestalt geben:

$$(2) \qquad \lambda' = \frac{(d+ic)\lambda - (b-ia)}{(b+ia)\lambda + (d-ic)},$$

unter a, b, c, d reelle Grössen verstanden. Dabei ist, wenn $\xi\,\eta\,\zeta$ die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen der zwei Kugelpunkte sind, welche bei der bez. Drehung festbleiben, wenn ferner φ den Winkel bezeichnet, durch welchen um diesen Punkt gedreht wird:

$$(3) \quad a = \varrho\xi \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \quad b = \varrho\eta \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \quad c = \varrho\zeta \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \quad d = \varrho \cdot \cos\frac{\varphi}{2},$$

unter ϱ die Quadratwurzel $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ verstanden. Aus Gründen, die ich p. 35, 36 der genannten Vorlesungen auseinandersetzte, nenne ich Substitutionen von der Form (2) solche vom *Quaternionentypus*.

Sei jetzt eine Fläche zweiten Grades gegeben. Wir betrachten diejenigen Collineationen des Raumes, welche nicht nur die Fläche als solche in sich überführen sondern auch jedes der beiden Systeme auf ihr verlaufender gerader Linien, — diejenigen Collineationen also, bei denen die Nicht-Euklidische Maassbestimmung unverändert bleibt, die

*) On a surface of zero curvature and finite extent.

**) Vergl. z. B. die Darlegungen in meiner Arbeit: „Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich". Math. Ann. Bd. 9, 1875 (insbes. p. 188, 189 daselbst).

man auf die F_2 gründen kann, und die man also als zugehörige Nicht-Euklidische Bewegungen bezeichnen wird. Mögen wir die geradlinigen Erzeugenden erster Art der Fläche durch einen Parameter λ, diejenigen zweiter Art durch einen Parameter μ in üblicher Weise festlegen. Die allgemeine Collineation der in Rede stehenden Art wird dann bekanntlich in der Weise zu geben sein, dass man für λ und μ irgend zwei lineare Substitutionen anschreibt:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}, \qquad \mu' = \frac{\alpha'\mu+\beta'}{\gamma'\mu+\delta'}$$

(vergl. z. B. Ikosaeder p. 179ff.). Dabei treten dann von selbst diejenigen zwei Arten von Collineationen der F_2 in sich besonders hervor, auf welche hier die Aufmerksamkeit gelenkt werden soll. Es sind dies erstens diejenigen, bei denen μ ungeändert bleibt:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}, \quad \mu' = \mu, \tag{3}$$

zweitens die anderen, bei denen λ festgehalten wird:

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \frac{\alpha'\mu+\beta'}{\gamma'\mu+\delta'}. \tag{4}$$

Ich werde die durch (3) gegebenen Collineationen *Schiebungen der ersten Art* nennen, die durch (4) gegebenen *Schiebungen der zweiten Art* (Clifford gebraucht statt „Schiebung" das Wort „Vectorbewegung" oder auch wohl nur „Vector"). Bei einer Schiebung erster Art bleiben, allgemein zu reden, zwei Erzeugende erster Art der Fläche punktweise fest und *es schreitet also jeder Raumpunkt auf derjenigen geraden Linie fort, die durch ihn so gelegt werden kann, dass sie diese beiden Erzeugenden erster Art trifft*, d. h. also auf der durch ihn gehenden geraden Linie derjenigen linearen Congruenz, deren Leitlinien eben jene zwei Erzeugenden sind. Bei einer Schiebung zweiter Art tritt natürlich entsprechendes Verhalten gegenüber zwei Linien der zweiten Art ein. Jede Schiebung der einen Art ist mit jeder Schiebung der anderen Art vertauschbar (keineswegs aber mit jeder Schiebung derselben Art). Die allgemeine uns interessirende Collineation unserer F_2 in sich kann nur in einer Weise in die Aufeinanderfolge einer Schiebung der ersten Art und einer Schiebung der zweiten Art aufgelöst werden.

Wir specialisiren jetzt unsere Fläche zweiten Grades dahin, dass sie eine „reelle, nulltheilige" Fläche sei, d. h. eine Fläche mit reeller Gleichung aber ohne reellen Punkt*). Die sämmtlichen Erzeugenden

*) Die hier im Texte gebrauchte Ausdrucksweise scheint mir bequem, insofern ich das Attribut „imaginär" am liebsten nur einer Fläche beilege, deren Gleichung complexe Coefficienten besitzt. Um bei den „reellen" Flächen zweiter Ordnung eine Bezeichnung zu haben, die von der Inbetrachtnahme der unendlich

einer solchen Fläche sind natürlich imaginär, aber es zeigt sich, dass das einzelne System dieser Erzeugenden reell ist, indem es zu jeder imaginären Linie, welche es umfasst, die conjugirt imaginäre Linie hinzu enthält. Solche zwei conjugirt imaginäre Linien wählen wir jetzt als Directricen einer zugehörigen Schiebung. Offenbar wird letztere reell, und wir finden so, zu unserer Fläche gehörig, *dreifach unendlich viele reelle Schiebungen der einen wie der anderen Art, durch deren Combination die Gesammtheit der zugehörigen reellen Nicht-Euklidischen Bewegungen entsteht.* Wir wollen das Gesagte hier analytisch bestätigen und zugleich für die in Rede stehenden reellen Schiebungen explicite Formeln aufstellen. Der Bequemlichkeit halber sei unsere Fläche durch folgende Gleichung gegeben:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \tag{5}$$

die wir zwecks Darstellung der zugehörigen Erzeugenden in nachstehender Weise spalten:

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + (x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) = 0.$$

Wir schreiben dann etwa:

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \dfrac{x_3 - ix_4}{x_1 - ix_2}, \\ \mu = \dfrac{x_1 + ix_2}{x_3 - ix_4} = -\dfrac{x_3 + ix_4}{x_1 - ix_2} \end{cases} \tag{6}$$

und haben also z. B. für eine Erzeugende erster Art, indem wir noch $re^{i\varphi}$ für λ setzen, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x_1 + ix_2) &= -re^{i\varphi}(x_3 + ix_4), \\ re^{i\varphi}(x_1 - ix_2) &= (x_3 - ix_4), \end{aligned} \tag{7}$$

Indem wir hier i durch $-i$ ersetzen, erhalten wir für die conjugirt imaginäre Gerade:

$$\begin{aligned} (x_1 - ix_2) &= -re^{-i\varphi}(x_3 - ix_4), \\ re^{-i\varphi}(x_1 + ix_2) &= (x_3 + ix_4), \end{aligned}$$

Aber dieses Gleichungspaar können wir auch so ordnen:

$$\begin{aligned} (x_1 + ix_2) &= \frac{1}{r}e^{i\varphi}(x_3 + ix_4), \\ -\frac{1}{r}e^{i\varphi}(x_1 - ix_2) &= (x_3 - ix_4), \end{aligned}$$

und haben damit einen Specialfall der Gleichungen (7) selbst, wo das $re^{i\varphi}$ durch $-\frac{1}{r}e^{i\varphi}$ ersetzt ist. *Die zu* (7) *conjugirt imaginäre Linie ist also in der That selbst eine Erzeugende der ersten Art.* Aber zugleich

---

fernen Ebene unabhängig ist, unterscheide ich neben den „nulltheiligen" reellen Flächen „ovale"und „ringförmige".

erfahren wir: *Conjugirt imaginäre Erzeugende haben diametrale Parameter.* Hierauf und auf Formel (2) ruht jetzt die Darstellung der reellen Schiebungen. Die betreffende Rechnung verläuft folgendermassen:

Wir haben zunächst aus (6):

$$(8)\quad x_1 + ix_2 : x_1 - ix_2 : x_3 + ix_4 : x_3 - ix_4 = \lambda\mu : 1 : -\mu : \lambda,$$

oder, wie wir unter Einführung eines Proportionalitätsfactors ϱ schreiben:

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= \lambda\mu + 1,\\ \varrho x_2 &= i(-\lambda\mu + 1),\\ \varrho x_3 &= \lambda - \mu,\\ \varrho x_4 &= i(\lambda + \mu).\end{aligned}$$

Hier tragen wir nun für λ zunächst allgemein ein:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

während μ unverändert bleiben soll. Wir bekommen dann nach gehöriger Modification des Proportionalitätsfactors ϱ:

$$\begin{aligned}\varrho' x_1' &= \quad (\alpha\lambda+\beta)\mu + \ (\gamma\lambda+\delta),\\ \varrho' x_2' &= -i(\alpha\lambda+\beta)\mu + i(\gamma\lambda+\delta),\\ \varrho' x_3' &= \quad (\alpha\lambda+\beta) \ - \ (\gamma\lambda+\delta)\mu,\\ \varrho' x_4' &= \quad i(\alpha\lambda+\beta) \ + i(\gamma\lambda+\delta)\mu.\end{aligned}$$

Hier tragen wir jetzt für $\lambda\mu$, λ, μ, 1 die ihnen proportionalen Werthe aus (8) ein, wobei ϱ' in ϱ'' übergehen mag. Wir erhalten so zur Darstellung der zu (5) gehörigen Schiebung erster Art:

$$\begin{aligned}\varrho'' x_1' &= \quad \alpha(x_1+ix_2) + \ \delta(x_1-ix_2) - \ \beta(x_3+ix_4) + \ \gamma(x_3-ix_4),\\ \varrho'' x_2' &= -i\alpha(x_1+ix_2) + i\delta(x_1-ix_2) + i\beta(x_3+ix_4) + i\gamma(x_3-ix_4),\\ \varrho'' x_3' &= -\ \gamma(x_1+ix_2) + \ \beta(x_1-ix_2) + \ \delta(x_3+ix_4) + \ \alpha(x_3-ix_4),\\ \varrho'' x_4' &= \quad i\gamma(x_1+ix_2) + i\beta(x_1-ix_2) - i\delta(x_3+ix_4) + i\alpha(x_3-ix_4),\end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

$$(9)\quad \begin{cases}\varrho'' x_1' = (+\alpha+\delta)x_1 + i(\alpha-\delta)x_2 + \ (-\beta+\gamma)x_3 - i(+\beta+\gamma)x_4,\\ \varrho'' x_2' = i(-\alpha+\delta)x_1 + \ (\alpha+\delta)x_2 + i(+\beta+\gamma)x_3 + \ (-\beta+\gamma)x_4,\\ \varrho'' x_3' = \ (+\beta-\gamma)x_1 - i(\beta+\gamma)x_2 + \ (+\alpha+\delta)x_3 + i(-\alpha+\delta)x_4,\\ \varrho'' x_4' = i(+\beta+\gamma)x_1 + \ (\beta-\gamma)x_2 + i(+\alpha-\delta)x_3 + \ (+\alpha+\delta)x_4.\end{cases}$$

Aber wir wünschen eine analytische Darstellung insbesondere der *reellen* Schiebungen der ersten Art. Wir substituiren daher aus den Formeln (2):

$$\alpha = d + ic, \quad \beta = -b + ia, \quad \gamma = b + ia, \quad \delta = d - ic.$$

Gleichzeitig wollen wir den in (9) auftretenden Proportionalitätsfactor ϱ'' ebenso wie auf der rechten Seite den Factor 2 der Einfachheit halber weglassen. *Wir erhalten so die übersichtlichen Formeln:*

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1' = dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4, \\ x_2' = cx_1 + dx_2 - ax_3 + bx_4, \\ x_3' = -bx_1 + ax_2 + dx_3 + cx_4, \\ x_4' = -ax_1 - bx_2 - cx_3 + dx_4, \end{cases}$$

die wir auch so ordnen können:

$$(11)\qquad \begin{cases} x_4' = dx_4 - ax_1 - bx_2 - cx_3, \\ x_1' = ax_4 + dx_1 - cx_2 + bx_3, \\ x_2' = bx_4 + dx_2 - ax_3 + cx_1, \\ x_3' = cx_4 + dx_3 - bx_1 + ax_2. \end{cases}$$

Hier liegt die Beziehung zur Quaternionentheorie auf der Hand. Wir sagen sofort: *Bezeichnet q die Quaternion:*

$$q = d + ai + bj + ck,$$

so ist unsere reelle Schiebung erster Art durch die Formel gegeben:

$$(12)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') = q \cdot (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3).$$

Genau so findet man für eine Schiebung zweiter Art:

$$(13)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') = (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3) \cdot q',$$

unter q' irgend eine Quaternion $d' + ia' + jb' + kc'$ verstanden. *Für die allgemeine reelle lineare Transformation unserer F_2 in sich aber kommt die schöne Formel:*

$$(14)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') = q \cdot (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3) \cdot q'.$$

Diese Formel (14), welche das Resultat unserer Ueberlegungen in knapper Form zusammenfasst, ist schon vor langer Zeit von Cayley gegeben worden (cf. Recherches ultérieures sur les déterminants gauches, Crelle's Journal Bd. 50, 1855, oder auch Werke, Bd. II, p. 214), und stimmt natürlich mit den entsprechenden Formeln überein, welche von Clifford, bez. Sir R. S. Ball entwickelt werden.

Es handelt sich nunmehr um die geometrische Deutung der durch (12) dargestellten Schiebung der ersten Art. Zu dem Zwecke führen wir jetzt die zu (5) gehörige Nicht-Euklidische (elliptische) Maassbestimmung ein und wählen der Einfachheit halber die bei letzterer auftretende, noch willkürliche multiplicative Constante so, dass das Krümmungsmaass gleich 1 wird. Wir definiren dementsprechend als Nicht-Euklidische Entfernung zweier Punkte x, x' den Ausdruck

$$(15)\qquad E = \arccos \frac{x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' + x_4x_4'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \cdot \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2}}.$$

und als Winkel zweier Ebenen u, u' durchaus analog:

$$(16) \qquad W = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3' + u_4 u_4'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 + u_4'^2}}.$$

Es ist wohl überflüssig, dass ich die Formeln (10) oder (12) auch noch für Ebenencoordinaten anschreibe. Uebrigens denken wir uns in alle diese Formeln jetzt für a, b, c, d die Werthe (3) eingetragen. Wir haben dann sofort aus (15), (16): *Bei einer Schiebung von der Amplitude φ rückt jeder Punkt des Raumes auf der durch ihn hindurchgehenden Congruenzlinie um das Stück $\frac{\varphi}{2}$ fort; ebenso dreht sich jede Ebene um die in ihr liegende Congruenzlinie um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$.* Die einzelne Schiebung ist also eine Schraubenbewegung des Raumes, bei welcher unendlich viele Schraubenaxen existiren: die Linien der zugehörigen linearen Congruenz. Dabei unterscheiden sich, wie leicht zu sehen, die Schiebungen erster und zweiter Art durch den *Sinn* der jeweiligen Schraubenbewegung: bezeichnen wir irgend eine Schiebung erster Art als eine Schiebung *rechtsherum*, so sind alle Schiebungen erster Art Schiebungen rechtsherum, alle Schiebungen zweiter Art Schiebungen linksherum. Die zugehörigen Congruenzen sind eben selbst rechtsherum gewunden, bez. linksherum gewunden.

Mit den so gegebenen Sätzen (die ich nicht weiter ins Einzelne ausführe) ist nun die Grundlage für Clifford's *neue Parallelentheorie* gegeben. Was parallele Linien im parabolischen (Euklidischen) Raume sind, steht fest: bei der Definition paralleler Linien des Nicht-Euklidischen Raumes werden wir zunächst nur insoweit eingeschränkt sein, als wir darauf achten müssen, dass die Definition in die gewöhnliche Euklidische übergeht, sobald der Nicht-Euklidische Raum in einen Euklidischen ausartet. Dieser Bedingung genügt man selbstverständlich durch die gewöhnliche Festsetzung, welche solche Linien des Nicht-Euklidischen Raumes parallel nennt, die sich in einem unendlich fernen Punkte (einem Punkte der Fundamentalfläche zweiten Grades) schneiden. Aber die so definirten Parallelen haben, wie Clifford hervorhebt, fast alle die eleganten Eigenschaften verloren, die den Euklidischen Parallelen zukommen. Diese Eigenschaften beruhen, nach Clifford, wesentlich darauf, dass Euklidische Parallelen vermöge derselben Raumbewegung in sich selbst verschoben werden können. Aber die gleiche Eigenschaft haben im Nicht-Euklidischen Raume, wie wir sahen, die Linien der gerade besprochenen Congruenzen (der einen wie der anderen Art). Ein Bündel Euklidischer Parallelen kann geradezu als Ausartung einer derartigen Congruenz angesehen werden. Daher der Vorschlag: *als Nicht-Euklidische Parallelen solche (windschiefe) gerade Linien zu bezeichnen, welche der gleichen Congruenz (der einen*

oder anderen Art) angehören, d. h. welche dieselben beiden imaginären Erzeugenden der ersten oder zweiten Art unserer Fundamentalfläche treffen. Die so definirten (Clifford'schen) Parallelen sind imaginär, wenn die gewöhnlichen Nicht-Euklidischen Parallelen reell sind, nämlich im hyperbolischen Raume, dafür sind sie auf Grund der vorausgeschickten Entwickelungen reell gerade da, wo es die gewöhnlichen Parallelen nicht sind, nämlich im elliptischen Raume. Sie zerfallen dabei ersichtlich in Parallele der einen oder der anderen Art, d. h. in *rechtsgewundene* und in *linksgewundene* Parallelen.

Es ist hier nicht meine Absicht, noch ausführlich die Zweckmässigkeit der Clifford'schen Definition darzuthun. Vielmehr wende ich mich gleich zur Theorie der besonderen Flächen zweiten Grades, von denen im obigen Citate die Rede war. *Es handelt sich um die ringförmigen Flächen zweiten Grades (Regelflächen), welche mit der Fundamentalfläche* (5) *ein geradliniges Vierseit gemein haben.* Die Erzeugenden erster Art dieser Fläche, ebenso wie ihre Erzeugenden zweiter Art, sind im Clifford'schen Sinne unter sich parallel; die einen rechts-parallel, die anderen links-parallel. In Folge dessen kann die Fläche in unserem elliptischen Raume auf zwei Weisen in sich verschoben werden, einmal so, dass die Erzeugenden der einen Art die Bahncurven abgeben, während die der zweiten Art unter einander vertauscht werden, das andere Mal umgekehrt. Wir schliessen, dass alle Erzeugenden erster Art mit den sie treffenden Erzeugenden zweiter Art je denselben Winkel einschliessen (den wir ϑ nennen wollen) und dass die Stücke, welche auf zwei Erzeugenden der einen Art von zwei Erzeugenden der anderen Art ausgeschnitten werden, gleich lang sind. Offenbar können wir die Figur, welche auf der Fläche von solchen zweimal zwei Erzeugendenstücken umgränzt wird, ein *Parallelogramm* nennen; denn sie hat, obgleich nicht eben, mit dem Parallelogramm der Euklidischen Ebene die wesentlichen Eigenschaften gemein. Gleichzeitig erkennen wir in der Fläche, eben wegen der Verschiebungen, die sie in sich zulässt, eine *Fläche constanter Krümmung.* Aber die zweierlei Schiebungen sind, wie wir wissen, mit einander vertauschbar. Hieraus allein folgt bereits, wie Clifford hervorhob, *dass das Krümmungsmaass der Fläche gleich Null ist.*

Alles dieses sind besonders elegante Eigenschaften der betrachteten Fläche (die im elliptischen Raume in mancher Hinsicht dieselbe Rolle spielt wie im gewöhnlichen, parabolischen Raume die Ebene). Aus ihnen folgt, worauf Clifford vor allen Dingen die Aufmerksamkeit richten wollte: *Die Gesammtfläche hat einen endlichen Flächeninhalt.* In der That kann man sie ja in unendlich viele, unendlich kleine Parallelogramme von der Winkelöffnung ϑ zerschnitten denken, deren Summation sofort gelingt und als Gesammtinhalt der Fläche, indem

die Gesammtlänge der Erzeugenden der einen wie der anderen Art $= \pi$ ist, $\pi^2 \cdot \cos\vartheta$ ergiebt. — Dieses Resultat ist darum so bemerkenswerth, weil es unseren gewöhnlichen Vorstellungen von den Eigenschaften einer unbegränzten Mannigfaltigkeit verschwindenden Krümmungsmaasses widerstreitet. Man glaubt (oder glaubte) allgemein, dass eine solche Mannigfaltigkeit, gleich der Euklidischen Ebene, *unendliche* Ausdehnung besitzen müsse; die Clifford'sche Fläche (so will ich die in Rede stehende Fläche zweiten Grades fortan nennen) belehrt uns, dass dies keineswegs nothwendig der Fall zu sein braucht. Es hängt dies offenbar mit dem Umstande zusammen, dass die Clifford'sche Fläche als ringförmige Fläche zweiten Grades mehrfachen Zusammenhang besitzt. So sehen wir denn jetzt ein allgemeines Problem vor Augen, mit dem wir uns bald ausführlich beschäftigen wollen, das Problem: *alle Zusammenhangsarten anzugeben, welche bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten irgendwelchen constanten Krümmungsmaasses überhaupt auftreten können.*

II.

Von den verschiedenen (Euklidischen oder Nicht-Euklidischen) Raumformen.

Ehe ich das bezeichnete Problem in seiner Allgemeinheit in Angriff nehme, sei es mir gestattet, die Aufmerksamkeit auf einen besonderen dabei in Betracht kommenden Punkt zurückzulenken, der in meinen ersten Abhandlungen zur Nicht-Euklidischen Geometrie an zwei Stellen besprochen ist (Bd. 4 dieser Annalen, Note zu p. 604; Bd. 6, p. 125). Indem ich damals die projective Geometrie als Grundlage der Nicht-Euklidischen Geometrie voranstellte, verursachte die Einordnung des Euklidischen Raumes und des sogenannten Gauss'schen Raumes (des allseitig unendlich ausgedehnten Raumes constanter negativer Krümmung) keinerlei Schwierigkeit: dieselben entsprechen direct den beiden Fällen der von mir so bezeichneten *parabolischen*, bez. *hyperbolischen* Geometrie. Anders beim Raume constanter positiver Krümmung (dem sogenannten Riemann'schen Raume). Wie Riemann selbst sich die hier in Betracht kommenden Verhältnisse innerhalb dieses Raumes gedacht hat, ist nach den kurzen Andeutungen, welche er hierüber giebt*), nicht ganz klar; jedenfalls aber haben Beltrami und die sämmtlichen an ihn knüpfenden Mathematiker die Geometrie des ge-

*) Vergl. „*Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*", insbesondere den Satz, der in den Ges. Werken auf p. 266 unten abgedruckt ist. — Ich halte es selbstverständlich für wahrscheinlich, dass Riemann dort an den sphärischen Raum gedacht hat, aber seine Worte passen auch, ohne unrichtig zu sein, auf den elliptischen Raum.

nannten Raumes schlechtweg mit derjenigen der Kugel parallelisirt und daraus geschlossen, dass die Punkte eines solchen Raumes, gleich den Gegenpunkten der Kugel, paarweise zusammengehören, in der Art, dass alle geodätischen Linien, welche durch den einen der beiden Punkte hindurchgehen, auch durch den anderen laufen. Ich hatte dem gegenüber darauf aufmerksam zu machen (Bd. 4, l. c.), dass die Kugel nicht der einfachste Typus einer zweidimensionalen, geschlossenen Mannigfaltigkeit constanter positiver Krümmung ist, dass dieser vielmehr durch das vom Mittelpunkte der Kugel auslaufende Strahlenbündel geliefert wird (dessen Strahlen den Kugelpunkten ein-zweideutig entsprechen). Die *elliptische* Geometrie, wie ich sie verstehe, deckt sich also nicht mit der sonst discutirten *sphärischen* Geometrie*), sondern ist einfacher. In der elliptischen Geometrie ist die Gruppirung der geraden Linien und Ebenen des Raumes genau dieselbe, wie in der projectiven Geometrie: zwei Gerade schneiden sich, wenn überhaupt, nur einmal. Die complicirteren Verhältnisse des sphärischen Raumes entstehen erst, wenn man den linearen elliptischen Raum durch Projection auf ein Gebilde zweiten Grades überträgt. —

Es ist mir kein Zweifel, und ich habe mich darüber bereits in Bd. 6 l. c. mit aller Deutlichkeit geäussert, dass ich mit den so bezeichneten Auseinandersetzungen einen wirklichen Irrthum der früheren Darstellungen aufgedeckt habe. Meine Anschauungen vom elliptischen Raume sind dann später in anderer Weise unabhängig von Herrn Newcomb entwickelt worden**). Indem ich mir vorbehalte, sogleich noch auf die ausführlichen hier anschliessenden Untersuchungen des Hrn. Killing einzugehen***), möchte ich hier vorab die Frage aufwerfen, wesshalb man zur klaren Erfassung des elliptischen Raumes erst so spät gekommen ist, und die dazu führenden Ueberlegungen selbst heute immer noch nicht allgemein bekannt scheinen†). Der Unterschied des sphärischen und des elliptischen Raumes ruht natürlich wieder in deren Zusammenhangsverhältnissen, und der „Zusammenhang" des elliptischen Raumes hat etwas Ungewöhnliches. Bleiben wir der Einfachheit halber, weil die Sache da am kürzesten bezeichnet

*) Ich werde die beiden Namen „elliptisch" und „sphärisch" in dem hier hervortretenden Sinne auch in der Folge auseinanderhalten.

**) *Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension.* Bd. 83 des Journals für Mathematik, 1877.

***) *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung*, Journal, Bd. 86, 1879, sowie in dem 1885 bei Teubner erschienenen Werke (auf welches schon oben Bezug genommen wurde): *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.*

†) cf. z. B. Poincaré im Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. 15 (1887), p. 203 ff.

die Gesammtlänge der Erzeugenden der einen ... ...ten. Es handelt ... = π ist, $\pi^2 \cdot \cos\vartheta$ ergiebt. — Dieses Resultat ... *...fachen* Flächen und werth, weil es unseren gewöhnlichen Vor... bei denen man durch schaften einer unbegränzten Mannigfaltig... hin von einer Seite auf mungsmaasses widerstreitet. Man glaub... dieser Doppelflächen wider- eine solche Mannigfaltigkeit, gleic... ...seitig von solchen Flächen ab- *liche* Ausdehnung besitzen müsse... ...nten und eben darum nothwendig die in Rede stehende Fläche ... vorliegende Schwierigkeit. In der uns, dass dies keineswegs ... sich wie die Ebene der projectiven hängt dies offenbar mit d... schon vor langer Zeit an Bemerkungen Fläche als ringförmige ... auseinandersetzte**), eine Doppelfläche. hang besitzt. So s... einfach desshalb so lange unbeachtet ge- Augen, mit dem ... der Doppelfläche den Geometern nicht geläufig Problem: *alle Z*... in der projectiven Geometrie gebrauchten, *Mannigfaltigk*... zum Bewusstsein gekommen war. *haupt aufstre*...

... Bemerkungen zu den Entwickelungen des Hrn. Killing. ... hat vornehmlich den Gedanken verfolgt (dem gewiss bei- ... werden kann), dass der sphärische Raum auch neben dem V... ...schen Raume noch ein besonderes Interesse behält. Als einen ...rklichen Fortschritt betrachte ich den Killing'schen Beweis, dass bei ...n von ihm festgehaltenen Hypothesen (welche ich übrigens sogleich ... einer näheren Kritik unterwerfen werde) als Raumformen con- n ...stanten positiven Krümmungsmaasses keine anderen möglich sind, als ...eben der elliptische und der sphärische Raum (Journal für Math., Bd. 89. l. c.). Clifford und ich sind an diesem Satze vorbeigeführt worden, weil wir unsere Aufmerksamkeit, unserer damaligen, wesent- lich analytischen Auffassung entsprechend, von vornherein auch auf complexe Werthe der Coordinaten gerichtet hatten. Die Abbildung des elliptischen Strahlenbündels auf eine um seinen Mittelpunkt herum- gelegte Kugel erschien mir daher (Ann. Bd. 4, l. c.) nur als specieller Fall der n-deutigen Abbildung desselben auf irgendwelche Fläche n^{ter} Ordnung; Clifford stellt in seiner oben besprochenen Arbeit (Preliminary sketch of biquaternions, Werke p. 189) dem „linearen" elliptischen Raume ausdrücklich höhere „algebraische" Räume entgegen. Diese algebraischen Räume werden natürlich „Verzweigungselemente" enthalten, d. h. Punkte, welche mit den sonstigen Punkten des Raumes nicht gleichberechtigt sind (in meinem Beispiele sind dies diejenigen

*) Vergl. die Mittheilungen von Hrn. Reinhardt in Bd. II von Moebius' gesammelten Werken, (Leipzig 1886), pag. 519 ff. — Wegen der allgemeinen Theorie dieser Zusammenhangsfragen siehe Dyck in Bd. 32 der Annalen, p. 472 ff. (*Beiträge zur Analysis situs*). — Vergl. übrigens auch die durchaus zutreffenden Aeusserungen von Hrn. Newcomb in Nr. XIII seiner citirten Abhandlung.

**) Math. Ann. Bd. 7, p. 550 (1874).

te der F_n, in denen Strahlen des elliptischen Strahlenbündels
n). Auch im Falle des sphärischen Raumes sind Verzweigungs-
algebraisch zu reden, vorhanden; nur sind dieselben alle
d *man kann also von ihnen abstrahiren, indem man sich*
htung reeller Elemente beschränkt. Und nun verstehe ich
ng's Resultat dahin, dass es neben dem eigentlichen
ien Raume keinen anderen *reellen* algebraischen Raum con-
ven, positiven Krümmungsmaasses giebt, der frei von Verzweigungs-
elementen wäre, als eben den sphärischen Raum. Es ist dies im Sinne der Analysis situs zu verstehen, welche solche geometrische Gebilde als gleichwerthig erachtet, welche durch stetige Deformation in einander übergeführt werden können*). Wir sagen also vielleicht besser, *dass ein reeller Raum constanten positiven Krümmungsmaasses, der keine Verzweigungselemente enthält, eindeutig entweder auf den elliptischen Raum oder den sphärischen Raum muss bezogen werden können.* — Erscheint so das Hauptresultat des Hrn. Killing mit meinen Anschauungen sehr wohl vereinbar, so kann ich demselben in einer anderen Hinsicht nicht zustimmen:

Hr. Killing bezeichnet den elliptischen Raum als *Polarform* des sphärischen (oder, wie er sagt, des Riemann'schen) Raumes. Anlass dazu ist wohl gewesen, dass im elliptischen Raume, der oben mitgetheilten Formel (15) entsprechend, die Gesammtlänge einer geraden Linie ebenso gleich π ist, wie die Winkelsumme im Ebenenbüschel des sphärischen Raumes. Aber die Winkelsumme im Ebenenbüschel des elliptischen Raumes ist doch auch gleich π, und nicht etwa gleich 2π, wie es die Gesammtlänge der geraden Linie des sphärischen Raumes ist. Der elliptische Raum ist eben sich selbst durchaus dualistisch; er ist seine eigene Polarform. Hrn. Killings Benennung ist also unzutreffend. Nichts hindert, sich die wirkliche Polarform des Riemann'schen Raumes auszudenken. Aber das wird so complicirt und fremdartig, dass es keinen Zweck hat, hier näher darauf einzugehen.

Beiläufig will ich noch auf einen anderen Unterschied des sphärischen und des elliptischen Raumes aufmerksam machen, der nicht ohne Interesse ist und noch nicht bemerkt zu sein scheint. Bekanntlich ist durch Hrn. Schering die *Theorie des Potentials* auf beliebige Nicht-Euklidische Räume ausgedehnt worden**). Setzen wir das Krümmungs-

*) So erscheint also z. B. ein in sich geschlossener ovaler Flächentheil irgend einer Fläche höherer Ordnung als gleichwerthig mit der Kugel, und es ist mit dem Satze des Textes nicht im Widerspruch, wenn man gegebenenfalls einen solchen Flächentheil ebensowohl zwei-eindeutig den reellen Strahlen eines Strahlenbündels zuordnen kann, wie die Kugel selbst.

**) Göttinger Nachrichten 1870, p. 311—321: *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume*, ebenda 1873, p. 149ff.: *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen.* Vergl. hierzu auch Killing in Bd. 98 [des

maass des sphärischen Raumes, um mit unseren früheren Formeln in Uebereinstimmung zu sein, gleich Eins, so wird ihm zufolge das Elementarpotential zweier Massenpunkte a, b, im Falle drei Dimensionen in Betracht kommen, (eine Annahme, auf die wir uns hier beschränken wollen):

(17) $$V = \operatorname{cotg} r_{ab}.$$

Sei jetzt a' der sphärische Gegenpunkt von a. Rückt b an a heran, so wird $\operatorname{cotg} r_{ab}$ positiv unendlich, rückt es an a', so negativ unendlich. Wir haben also eine Elementarwirkung, bei welcher jedesmal gleichzeitig mit einer anziehenden Masse in a eine ebenso stark abstossende Masse in a' gesetzt ist. Diese Mitwirkung des Gegenpunktes a' lässt sich auch nicht entbehren. Man sieht dies am besten, wenn man das gesuchte Elementarpotential V als Geschwindigkeitspotential einer Flüssigkeitsbewegung deutet: indem der sphärische Raum endlich ist, muss bei ihm, sobald eine Quelle gegeben ist, aus welcher Flüssigkeit ausströmt, nothwendig eine andere Stelle gegeben sein, in der Flüssigkeit verschwindet. — Meine Bemerkung ist nun, dass die hiermit skizzirte Theorie nothwendig an der Annahme des sphärischen Raumes haftet und im elliptischen Raume ihre Bedeutung verliert. In der That kann Formel (17) für den elliptischen Raum kein eigentliches Potential vorstellen. Denn da a und a' im elliptischen Raume coincidiren, ist die durch (17) vorgestellte Function des Punktes b im elliptischen Raume nur bis auf das Vorzeichen bestimmt: der Punkt b soll also nach Formel (17) seitens eines und desselben Punktes a gleichzeitig angezogen und abgestossen werden, oder auch a soll gleichzeitig Quelle und Verschwindungsstelle einer Flüssigkeitsbewegung sein. Eine solche Vieldeutigkeit ist augenscheinlich mit der Idee einer Elementarwirkung unverträglich *).

Gehen wir nun zu der allgemeinen Fragestellung über, die wir zum Schlusse von Nr. I formulirten. Auch hier werde ich mit einer

---

Journals für Mathematik (1884): *Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen* (cf. insbesondere p. 24—29 daselbst). — Der „Riemann'sche Raum" Schering's ist wieder unser sphärischer Raum.

*) Ich würde im Texte auch noch gern auf die Betrachtungen eingegangen sein, welche Hr. v. Helmholtz in seinem bekannten Vortrage: *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* (1870, abgedruckt in Heft 3 der populären wissenschaftlichen Vorträge, Braunschweig 1876) über das Sehen in Nicht-Euklidischen Räumen entwickelt. Inzwischen finde ich es schwer, dieselben im Einzelnen zu verstehen. Indem wir hier bei Aufstellung der hyperbolischen, der elliptischen, der parabolischen Raumform gleichförmig von der projectiven Geometrie ausgehen, ist für uns von vornherein gegeben, dass allemal die Gesetze der Perspective dieselben sein müssen. Ersetzen wir hinterher den elliptischen Raum durch den sphärischen, so kommt eine bestimmte Complication durch das Auftreten der Gegenpunkte hinzu. Von dieser Complication ist aber bei Hrn. v. Helmholtz, trotzdem er sich übrigens genau an die Beltrami'schen Entwickelungen anschliesst, nirgends die Rede; vielmehr passt das, was l. c. p. 47

kritischen Bemerkung beginnen. In der That hat sich ja Hr. Killing an den genannten Orten dieselbe Aufgabe gestellt, die uns hier beschäftigen soll, nämlich die, alle Nicht-Euklidischen (oder auch Euklidischen) Raumformen aufzuzählen. Wir sahen bereits, dass in dieser Hinsicht der elliptische und der sphärische Raum bei ihm fortgesetzt neben einander betrachtet werden. Dagegen fehlt bei ihm die Raumform verschwindender Krümmung, die wir in Nr. I kennen lernten: die Clifford'sche Fläche. Auch hat, so viel ich weiss, keiner der anderen zahlreichen Mathematiker, die über Räume verschwindender Krümmung geschrieben haben, der durch die Clifford'sche Fläche realisirten Möglichkeit gedacht. Es ist also, ohne dass man es merkte, immer eine willkürliche Voraussetzung eingeführt worden, die das Resultat der Ueberlegung unnöthig einschränkte. Ich werde versuchen, diese Voraussetzung hier zu bezeichnen. Sei es dabei wieder, der grösseren Bestimmtheit des Ausdrucks halber, gestattet, nur von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu reden. Hat eine solche Mannigfaltigkeit, wie wir voraussetzen, constante Krümmung und ist sie zugleich unbegränzt, so kann jeder einfach berandete, einfach zusammenhängende Theil derselben auf ihr auf dreifach unendlich viele Weisen verschoben werden (ohne je an eine Hemmung zu stossen). *Aber darum ist keineswegs nöthig* (was bei den Killing'schen Raumformen zutrifft), *dass sich die Mannigfaltigkeit als Ganzes auf dreifach unendlich viele Weisen in sich verschieben lässt.* Man vergleiche in dieser Hinsicht die Eigenschaften der Clifford'schen Fläche. Dieselbe gestattet allerdings zweifach unendlich viele Bewegungen in sich selbst, entsprechend den einfach unendlich vielen Schiebungen der einen, wie der anderen Art, durch welche sie in sich übergeht: bei diesen zweifach unendlich vielen Bewegungen bleibt kein Punkt der Fläche fest. Aber nun versuche man etwa, die Clifford'sche Fläche unter Festhaltung eines ihrer Punkte, gleich einer Euklidischen Ebene, um diesen Punkt in sich selbst zu drehen. So wird man sofort bemerken, dass dies nicht möglich ist. In der That haben die von einem Punkte der Fläche unter verschiedenen Azimuthen auslaufenden geodätischen Linien derselben ganz verschiedene Länge: die beiden durch den Punkt hindurchgehenden geradlinigen Erzeugenden der Fläche haben, wie wir wissen, die Gesammtlänge π, aber in ihrer unmittelbaren Nähe können geodätische Linien der Fläche gefunden werden (wir werden dies sogleich noch explicit zeigen), die unbegränzt oft über die Fläche hinlaufen, ohne

gesagt wird, ohne Weiteres auf die Verhältnisse des elliptischen Raumes, ohne darum für den sphärischen Raum unrichtig zu sein. (Es heisst dort z. B.: Den seltsamsten Theil des Anblicks der sphärischen Welt würde aber unser eigener Hinterkopf bilden, in dem alle unsere Gesichtslinien wieder zusammenlaufen würden, so weit sie zwischen anderen Gegenständen frei durch gehen können, etc. —).

sich zu schliessen, und also unendliche Länge haben. Die hiermit formulirten Bemerkungen sind, denke ich, entscheidend: ***Man hat, indem man das Problem der Raumformen behandelte, bislang die berechtigte Forderung freier Beweglichkeit einfach zusammenhängender Raumstücke durch die weitergehende Annahme ersetzt, die Räume als Ganzes seien in sich frei beweglich.***

Clifford selbst hat bereits (an der oben citirten Stelle) angedeutet, wie man sich am leichtesten Einsicht in die speciellen Zusammenhangsverhältnisse seiner Fläche verschafft. Man denke sich nämlich die Fläche längs zweier von einem Punkte derselben anlaufender Erzeugender derselben aufgeschnitten, wodurch sie einfach berandet und einfach zusammenhängend wird. Die so geschnittene Fläche können wir dann offenbar unter Aufrechterhaltung ihrer Maassverhältnisse auf ein Stück der Euklidischen Ebene abbilden (auf ein Stück der Euklidischen Ebene *abwickeln*, um diesen sonst in der Flächentheorie üblichen Ausdruck anzuwenden); nämlich auf *einen Rhombus von der Winkelöffnung ϑ und der Seitenlänge π:*

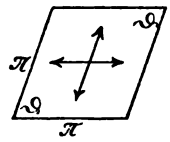


Fig. 1.

wobei die gegenüberstehenden Seiten dieses Rhombus so zu einander gehören wie sie durch eine Parallelverschiebung der Ebene aus einander hervorgehen (was durch die Doppelpfeile der Figur angedeutet sein soll). An dieser Figur studiren wir nun mit Leichtigkeit die einzelnen

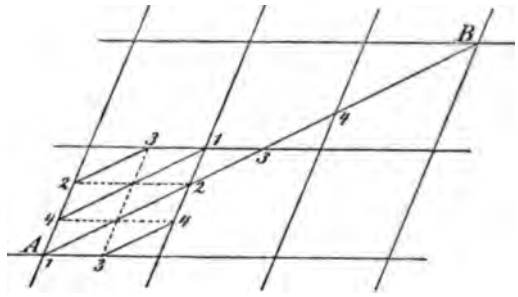


Fig. 2.

Fragen, die uns interessiren; z. B. den Verlauf einer geodätischen Linie über die Clifford'sche Fläche hin. Noch bequemer wird diess übrigens, wenn wir Fig. 1 vermöge der zugehörigen Parallelverschiebungen (welche die einzelne Kante je in die gegenüberliegende überführen) vervielfältigen und uns so eine Zerlegung der Ebene in ein Rhombennetz verschaffen, wie es durch Figur 2 vorgestellt wird.

Offenbar giebt uns diese neue Figur ein Bild davon, wie sich die Abwickelung unserer Euklidischen Ebene über die Clifford'sche Fläche hin gestaltet: sowie in der Figur unendlich viele Rhomben neben einander liegen, so wird die Clifford'sche Fläche bei der genannten Abwickelung mit unendlich vielen Blättern überdeckt, welche glatt in einander übergehen, ohne irgendwelche Verzweigungspunkte darzubieten. — Wollen wir also den Verlauf einer geodätischen Linie auf der Fläche verfolgen, so haben wir nur zuzusehen, wie unser Rhombennetz von einer geraden Linie der Ebene durchzogen wird. Ich betrachte z. B. die gerade Linie AB der vorstehenden Figur, die von einem Eckpunkte (A) auslaufend vier Rhomben durchsetzt, ehe sie wieder in einen Eckpunkt (B) einmündet, von dem aus sie sich dann genau so weiter erstreckt, wie ursprünglich vom Punkte A aus. Offenbar ist es nur nöthig, dieses begränzte Stück AB auf die Clifford'sche Fläche zu übertragen. Und diess gelingt am leichtesten, indem wir die vier Stücke, mit denen AB die vier Rhomben durchsetzt, durch geeignete Parallelverschiebung sämmtlich in den ursprünglichen Rhombus zurückverlegen. Es entsteht so ein gebrochener Linienzug:

$$1\,2,\ 2\,3,\ 3\,4,\ 4\,1,$$

dessen Uebertragung auf die Clifford'sche Fläche uns keine Schwierigkeit mehr macht. — Insbesondere können wir so ohne Weiteres eine geodätische Linie finden, welche unendlich oft über die Clifford'sche Fläche hinläuft, ohne sich zu schliessen. Wir werden einfach in Figur 2 eine gerade Linie ziehen, welche von A auslaufend keinen weiteren Eckpunkt der Figur mehr trifft. — Wir gedenken endlich eines letzten Mittels, um die in Frage kommenden Beziehungen noch lebhafter zu erfassen. Dasselbe besteht darin, dass wir den Rhombus 1 so zu einer *Ringfläche* zusammenbiegen, dass die zusammengehörigen Stellen gegenüberliegender Kanten zur Deckung kommen. Zu dem Zwecke müssen wir uns natürlich, da es sich um keine congruente Abwickelung handelt, den Rhombus aus einer dehnbaren Membran gebildet denken. *Auf die so entstehende Ringfläche ist dann die Clifford'sche Fläche stetig eindeutig bezogen* und wir können an ihr in einfachster Weise die sämmtlichen Zusammenhangsfragen, insbesondere den Verlauf unserer geodätischen Linien verfolgen. —

Ich habe die verschiedenen Abbildungen der Clifford'schen Fläche hier so ausführlich besprochen, weil uns jetzt die dabei zu Grunde liegende geometrische Denkweise zur allgemeinen Erledigung des vorgelegten Problems der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Raumformen dienen soll. Ich beschränke mich dabei vorab auf zwei Dimensionen.

Was die zweidimensionalen Euklidischen Raumformen angeht, so ist sofort ersichtlich, dass uns eine solche gegeben sein wird, auch

wenn wir nicht, wie in Figur 1, von einem Rhombus, sondern von einem beliebigen Parallelogramm der Euklidischen Ebene ausgehen, dessen Ränder wir durch geeignete Parallelverschiebung zusammengeordnet denken. Wir können dieses Parallelogramm sogar zu einem Parallelstreif ausarten lassen:

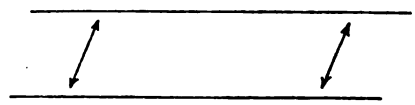


Fig. 3.

der dann, bei der Zusammenbiegung, nicht eine Ringfläche sondern eine Cylinderfläche ergiebt (auf die wir ihn sogar congruent abgewickelt denken können). Wir haben so zwei neue zweidimensionale Euklidische Raumformen, die übrigens gleich der Clifford'schen Mannigfaltigkeit (die sie als besonderen Fall einschliessen) durch *einseitige* Flächen versinnlicht werden. Wir können noch eine dritte Raumform zufügen, die unter dem Bilde einer *Doppelfläche* erscheint. In der That habe ich an einem anderen Orte*) ausführlich gezeigt, dass man eine Ringfläche in der Art stetig deformiren kann, dass sie schliesslich eine Doppelfläche beiderseitig überzieht; indem wir bei diesem Deformationsprocesse die Ringfläche fortgesetzt in geeigneter Weise als Trägerin einer Euklidischen Maassbestimmung ansehen, wird schliesslich die Doppelfläche zu einer solchen und repräsentirt dann, sobald wir zwischen ihren beiden Seiten nicht weiter unterscheiden, eine neue Euklidische Raumform. *Hiermit aber haben wir, sage ich, die Gesammtheit der in Betracht kommenden zweidimensionalen Nicht-Euklidischen Raumformen erschöpft.*

Der Beweis ist nicht einfach und kann hier nur in allgemeinen Zügen angedeutet werden:

Jedenfalls können wir uns zuvörderst auf die Aufzählung einseitiger Mannigfaltigkeiten der gewollten Art beschränken: denn etwaige Doppelflächen können wir immer auf einseitige Flächen reduciren, indem wir uns dieselben doppelt überdeckt denken und dadurch zwischen ihren beiden Flächenseiten unterscheiden**). Ist erst die Aufzählung der einseitigen Flächen beendet, werden wir nachträglich überlegen, ob wir dieselben zu Doppelflächen zusammenbiegen können, und auf wie viel verschiedene Weisen dies möglich sein mag.

Sei also eine einseitige zweidimensionale Euklidische Mannigfaltigkeit zu suchen. Wir denken uns dieselbe durch stetig gekrümmte

*) In meiner Schrift: *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig 1882), (p. 80, unten).

**) Eben dadurch entsteht in einfachster Weise (um hier darauf zurückzugreifen) aus dem elliptischen der sphärische Raum.

Schnitte, die vielleicht aus dem Unendlich-Weiten*) kommen und sich im Endlichen jedenfalls nur in einem Punkte schneiden sollen, in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt und diesen, wie wir es soeben im Beispiele thaten, in die Euklidische Ebene abgewickelt. In letzterer entsteht dann ein Polygon, welches offenbar die doppelte Eigenschaft hat:

dass seine Seiten paarweise mit einander durch Euklidische Bewegungen zur Deckung gebracht werden können,

und dass die Summe seiner im Endlichen gelegenen Winkel (welche zusammengenommen die Umgebung jener einen Stelle ausmachen, in welcher sich die auf der ursprünglichen Mannigfaltigkeit anzubringenden Schnitte eventuel kreuzen sollten) *gleich* 2π *ist.*

Es wird darauf ankommen, alle solche Polygone der Euklidischen Ebene aufzuzählen. Und da zeigt sich denn, dass es keine anderen Polygone dieser Art giebt, als das Parallelogramm, bez. den Parallelstreif, oder doch, dass alle anderen krummlinigen Polygone der gesuchten Art, die man construiren mag, durch geeignete Verschiebung der auf der anfänglichen Mannigfaltigkeit zu construirenden Schnittlinien auf Parallelogramm oder Parallelstreif zurückgebracht werden können.

Endlich ist zu zeigen, dass man von den so gewonnenen einseitigen Euklidischen Mannigfaltigkeiten auf keine andere Weise zu Doppelmannigfaltigkeiten übergehen kann, als auf die soeben andeutungsweise erwähnte. —

Wir haben jetzt die gleichen Untersuchungen für Mannigfaltigkeiten positiver, bez. negativer constanter Krümmung durchzuführen. Wir werden dies thun, indem wir auf der Kugel und in der hyperbolischen Ebene geeignete Polygone construiren, bei denen wir dann noch hinterher untersuchen, ob wir sie etwa zu Doppelflächen zusammen biegen können. Das Resultat ist im Falle der Kugel äusserst einfach, indem wir nämlich bei ihr überhaupt keine Polygone finden, die unseren Bedingungen genügen, was zur Folge hat, *dass Kugel und elliptische Ebene die einzigen hier in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung bleiben.* Ganz anders im Falle des negativen Krümmungsmaasses. Hier handelt es sich, was die Construction geeigneter Polygone angeht, um eine ausgedehnte Theorie, welche aber — selbstverständlich unter anderen Gesichtspunkten und sogar mit einer Allgemeinheit, die wir nicht brauchen, — von anderer Seite, nämlich seitens der *modernen Functionentheorie,* fertig behandelt vorliegt. Ich denke hier zunächst an die *Fundamentalpolygone,* welche

*) d. h. aus dem Unendlich-Weiten der für die Fläche geltenden Maassbestimmung.

Hr. Poincaré construirt, um die sämmtlichen eindeutigen Functionen einer complexen Veränderlichen zu finden, *die durch reelle lineare Transformationen in sich übergehen**). Die grössere Allgemeinheit der Poincaré'schen Construction liegt darin, dass bei ihr die Winkelbedingung minder eng gefasst ist, als bei uns. Aber auch wenn wir unsere beschränktere Fassung einführen, erhalten wir immer noch für jedes Geschlecht p unendlich viele zugehörige Polygone. *Alle diese Polygone definiren uns neue Raumformen constanten negativen Krümmungsmaasses.* In meiner soeben citirten Schrift über Riemann's Theorie etc. sind denn auch (pag. 81 daselbst) hinreichende Andeutungen darüber gegeben, wie man die so erhaltenen einseitigen Raumformen gegebenenfalls zu Doppelmannigfaltigkeiten zusammenbiegen kann.

Dies also ist die Antwort, welche wir auf unsere Frage nach den verschiedenen Raumformen im Falle zweier Dimensionen zu ertheilen haben. Analoge Ueberlegungen werden wir für dreidimensionale Räume durchführen, indem wir geeignete Polyeder construiren. Wir werden da im parabolischen Raume das Parallelepiped etc. in Betracht zu ziehen haben, im hyperbolischen Falle aber die Polyeder, welche Hr. Poincaré in Band 3 der Acta Mathematica untersucht**). Ich verzichte darauf, dies hier in's Einzelne auszuführen, weil dies ausserordentlich viel Raum erfordern würde***). Immer würde ich wünschen, dass die Fragestellung von anderer Seite aufgenommen wird. In der That ist dieselbe ja für die Raumlehre, sofern wir diese mit der Forderung freier Beweglichkeit starrer Körper beginnen wollen, fundamental.

Letztere Forderung ist bekanntlich seinerzeit durch Hrn. v. Helmholtz vorangestellt worden†). Um hier alle Bemerkungen zusammen zu haben, die ich über das solchergestalt zu gründende System der Geometrie zu machen habe, gedenke ich anhangsweise noch der Helmholtz'schen Forderung der *Monodromie* des Raumes. Dieses neue Postulat verlangt zunächst, dass überhaupt volle Umdrehung um eine Axe möglich sein soll; es werden dadurch z. B. die Räume mit indefinitem Bogenelemente ausgeschlossen. Dieser Theil des Postulates ist gewiss gerechtfertigt und soll hier unerörtert bleiben. Aber Hr. v. Helmholtz giebt seinem Postulate eine weitergehende Bedeutung,

---

*) Vergl. etwa Acta Mathematica I (1882): *Mémoire sur les groupes fuchsiens.*

**) *Mémoire sur les groupes kleinéens* (1883).

***) Was den Begriff der Doppelmannigfaltigkeit im Falle dreier Dimensionen angeht, so vergl. die bereits citirte Abhandlung von Hrn. Dyck in Bd. 32 der math. Annalen.

†) *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Bd. 4 d. Verh. d. naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg, 1866; *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Göttinger Nachrichten 1868.

indem er der Möglichkeit gedenkt, dass bei voller Umdrehung des Raumes um eine Axe sich die Abstände der Punkte von der Axe vielleicht nicht ungeändert reproduciren. In der That hat Hr. v. Helmholtz *für den Fall zweier Variabelen* am Schlusse seiner Mittheilung in den Göttinger Nachrichten eine mit drei Parametern ausgestattete Transformationsgruppe angegeben, welche übrigens alle Eigenschaften einer (Euklidischen oder Nicht-Euklidischen) Bewegungsgruppe hat, aber die hiermit bezeichnete Möglichkeit realisirt. Wir sehen dies sofort, indem wir uns die Transformationen der Gruppe etwa folgendermassen anschreiben:

$$(x' + iy') = e^{(m+in)\varphi} \cdot (x + iy) + a + ib.$$

Hier sind φ, a, b die drei Parameter, m und n aber bedeuten zwei *nicht verschwindende* Constante. *Die Forderung der Monodromie läuft nun insbesondere auch darauf hinaus, derartige Gruppen auszuschliessen.* Demgegenüber muss constatirt werden, *dass Gruppen der gewollten Eigenschaft überhaupt nur bei zwei Dimensionen existiren* (so dass also für Räume von drei und mehr Dimensionen die Forderung der Monodromie in ihrem zweiten, hier allein in Discussion stehenden Theile gegenstandslos ist). Einen ausführlichen Beweis hierfür giebt Hr. Lie in den Leipziger Berichten von 1886*). Ich meinerseits möchte hier auf eine einfache Ueberlegung aufmerksam machen, aus welcher das Gleiche ohne alle Rechnung folgt. Die Sache ist, dass bei drei und mehr Dimensionen *positive* und *negative* Drehung um eine Axe nothwendig *gleichberechtigte* Operationen sind. Denn man kann in einem solchen mehrdimensionalen Raume die Axe, um welche gedreht wird, unter Festhaltung eines ihrer Punkte selber drehen, bis sie in umgekehrter Richtung in ihre ursprüngliche Lage hineinfällt: dann hat sich Drehung rechts herum von selbst in Drehung links herum verwandelt. Würden nun etwa bei Drehung rechts herum die Abstände der Raumpunkte von der Axe vergrössert, so müsste dies auch bei Drehung links herum, d. h. bei der inversen Operation, der Fall sein, was ein Widerspruch ist.

III.

Von der rein projectiven Begründung der analytischen Geometrie.

Meine Entwickelungen in Band 4 und 6 dieser Annalen, denen zufolge die projective Geometrie auch in ihrer analytischen Form vor Entscheidung über die Frage des Parallelenaxioms soll aufgestellt werden können, ruhen wesentlich auf dem Nachweise v. Staudt's, dass man den Zahlbegriff in die Geometrie auf Grund blosser projec-

*) Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

tiver Constructionen einführen kann, ohne irgend von Maass und Messen zu sprechen. Trotzdem hierüber in den letzten 20 Jahren Vieles von verschiedenen Seiten geschrieben ist, scheinen doch noch immer besondere Schwierigkeiten dem Verständnisse entgegen zu stehen, wie ich schon in der Einleitung bemerkte. Vielleicht liegt dies an der *Unanschaulichkeit* des ursprünglichen v. Staudt'schen Verfahrens, bei welchem abstracte Definitionen vorangestellt werden und dem Leser selbst überlassen bleibt, wie er eine Uebersicht der schliesslich nöthig werdenden Operationen gewinnen will. Diese Unanschaulichkeit liegt aber, hier wie in anderen Theilen der Geometrie, keineswegs im Wesen der Sache. Vielmehr gelingt es, wie ich hier zeigen möchte, an einer einzigen einfachen Figur gleichzeitig die Einführung der Zahlen und die Grundsätze, nach welchen mit denselben zu operiren ist, deutlich zu machen.

Es wird gut sein, die so bezeichnete Aufgabe von vorneherein nach verschiedenen Seiten zu umgränzen. Zielpunkt ist uns der allgemeine Nachweis, dass man durch bestimmte projective Construction auf jedem Grundgebilde erster Stufe (also, um uns auf die Ebene zu beschränken, auf jedem Strahlbüschel und auf jeder geraden Punktreihe der Ebene) *eine Werthevertheilung x derart angeben kann, dass zwischen den x, x' zweier Grundgebilde, die projectiv auf einander bezogen sind, eine lineare Relation* $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ *statt hat.* Nun wird aber die beabsichtigte Scalenconstruction sich wegen ihres projectiven Charakters von einem ersten Grundgebilde sofort auf jedes andere, mit ihm projectiv verbundene übertragen. Daher können wir den beabsichtigten Nachweis auf die Betrachtung eines einzigen Grundgebildes einschränken, in der Weise, dass wir zeigen: *Wie immer wir auf einem solchen Grundgebilde zwei projective Scalen x, x' construiren mögen, immer stehen dieselben in linearer Abhängigkeit.* Aber auch diesen Ansatz werden wir noch modificiren. Ein einfacher Ueberschlag wird uns lehren, dass bei der von uns auszuführenden Scalenconstruction drei willkürliche Constante benutzt werden. Ebenso viele wesentliche Constante sind in der Formel $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ enthalten. Wir können daher unsere Forderung umkehren und den Nachweis verlangen, *dass wir zu jeder Werthevertheilung x, die wir auf einem festen Grundgebilde erster Stufe durch unsere projective Construction gewinnen mögen, durch Veränderung der Grundelemente unter Wiederholung unserer Construction eine Werthevertheilung x' hinzu construiren können, die zu ihr in irgendwelcher vorgegebener linearer Abhängigkeit* $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ *steht.*

Dieser letzte Beweis soll nun wirklich erbracht werden, indem

wir als festes Grundgebilde ein *Strahlbüschel* der Ebene nehmen (was den Vortheil bietet, dass uns unabhängig von der Ansicht, die wir uns vom Parallelenaxiom bilden mögen, alle seine Elemente zugänglich sind). Dabei wird es sich, was die Construction irgend welcher Scala x angeht, selbstverständlicherweise nur darum handeln können: jedem *rationalen* Werthe von x ein Element unseres Grundgebildes zuzuweisen, wobei wir den Nachweis verlangen, dass die so entstehenden „rationalen" Elemente des Gebildes auf diesem nach der Grösse des zugehörigen x geordnet sind und in ihrer Gesammtheit das Gebilde „überall dicht" überdecken. Aber auch die Forderung, die wir betreffs der Formel $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ stellten, werden wir entsprechend einschränken. Wir werden dieselbe nämlich ausschliesslich unter der Voraussetzung behandeln, dass die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *commensurabel* sind; wir geben dem Ausdruck, indem wir statt der allgemeinen Formel lieber gleich die folgende hinschreiben:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

in welcher a, b, c, d *ganze Zahlen* bedeuten sollen. Die Determinante $(ad - bc)$, die selbstverständlich nicht verschwinden soll, setzen wir weiterhin $= p$. — Die so umgränzten Constructionen und Beweise werden dann so durchzuführen sein, dass wir immer wieder *den v. Staudt'schen Satz von der Vierseitsconstruction* gebrauchen, durch den wir irgend drei in bestimmter Reihenfolge genommenen Elementen unseres Grundgebildes jeweils ein viertes, welches wir das *harmonische* Element nennen, zuordnen können.

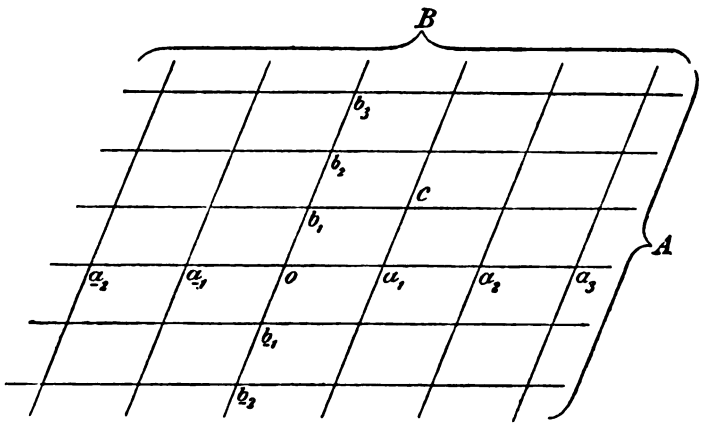


Fig. 4.

Die Figur, die ich mir jetzt construirt denke, ist die projective Verallgemeinerung des gewöhnlichen Parallelogramm-Netzes (Fig. 4).

Die betreffende Verallgemeinerung bietet sich unmittelbar, sobald man bemerkt, dass von den in der Figur markirten Punkten

$$\ldots\ a_{-2},\ a_{-1},\ 0,\ a_{+1},\ a_{+2},\ \ldots$$

je drei aufeinanderfolgende zu dem unendlich fernen Elemente A, von den ebenfalls angegebenen Punkten

$$\ldots\ b_{-2},\ b_{-1},\ 0,\ b_{+1},\ b_{+2},\ \ldots$$

je drei aufeinanderfolgende zu dem unendlich fernen Elemente B harmonisch sind. Statt längerer Erläuterung schalte ich hier das Beispiel einer so verallgemeinerten Figur ein:

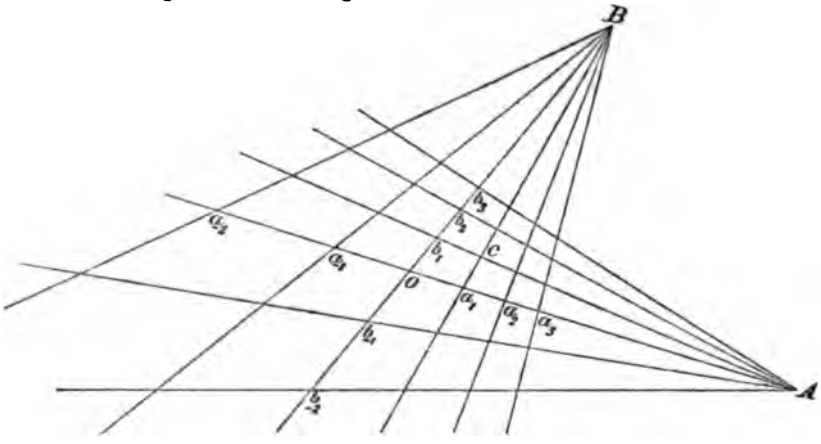


Fig. 5.

Offenbar können wir bei ihrer Construction vier Punkte, z. B. 0, a_{+1}, b_{+1}, c, beliebig annehmen; alle weiteren Punkte sind dann eindeutig bestimmt. Wir nennen jetzt den Punkt, in welchem sich die Strahlen Ba_m, Ab_n kreuzen, den Punkt (m, n); m und n sind dabei irgend zwei (positive oder negative) ganze Zahlen. Man sieht dann in Fig. 4 durch elementargeometrische Ueberlegungen:

Sind m, n; m', n'; ϱ irgend welche ganze Zahlen, so liegen die Punkte (m, n), (m', n'), $\big(m + \varrho(m' - m),\ n + \varrho(n' - n)\big)$ auf gerader Linie.

Eben denselben Satz werden wir bei Figur 5 durch wiederholte Anwendung des Satzes vom Vierseit beweisen können.

Hiermit haben wir nun alle Hülfsmittel, um für das von 0 auslaufende Strahlbüschel der Fig. 5 alle von uns postulirten Entwickelungen zu machen. Offenbar liegen je zwei Punkte (m, n) und $(\varrho m, \varrho n)$ mit 0 auf gerader Linie. *Eben dieser Linie als einem Elemente des von* 0 *auslaufenden Strahlbüschels legen wir jetzt den Zahlenwerth $x = m/n$ bei.* Wir erhalten so für jeden rationalen Werth von x einen Strahl, und dass diese „rationalen" Strahlen im Büschel ebenso

auf einander folgen, wie die der Grösse nach geordneten zugehörigen x, ferner dass sie das Büschel „überall dicht" überdecken, dürfte durch den blossen Anblick unserer Figur deutlich sein. Nicht minder ist auf Grund einfacher projectiver Ueberlegungen klar, dass die so gewonnene Werthevertheilung x von drei willkürlichen Parametern abhängt, dass sie nämlich völlig festgelegt ist, wenn wir die drei Strahlen OA, OB, OC, die beliebig ausgewählt werden dürfen, in bestimmter Weise angenommen haben. Wir können also gleich zum zweiten Theile unserer Entwickelung übergehen. Wir verlangten zu zeigen, dass wir zur ersten Scala x für die Strahlen unseres Büschels, unter Festhaltung der einmal gewählten Constructionsweise, eine neue Scala x' hinzuconstruiren können, die mit ihr durch irgendwelche Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ verbunden ist (unter a, b, c, d ganze Zahlen von nicht verschwindender Determinante verstanden, die wir gleich p setzten).

Dieser Nachweis ist nun in speciellen Fällen, die ich hier vorab bespreche, wenn nämlich eine der folgenden drei Formeln vorgelegt ist:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x' = \frac{x}{p}, \quad x' = x + 1$$

durch blossen Anblick der Figur 5 zu erbringen (man orientire sich vielleicht vorab jedesmal an der Figur 4, die unseren Gewöhnungen besser entgegenkommt). Wollen wir z. B. $x' = \frac{1}{x}$ construiren, werden wir Fig. 5 als solche ganz unverändert lassen und nur die ihr beigesetzten Buchstabenreihen a, b vertauschen. Wollen wir $x' = \frac{x}{p}$ haben, so werden wir die Punkte b und die Linien Ab der Figur ungeändert lassen, dagegen von den Punkten a (und also den Linien Ba) nur diese beibehalten:

$$\ldots\ a_{-2p},\ a_{-p},\ O,\ a_{+p},\ a_{+2p},\ \ldots$$

und sie mit

$$\ldots\ a'_{-2},\ a'_{-1},\ O,\ a'_{+1},\ a'_{+2},\ \ldots$$

bezeichnen. Nicht minder construiren wir die Scala $x' = x + 1$ durch eine Figur der von uns betrachteten Art, deren Lage gegen Fig. 5 ohne Weiteres ersichtlich sein dürfte.

Und nun ist das Schöne, *dass, aus arithmetischen Gründen, mit diesen speciellen Fällen der allgemeine von uns zu erbringende Nachweis bereits von selbst mit erledigt ist.* In der That ist es ein bekanntes Theorem der Arithmetik (welches z. B. in der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen immerzu benutzt wird*)), dass man jede Substitution:

*) Vergl. z. B. Dedekind im 83. Bande des Journals für Mathematik, p. 287 ff.

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

aus den speciellen Substitutionen:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x' = \frac{x}{p}, \quad x' = x+1$$

durch eine *endliche* Zahl von Wiederholungen, bez. Combinationen erzeugen kann. Jeder einzelne dieser Schritte bedeutet aber die Ersetzung der ursprünglichen Figur 5 durch eine neue derselben Art; dieselbe Bedeutung hat also die allgemeine Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, was zu beweisen war.

IV.

Von der principiellen Bedeutung der projectiven Geometrie, nebst allgemeinen Bemerkungen über die geometrischen Axiome.

In meinen Abhandlungen in Bd. 4 und 6 habe ich nirgends die Frage berührt, in welchem Sinne es psychologisch berechtigt erscheint, die projective Geometrie vor der Geometrie des Maasses zu entwerfen und geradezu als Grundlage der letzteren zu betrachten. Hierauf dürfte etwa Folgendes zu antworten sein:

Wir können zwischen *mechanischen* und *optischen* Eigenschaften des Raumes unterscheiden. Erstere finden in der freien Beweglichkeit starrer Körper ihren mathematischen Ausdruck, letztere in der Gruppirung der den Raum durchziehenden geraden Linien (der Lichtstrahlen, oder der vom Auge ausgehenden Visirlinien). Es handelt sich nun hier nicht um die Frage, wie überhaupt unsere Raumvorstellung entsteht (oder im Laufe der Generationen entstanden ist): Niemand wird wohl zweifeln, dass mechanische und optische Erfahrungen dabei zusammenwirken oder zusammengewirkt haben. Vielmehr handelt es sich darum, ob man beim methodischen Aufbau der Raumwissenschaft die Eigenschaften der einen oder der anderen Art voranstellen soll. Durch Hrn. v. Helmholtz sind, wie wir ausführlich besprachen, die mechanischen Eigenschaften bevorzugt worden: meine Arbeiten zeigen, dass man ebensowohl mit den optischen Eigenschaften beginnen kann. Beiderlei Entwickelungen können neben einander bestehen; eine jede von ihnen hat ihre besonderen Vorzüge. Wenn es für den Anfänger fasslicher sein mag, mit den starren Körpern und ihrer Congruenz zu beginnen, so giebt uns die projective Methode bessere Uebersicht. Ich möchte, um dies zu belegen, geradezu auf die Entwickelungen der Nr. II zurückverweisen. Alle die Unterscheidungen, die ich dort bespreche: zwischen dem elliptischen und sphärischen Raume und den anderen Raumformen, ergeben sich bei Zugrundelegung der projectiven

Anschauung wie von selbst, während es eines hohen Maasses von Abstraction bedürfen möchte, um auf dem anderen Wege zu denselben zu gelangen. —

Zum Schlusse noch einige Worte über das Wesen der geometrischen Axiome überhaupt. In der *mathematischen* Literatur zum Mindesten scheint mir betreffs derselben fast allgemein eine Ansicht verbreitet*), welche von derjenigen abweicht, die ich für richtig halte, und von der ich in meinen früheren hierher gehörigen Arbeiten Gebrauch gemacht habe, ohne mir des Widerspruchs gegen andere Meinungen deutlich bewusst zu sein. Die betreffende Ansicht geht dahin, dass die Axiome die „Thatsachen" der räumlichen Anschauung formuliren und zwar so vollständig formuliren, dass es bei geometrischen Betrachtungen unnöthig sein soll, auf die Anschauung als solche zu recurriren, es vielmehr genügt, sich auf die Axiome zu berufen. Ich möchte zunächst jedenfalls den zweiten Theil dieses Satzes bestreiten. Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich. Man verweist in dieser Hinsicht ja wohl auf das Verfahren der analytischen Geometrie. Aber eine bloss rechnende analytische Geometrie, welche von den Figuren abstrahirt, kann ich ebensowenig als eigentliche Geometrie gelten lassen, wie gewisse Zweige der sogenannten synthetischen Geometrie, die sich nur dadurch von analytischer Geometrie unterscheiden, dass an Stelle der algebraischen Formelsprache eine andere gesetzt ist. — Doch nun zum ersten Theile des Satzes! In meinem Aufsatze über den allgemeinen Functionsbegriff, den ich in der Einleitung citirte, habe ich ausführlich auseinandergesetzt (und hierin stimme ich mit Hrn. Pasch überein), dass ich die räumliche Anschauung als *etwas wesentlich Ungenaues* ansehe, — mag nun von der abstracten Anschauung die Rede sein, wie sie uns durch Gewöhnung geläufig geworden ist, oder von der concreten Anschauung, die bei empirischen Beobachtungen zur Geltung kommt. Das Axiom ist mir nun *die Forderung*, vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung *genaue Aussagen hineinlege*. Eine geometrische Betrachtung aber denke ich mir so, dass wir die Figur, um welche es sich handelt, als solche unablässig vor Augen behalten, und uns dann in jedem Augenblicke, in welchem es sich um scharfe Beweisführung handelt, auf die Axiome als festes logisches Substrat zurückbeziehen. — Der *Inhalt der Axiome* erscheint bei dieser Auffassung so weit will-

*) Ich möchte hier insbesondere auf die *Vorlesungen über neuere Geometrie* von M. Pasch verweisen (Leipzig, 1882), insofern die Grundanschauungen, von denen Hr. Pasch ausgeht, mit meinen eigenen sehr gut übereinstimmen, abgesehen eben von der im Texte näher zu erläuternden Differenz hinsichtlich der Bedeutung der Axiome.

kürlich, als mit der Ungenauigkeit unserer Raumanschauung verträglich ist. Eben hierin, aber auch nur hierin, ruht für mich die Berechtigung der Nicht-Euklidischen Geometrie (unter Nicht-Euklidischer Geometrie die reale Disciplin und nicht bloss die abstracten mathematischen Betrachtungen verstanden, zu denen dieselbe Anlass gegeben hat). Uebrigens ist es von diesem Standpunkte aus selbstverständlich, dass wir unter gleichberechtigten Systemen von Axiomen jeweils das einfachste bevorzugen und eben darum zumeist mit der Euklidischen Geometrie operiren, welche für die gewöhnlichen Fragestellungen die einfacheren Aussagen liefert. — Was aber die *Entstehung der Axiome* angeht, so weiss ich darüber nichts weiter zu sagen, als dass wir die zu ihnen führende Abstraction hier wie in anderen Gebieten unwillkürlich vollziehen. Das, was in der Anschauung oder im Experimente nur approximativ gegeben ist, das formuliren wir in exacter Weise, weil wir anderenfalls damit nichts anzufangen wissen. — Hiermit ist denn auch die Stellung gegeben, die ich zur Theorie des *Irrationalen* einnehme. Sicher liegt die *Veranlassung* zur Bildung der Irrationalzahlen in der scheinbaren Stetigkeit der Raumanschauung. Ich kann aber, da ich der Raumanschauung keine Genauigkeit beilege, ihr auch nicht die *Existenz* des Irrationalen entnehmen wollen. Vielmehr ist mir die Theorie des Irrationalen etwas, was in rein arithmetischer Weise zu begründen oder zu umgränzen ist, und was wir dann, dank den Axiomen, in die Geometrie hineintragen, um auch in ihr diejenige Schärfe der Distinctionen zu erreichen, welche die Vorbedingung der mathematischen Behandlung ist.

Göttingen, den 20. August 1890.

Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Nachstehend entwickele ich einige Betrachtungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$F(l, m, n, x) = 1 + \frac{l \cdot m}{1 \cdot n} x + \frac{l \cdot l+1 \cdot m \cdot m+1}{1 \cdot 2 \cdot n \cdot n+1} x^2 + \cdots,$$

welche darin gipfeln, dass ich die Anzahl der Nullstellen bestimme, die F zwischen $x = 0$ und $x = 1$ besitzt. Ich hoffe, dass nicht nur das so erhaltene Resultat einiges Interesse erregt*), sondern auch die zur Herleitung desselben angewandte Methode. Irre ich nicht, so wird diese Methode bei der ferneren Untersuchung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung noch mannigfache Dienste leisten können.

§ 1.

Von der charakteristischen Zahl X, welche einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich eines Intervalls zukommt.

Sei irgend welche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung vorgelegt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \cdot \frac{dy}{dx} + q \cdot y = 0, \tag{1}$$

deren Coefficienten p, q zunächst nur der einen Bedingung unterworfen sein sollen, *reell* zu sein (wie wir denn überhaupt zunächst nur reelle Werthe auch der Variabeln x, y in Betracht ziehen). Wir grenzen auf der X-Axe irgend ein Intervall AB ab, welches weder einen singulären Punkt von (1) enthalten noch an einen solchen heranreichen soll, und betrachten den Verlauf, welchen irgend welche reelle Lösung

*) In der That dürfte dieses Resultat neu sein; es scheint nicht, dass die im Texte bezeichnete Frage, trotz ihrer Einfachheit, bisher von anderer Seite behandelt wurde; von speciellen Fällen, wie Kugelfunctionen etc. natürlich abgesehen. — Stieltjes in Bd. 100 der Comptes Rendus (1885) und Hilbert in Bd. 103 des Journals für Mathematik (1887) behandeln den Fall der mit einer endlichen Gliederzahl abbrechenden hypergeometrischen Reihe.

y von (1) in diesem Intervalle nimmt. Wird y im genannten Intervalle, indem es immer wieder durch Null hindurchgeht, auf und ab oscilliren, oder wird es, wenn überhaupt, nur einmal zu Null werden? Und wie gross wird im ersteren Falle die Zahl der in unser Intervall fallenden Nullstellen sein?

Die so bezeichneten Fragen liegen jedenfalls ausserordentlich nahe. Aber es scheint, dass dieselben seit den schönen Untersuchungen von Sturm in den Bänden 1 und 2 von Liouville's Journal (1836—37) kaum mehr ernstlich bearbeitet worden sind. Sturm giebt dort u. a. das wichtige Theorem, *dass die Nullstellen irgend zweier linear-unabhängiger Lösungen y_1, y_2 von* (1) *im Intervalle AB nothwendig abwechseln* (so dass also in unserem Intervalle die Wurzeln der Gleichung $y_1 = 0$ von denjenigen der Gleichung $y_2 = 0$ separirt werden, und umgekehrt). Anschliessend hieran will ich dem Intervalle AB bezüglich der Differentialgleichung (1) eine bestimmte *charakteristische Zahl* zuordnen, welche fernerhin mit X bezeichnet werden soll. Sei nämlich y_2 eine solche Lösung von (1), welche in dem einen Endpunkte des Intervalls, etwa in A, verschwindet. Mit X bezeichne ich sodann die Anzahl der Nullstellen, welche dieses y_2 im *Inneren* des Intervalls besitzt (so dass also nicht nur die Nullstelle in A nicht mitgezählt wird, sondern auch nicht eine etwa nach B fallende Nullstelle). Aus dem Sturm'schen Satze folgt dann sofort, *dass jede andere Particularlösung y_1 von* (1) *innerhalb AB mindestens* X*-mal und höchstens* (X+1)*-mal verschwindet.* Auf dieses X nun richten wir unsere Fragestellung. Wir werden verlangen dürfen, *bei irgendwelcher gegebenen Differentialgleichung* (1) *für jedes Intervall AB die Zahl* X *wirklich zu berechnen.* Die so bezeichnete Problemstellung wird sofort noch ein wenig erweitert werden, übrigens in der vorliegenden Arbeit nur im ganz speciellen Falle zur Erledigung gelangen.

§ 2.

Einführung des Quotienten $y_1 : y_2 = \eta$.

Unter y_1, y_2 mögen wieder zwei solche Particularlösungen von (1) verstanden werden, wie wir sie gerade betrachteten, so also, dass y_1 von y_2 linear unabhängig ist, und y_2 im Punkte A verschwindet. Der bestimmteren Ausdrucksweise halber will ich noch annehmen, dass y_1 im Punkte A negativ sei, während y_2 von A beginnend positive Werthe annehmen mag. Wir bilden uns den Quotienten $y_1 : y_2 = \eta$ und fragen, wieso in den Werthen, die er längs des Intervalls AB annimmt, die charakteristische Zahl X zur Geltung gelangt. Offenbar beginnt η bei $x = A$ mit dem Werthe $-\infty$ und geht, während x von A bis B läuft, im Ganzen X-mal durch ∞ hindurch. Aber zwischen je zwei

aufeinanderfolgenden Unendlichkeitsstellen unseres η liegt dem Sturm'schen Satze zufolge eine und nur eine Nullstelle derselben. Wir verallgemeinern dies leicht, indem wir neben y_2 und y_1 irgend eine lineare Combination $y_1 - Cy_2$ ins Auge fassen und auf sie nnd y_2 den Sturm'schen Satz anwenden. Wir erkennen dann, dass η zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Unendlichkeitsstellen überhaupt jeden reellen Werth C einmal und nur einmal annimmt. *Während x von A bis B läuft, läuft hiernach η, ohne zwischendurch umzukehren oder auch nur stehen zu bleiben, immer wiederholt von $-\infty$ bis $+\infty$. Und zwar vollendet es diesen Weg im Ganzen* X-*mal*, — eine Aussage, bei welcher der Endpunkt B als nicht mehr unserem Intervalle angehörig angesehen wird, weil sonst in dem besonderen Falle, dass B Nullstelle für y_2 ist, $(X+1)$ Durchlaufungen der genannten Werthereihe zu zählen sein würden.

An die so gewonnene neue Bedeutung des X knüpft nun sofort die Verallgemeinerung, welche wir gerade in Aussicht stellten. Ich will annehmen, dass unsere Differentialgleichung (1) eine Reihe reeller singulärer Punkte besitzen möge, die mit $x = a$, $x = b$, ... bezeichnet sein sollen. Ich setze ferner der Einfachheit halber voraus, dass sich die Lösungen unserer Differentialgleichung in einem solchen Punkte nicht nur *regulär* verhalten, sondern zu *reellen* Exponenten gehören. Wir können dann von dem Werthe, den der Quotient η irgend zweier Particularlösungen y_1, y_2 von (1) im singulären Punkte annimmt, als von einer wohldefinirten Grösse sprechen. Nun können wir y_1, y_2 im Allgemeinen nicht so wählen, dass das eine in $x = a$ von Null verschieden ist, das andere verschwindet: wir können sie aber so aussuchen, dass ihr Quotient $y_1 : y_2 = \eta$ bei $x = a$ *unendlich* wird, oder, um es bestimmter zu sagen, *negativ unendlich* wird, wenn wir aus unserem Intervalle auf den Punkt $x = a$ zuschreiten. In Folge dessen können wir jetzt die Definition unseres X *auf solche Intervalle ausdehnen, die einerseits oder auch beiderseits an einen singulären Punkt heranreichen*. Wir wählen einfach ein solches η, welches in dem einen Endpunkte des Intervalls (der mit dem singulären Punkte a zusammenfallen mag) negativ unendlich wird, und *zählen ab, wie oft dasselbe, während x von a ausgehend das Intervall überstreicht, seinerseits den Weg von $-\infty$ bis $+\infty$ vollendet*. Den anderen Endpunkt des Intervalls betrachten wir dabei natürlich, um mit unseren bisherigen Festsetzungen in Uebereinstimmung zu bleiben, als selbst dem Intervall nicht mehr zugehörig.

Hiermit bietet sich zugleich eine erste Einschränkung der Fragestellung des vorigen Paragraphen. Es seien a, b, c, ..., n die aufeinanderfolgenden singulären Punkte, welche die X-Axe trägt. Dann interessiren uns von allen Intervallen, die man auf der X-Axe abgrenzen

kann, jedenfalls die am meisten, *die von einem singulären Punkte zum nächstfolgenden hinreichen*, d. h. die Intervalle $ab, bc, \ldots, na$ selbst. Wir wollen unsere anfängliche Forderung also dahin einschränken, dass wir bei gegebener Differentialgleichung (1) nur für diese Intervalle die Bestimmung des zugehörigen X verlangen.

§ 3.

Inbetrachtnahme complexer Werthe der Variabeln.

Wir ziehen jetzt neben den reellen Werthen von x und q beliebige complexe Werthe derselben in Betracht und denken uns diese in einer X-Ebene, bez. H-Ebene gedeutet. Zugleich wollen wir betreffs der Differentialgleichung (1) einige vereinfachende Annahmen machen. Wir wollen nämlich fortan voraussetzen, die Coefficienten p, q in (1) seien *rationale* Functionen von x, wohlverstanden rationale Functionen mit reellen Coefficienten (damit die anfängliche Forderung *reeller* p, q aufrecht erhalten bleibt), und ihre sämmtlichen Unendlichkeitspunkte seien durch Angabe der reellen Unendlichkeitspunkte $a, b, c, \ldots, n$ bereits erschöpft. Wir zerschneiden jetzt die X-Ebene längs ihrer reellen Axe und erhalten so zwei Halbebenen, von denen wir die eine, etwa die positive, der weiteren Betrachtung zu Grunde legen. Wir bezeichnen ferner mit η den Quotienten irgend zweier, nicht nothwendig reeller Particularlösungen von (1). So können wir *das conforme Abbild*, welches ein solches η von der Halbebene X entwirft, nach den Untersuchungen von Hrn. Schwarz*) sehr einfach bezeichnen. *Dasselbe stellt nämlich ein Kreisbogen-n-Eck vor, dessen Ecken den singulären Punkten $a, b, \ldots, n$ der X-Axe entsprechen; die Eckenwinkel sind beziehungsweise $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi, \ldots$, unter $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ die Exponentendifferenzen verstanden, welche zu den einzelnen singulären Punkten zugehören.* — Ersetzen wir das anfänglich gewählte η durch irgend ein anderes, so bedeutet dies einfach den Uebergang zu einem kreisverwandten Polygone. Wir wollen nun festsetzen, dass fernerhin kreisverwandte Figuren als nicht wesentlich verschieden gelten sollen. Dann wird also zwischen den Polygonen verschiedener Particularlösungen η nicht weiter zu unterscheiden sein; wir können vielmehr schlechtweg von *dem Kreisbogenpolygon der η-Ebene* sprechen.

Und wie werden nun in der Gestalt dieses Polygons die charakteristischen Zahlen X hervortreten, die wir am Schlusse des vorigen

*) Vergl. insbesondere dessen Abhandlung (die auch den folgenden Entwickelungen des Textes durchweg zu Grunde liegt): *Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist* (Bd. 75 des Journals für Mathematik, 1871—72, oder auch Gesammelte mathematische Abhandlungen [Berlin bei Springer, 1890], Band 2).

Paragraphen des Näheren bezeichneten? Das zum Intervalle ab gehörige X (um nur von diesem zu sprechen) bedeutete dort die Anzahl von Malen, dass ein in bestimmter Weise gewähltes η, von $-\infty$ beginnend, längs der reellen Axe der η-Ebene nach $+\infty$ hinlief, während sich x von a bis b bewegte. Das allgemeine η (welches eine kreisverwandte Figur beschreibt) wird augenscheinlich unterdessen, von irgend welchem Werthe beginnend, eine bestimmte Kreisperipherie X-mal überstreichen. *Das* X *unseres Intervalles* ab *erscheint also als die Anzahl von Malen, dass die zugehörige Seite des Polygons der* η*-Ebene eine volle Kreisperipherie umspannt, oder, was dasselbe ist, als die Anzahl von Malen, dass die betreffende Polygonseite sich selbst überschlägt.* Dabei müssen wir natürlich eine Festsetzung treffen, welche der früheren Verabredung, dass der Endpunkt b nicht mit zum Intervalle gezählt werden sollte, entspricht. Sollte nämlich der Endpunkt unserer Kreisbogenseite mit dem Anfangspunkte derselben zusammenfallen, so werden wir das doch nicht als volle Umspannung einer Kreisperipherie gelten lassen und bei der Berechnung des X also nicht mitzählen.

So hat denn die Fragestellung des § 2 eine sehr anschauliche Form angenommen: *Wir sollen das Polygon der* η*-Ebene (mit den Winkeln* $\lambda\pi$, $\mu\pi$, ...) *betrachten und zusehen, wie gross die Anzahl voller Kreisperipherieen ist, die im Sinne der gerade getroffenen Verabredung von jeder Seite dieses Polygons umspannt wird.*

§ 4.

Specieller Ansatz für die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

Wir specialisiren jetzt unsere Betrachtungen auf den einfachsten Fall, der allein hier zur Erledigung kommen soll, indem wir nämlich an Stelle von (1) insbesondere die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe $F(l, m, n, x)$ setzen. Bekanntlich hat diese Differentialgleichung nur drei singuläre Punkte:

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad c = 1 \tag{2}$$

und in ihnen als Exponenten:

$$\begin{cases} \lambda' = 0, & \mu' = l, & \nu' = 0, \\ \lambda'' = 1 - n, & \mu'' = m, & \nu'' = n - l - m; \end{cases} \tag{3}$$

die hypergeometrische Reihe $F(l, m, n, x)$ bezeichnet diejenige Particularlösung, welche in der Umgebung des Punktes a (d. h. des Punktes $x = 0$) dem Exponenten $\lambda' = 0$ zugehört. Ich will hier die zugehörigen Exponentendifferenzen gleich als wesentlich positive Grössen einführen und schreibe in diesem Sinne unter Verwendung aufrechter Klammern:

$$\lambda = |1 - n|, \quad \mu = |l - m|, \quad \nu = |n - l - m|. \tag{4}$$

Das Polygon der η-Ebene wird ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Und nun ist die einfache Aufgabe, zuzusehen, *wie oft sich bei einem solchen Dreiecke die einzelnen Kreisbogenseiten überschlagen mögen*, oder, wenn wir die Sache anschauungsmässig ins Einzelne ausgestalten wollen: *klar zu entwickeln, wie ein Kreisbogendreieck mit irgendwelchen Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ gestaltet ist.* Um den Sinn der letzteren Frage richtig zu verstehen, müssen wir uns vor Augen halten, dass unsere λ, μ, ν beliebig grosse positive Zahlen sein können, so dass wir ganz wesentlich auch solche Kreisbogendreiecke zu betrachten haben, *bei denen in den Ecken Windungspunkte liegen.* Uebrigens besitzt unsere Frage durchaus elementargeometrischen Charakter: indem wir uns unser Dreieck in bekannter Weise durch stereographische Projection auf die Kugel übertragen denken, können wir die sogleich zu gebende Erledigung unserer Aufgabe geradezu als *einen Beitrag zur sphärischen Trigonometrie* bezeichnen*).

Jedenfalls giebt uns die analytische Fragestellung, von der wir ausgehen, zur Behandlung dieser geometrischen Aufgabe einen ersten wesentlichen Ansatz. In (4) können die λ, μ, ν ganz beliebig angenommen werden. *Desshalb muss es für jedes Werthetripel λ, μ, ν zugehörige Kreisbogendreiecke wirklich geben.* Ich will doch die Differentialgleichung dritter Ordnung hersetzen, der das betreffende η genügt. Dieselbe lautet bekanntlich:

$$(5)\qquad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{x^2} + \frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{2}}{x(1-x)}.$$

Jetzt kommt man auf diese Differentialgleichung mit Nothwendigkeit,

*) Ich verstehe hier unter „sphärischer Trigonometrie" überhaupt die Lehre von denjenigen Kugelfiguren, die von drei Ebenen umgränzt werden. Die gewöhnliche Voraussetzung der niederen sphärischen Trigonometrie, dass sich nämlich diese drei Ebenen im Mittelpunkte der Kugel schneiden, lässt sich bekanntlich immer durch Anwendung einer geeigneten Kreisverwandtschaft realisiren, sofern sich nur die Ebenen in einem Punkte des Kugelinneren treffen. Zieht man dagegen Ebenen in Betracht, die sich auf der Kugel oder gar ausserhalb derselben treffen, so wird man das eine Mal die Formeln der ebenen Trigonometrie, das andere Mal diejenigen der pseudosphärischen Trigonometrie zu verwenden haben. Die Fragestellung des Textes steht oberhalb dieser Unterscheidungen, sie bezeichnet einen Punkt, in welchem die genannten dreierlei Trigonometrieen gleichförmig unvollständig sind. Sämmtliche Trigonometrieen gehen nämlich stillschweigend von der Annahme aus, dass kein Dreieckswinkel $> 2\pi$ sei und dass keine Dreiecksseite mehr als eine volle Kreislinie umspanne. In Folge dessen beschränken sie sich darauf, die gegenseitige Abhängigkeit der „trigonometrischen Functionen" der Winkel und Seitenlängen nachzuweisen. Die Ergänzung, welche durch die im Texte zu gebenden Entwickelungen hinzukommt, bezieht sich darauf, dass auch die absoluten Beträge der Winkel und Seitenlängen (die sich nicht durch Sinus und Cosinus festlegen lassen) in Abhängigkeit gesetzt werden.

wenn man es unternimmt, ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ derart auf unsere Halbebene X abzubilden, dass den Ecken beziehungsweise die Stellen $x = 0, \infty, 1$ entsprechen. Andererseits drückt sich die allgemeine Lösung von (5) in einer beliebigen Particularlösung η derselben in der Gestalt $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ aus. Wir schliessen: *Haben wir ein erstes Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ construirt, so ergiebt sich aus ihm jedes andere durch Kreisverwandtschaft.* Besonders diesen zweiten Satz brauchen wir im Folgenden immerzu, indem wir uns, wenn es sich um allgemeine Aussagen über Kreisbogendreiecke gegebener Winkel handelt, schlechtweg auf eine einzelne Figur als hinreichenden Beweisgrund beziehen*).

§ 5.

Allgemeines über Kreisbogendreiecke.

Die fernere Behandlung unserer geometrischen Frage gestaltet sich einfacher, als man erwarten sollte. Ich finde, dass man nur zwei Arten von Dreiecken auseinander zu halten hat. Indem ich hier zunächst von den speciellen Formeln (4) absehe, durch die wir die Buchstaben λ, μ, ν ursprünglich eingeführt haben, will ich die λ, μ, ν, durch die wir die Dreieckswinkel festlegen, bis auf Weiteres der Grösse nach geordnet denken:

$$\lambda \geqq \mu \geqq \nu. \tag{6}$$

Dreiecke erster Art sind mir dann solche, bei denen

$$\lambda \leqq \mu + \nu, \tag{7}$$

Dreiecke zweiter Art die anderen, für die

$$\lambda > \mu + \nu. \tag{8}$$

Für beide Arten von Dreiecken entwickele ich hier vor Allem einen arithmetischen Ansatz, den ich als *Reduction* bezeichne.

Um ein Dreieck erster Art zu reduciren, setze ich:

$$\lambda = \beta + \gamma,$$
$$\mu = \gamma + \alpha,$$
$$\nu = \alpha + \beta,$$

und erhalte so in:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\mu+\nu-\lambda}{2}, \\ \beta = \frac{\nu+\lambda-\mu}{2}, \\ \gamma = \frac{\lambda+\mu-\nu}{2} \end{cases} \tag{9}$$

*) Die beiden Sätze des Textes müssen sich natürlich auch elementargeometrisch beweisen lassen; ob dies in gleicher Kürze gelingt?

drei Zahlen, die wegen (6), (7) $\geqq 0$ sind. Die grössten, in α, β, γ beziehungsweise enthaltenen, ganzen Zahlen nenne ich jetzt a, b, c und schreibe dementsprechend:

$$(10) \qquad \alpha = a + \alpha_0, \quad \beta = b + \beta_0, \quad \gamma = c + \gamma_0.$$

Wir setzen ferner:

$$(11) \qquad \lambda_0 = \beta_0 + \gamma_0, \quad \mu_0 = \gamma_0 + \alpha_0, \quad \nu_0 = \alpha_0 + \beta_0.$$

Wir haben dann offenbar

$$(12) \quad \lambda = \lambda_0 + b + c, \quad \mu = \mu_0 + c + a, \quad \nu = \nu_0 + a + b.$$

Hier sind die a, b, c irgend welche positive ganze Zahlen, die λ_0, μ_0, ν_0 aber bedeuten drei Grössen, von denen keine $\geqq 2$ oder grösser als die Summe der beiden anderen wäre. Das Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda_0\pi$, $\mu_0\pi$, $\nu_0\pi$ ist hiernach selbst ein Kreisbogendreieck der ersten Art. Ich bezeichne dasselbe als das zum gegebenen Dreiecke gehörige *reducirte Dreieck*.

Für Dreiecke zweiter Art (8) gestaltet sich die Reduction wesentlich einfacher. Ich verstehe unter m, n die grössten ganzen in μ, ν enthaltenen Zahlen und schreibe:

$$(13) \qquad \lambda = m + n + \lambda_0, \quad \mu = m + \mu_0, \quad \nu = n + \nu_0,$$

wovon $\lambda_0 > \mu_0 + \nu_0$. Wieder bezeichne ich das Dreieck mit den Winkeln $\lambda_0\pi$, $\mu_0\pi$, $\nu_0\pi$ als reducirtes Dreieck. *Ein reducirtes Dreieck zweiter Art ist einfach ein solches Dreieck zweiter Art, dessen kleinere Winkel $< \pi$ sind.* Die Zahlen m, n in (13) bedeuten dabei beliebige positive ganze Zahlen. —

Unsere fernere Aufgabe ist uns jetzt klar vorgezeichnet: wir haben uns deutlich zu machen, was reducirte Dreiecke der einen oder anderen Art geometrisch sind, und insbesondere zuzusehen, was die Formeln (12), (13) geometrisch besagen, durch die wir bez. vom reducirten Dreiecke zum allgemeinen Dreiecke aufsteigen. —

Dabei denken wir uns die Dreiecke, wie schon oben angedeutet wurde, am besten von vornherein auf die Kugel übertragen, und so mögen also auch die folgenden Zeichnungen als stereographische Abbilder sphärischer Figuren aufgefasst werden.

§ 6.

Von den Kreisbogendreiecken der ersten Art.

Hier zunächst eine kleine Musterkarte reducirter Kreisbogendreiecke der ersten Art (auf der jeweils durch Schraffirung angedeutet

ist, welchen Theil der Ebene, bez. der Kugel ich als die Dreiecksfläche ansehen will):

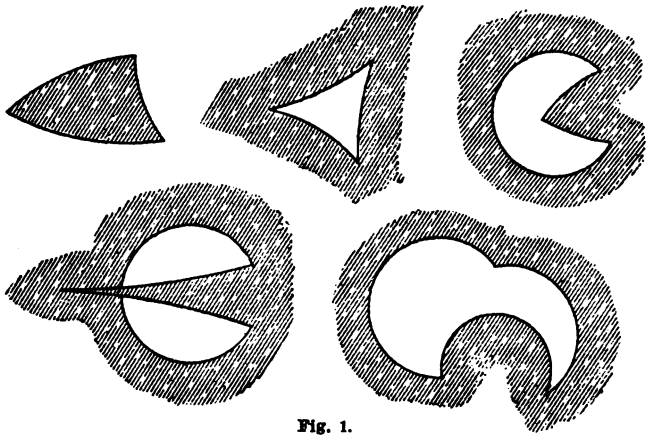


Fig. 1.

Man abstrahirt aus solchen Beispielen die Regel:

Bei einem reducirten Kreisbogendreiecke erster Art kommt es niemals vor, dass sich eine der Dreiecksseiten selbst überschlägt.

Um diese Regel zu beweisen, beachte man Formel (11). Man erhält sämmtliche reducirten Kreisbogendreiecke erster Art, wenn man in ihr die α_0, β_0, γ_0 unabhängig von einander alle Werthe von 0 bis 1 (mit Ausnahme der 1) durchlaufen lässt. *Die Mannigfaltigkeit der reducirten Kreisbogendreiecke erster Art bildet also ein Continuum.* Nun aber giebt es, wie wir gerade sahen, sicher solche reducirte Dreiecke der ersten Art, bei denen sich keine der drei Seiten überschlägt. Sollte es demgegenüber auch Dreiecke erster Art geben, deren Seiten sich (zum Theil, oder alle) überschlagen, so müsste auch die Uebergangsform vorkommen, bei der eine Seite gerade einen vollen Kreis ausmacht, während die beiden anderen noch kleiner als ein Vollkreis sind. Man wird aber vergebens versuchen, eine solche Uebergangsform zu zeichnen: so wie man es zwingen will (vergl. die nebenstehende Figur), so hat man ersichtlich ein Dreieck der zweiten Art:

Fig. 2.

Wir wenden uns jetzt gleich zu den Formeln (12). Offenbar können wir die allgemeinsten Formeln dieser Art in der Weise entstehen lassen,

dass wir a, b, c zuerst alle gleich Null nehmen und sie dann unabhängig von einander beliebig wiederholt um eine Einheit wachsen lassen. Um den durch (12) bezeichneten Process der Reduction geometrisch zu verstehen, werden wir fragen dürfen, was der einzelne hiermit bezeichnete Schritt (d. h. das Anwachsen von a, oder b, oder c je um eine weitere Einheit) geometrisch besagt. Beginnen wir also damit, eine der Grössen, vielleicht a, gleich 1 zu nehmen, während die anderen beiden gleich 0 bleiben. In der nebenstehenden Figur, welche ein reducirtes Dreieck vorstellt, wolle man diejenige Seite in's Auge fassen, die dem Winkel $\lambda_0 \pi$ gegenüberliegt:

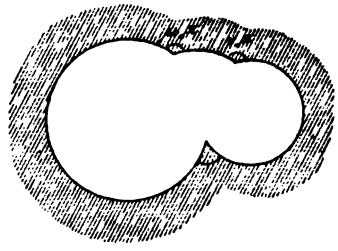


Fig. 3.

Indem wir jetzt a gleich 1 nehmen, sollen wir $\mu_0 \pi$ und $\nu_0 \pi$ in $(\mu_0 + 1)\pi$, bez. $(\nu_0 + 1)\pi$ verwandeln. Das aber heisst offenbar, dass unserem Dreieck eine ganze Kreisscheibe (oder besser gesagt, da wir ja auf der Kugel operiren wollten: eine Kugelcalotte) angehängt wird, wie dies die nachstehende Figur schildert:

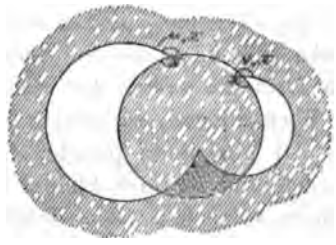


Fig. 4.

Die Dreiecksseite, welche dem Winkel $\lambda \pi$ gegenüberliegt, ist dabei, wie wir kurz sagen dürfen, durch ihr *Complement* ersetzt worden, d. h. durch ein Kreisbogenstück, welches ebensowenig sich überschlägt, wie die ursprüngliche Dreiecksseite selbst. Aber mit dieser Eigenschaft der complementären Seite ist die Möglichkeit gegeben, den gerade ausgeführten Schritt noch einmal zu wiederholen, indem wir a zu 2 werden lassen und also die beiden Winkel gleich $(\mu_0 + 2)\pi$ und $(\nu_0 + 2)\pi$ nehmen. Wir haben jetzt einfach an unsere complementäre Seite eine Kugelcalotte (eine Kreisscheibe) anzuhängen, diejenige, welche in unserer Figur, so wie wir dieselbe gezeichnet haben, das *Aeussere*

des Kreises (μ_0, ν_0) ausmacht. *Die Dreiecksseite ist dadurch wieder die alte geworden, in den sie abschliessenden Ecken liegen jetzt aber Windungspunkte.*

Das neue Dreieck besteht, können wir sagen, aus der Summe des anfänglichen (reducirten) Dreiecks und der einfach gerechneten Gesammtkugelfläche. — Nichts hindert jetzt, die so geschilderten beiden Operationen alternirend beliebig oft zu wiederholen, und so a zu einer beliebig grossen ganzen Zahl anwachsen zu lassen. *Bei jedem neuen Schritte wächst die bis dahin erhaltene Dreiecksfläche erneut um die eine oder die andere Kugelcalotte, und wenn wir das eine Mal die ursprüngliche Dreiecksseite als Begränzung erhalten hatten, so folgt das nächste Mal das Complement, und umgekehrt.* — Ganz ähnlich machen wir es jetzt hinterher mit b und mit c. Die geometrische Operation ist dabei ganz dieselbe, wie beim a, nur dass jetzt die zweite, resp. die dritte Seite des ursprünglichen reducirten Dreiecks in Anspruch genommen und alternirend in ihr Complement verwandelt wird oder in ursprünglicher Form wieder erscheint. —

Der hiermit geschilderte Process ist Alles in Allem so einfach, dass er in der That, wie wir es in Aussicht nahmen, ein völlig anschauliches Bild von der Gestalt des allgemeinen Kreisbogendreiecks erster Art vermitteln dürfte. Uns interessirt dabei natürlich vor allen Dingen, was über die Längen der jedesmaligen Dreiecksseiten ausgesagt werden kann. In dieser Hinsicht haben wir offenbar:

Bei einem Kreisbogendreiecke erster Art bleibt ausgeschlossen, dass sich auch nur eine seiner drei Seiten überschlägt.

§ 7.

Von den Kreisbogendreiecken der zweiten Art.

Die Dreiecke zweiter Art erledigen sich jetzt sehr rasch.

Betrachten wir zuerst, was der einfachste Fall ist, ein Dreieck zweiter Art mit zwei rechten Winkeln (bei dem also $\mu_0 = \nu_0 = \frac{1}{2}$ ist, vergl. die Figur):

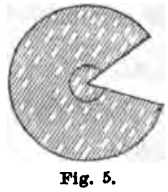


Fig. 5.

Da hat es keine Schwierigkeit, sich den Winkel $\lambda_0 \pi$ beliebig gross (auch $> 2\pi$) zu denken, und es ist offenbar, dass sich dabei die ihm gegenüberliegende Seite

(14) $$E\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)\text{-mal}$$

überschlägt, unter E die grösste ganze Zahl verstanden, welche in $\frac{\lambda_0}{2}$ enthalten ist, oder genauer, da wir es noch nicht als volle Ueberschlagung rechnen wollten, wenn Anfangspunkt und Endpunkt einer Seite gerade zusammenfallen: *unter E die grösste ganze Zahl verstanden, welche von $\frac{\lambda_0}{2}$ überschritten wird.* Die beiden anderen Dreiecksseiten überschlagen sich natürlich nicht.

Von Figur 5 gehen wir nun leicht zu einem reducirten Dreiecke zweiter Art über, bei welchem μ_0 und ν_0 nicht gerade gleich $\frac{1}{2}$ sind. Wir haben einfach entlang einer jeden der beiden kurzen Seiten der Figur 5 (dieser Ausdruck ist ja wohl ohne weitere Erläuterung verständlich) ein Kreissegment entweder wegzunehmen oder auch hinzuzufügen. Ich erläutere hier beides durch eine Figur, indem ich $\nu_0 = \frac{1}{2}$ lasse, aber μ_0 das eine Mal kleiner, das andere Mal grösser als $\frac{1}{2}$ nehme:

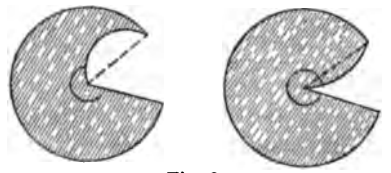


Fig. 6.

Bei dieser Aenderung behalten die beiden kurzen Seiten augenscheinlich ihre Eigenschaft, sich nicht zu überschlagen. Ob es die dritte Seite (die lange Seite, wie wir sagen wollen) thut oder nicht, constatiren wir am leichtesten, indem wir ein Hülfsdreieck mit zwei rechten Winkeln construiren, welches mit dem gegebenen Dreiecke die Ecken und die lange Seite gemein hat; ich habe die kurzen Seiten dieses Hülfsdreiecks, soweit sie nicht mit Seiten der ursprünglichen Dreiecke zusammenfallen, in der Figur punktirt. Der Winkel, welcher in diesem Hülfsdreiecke der langen Seite gegenüberliegt, ist augenscheinlich

$$(\lambda_0 - \mu_0 - \nu_0 + 1)\pi.$$

Daher ist die Anzahl der vollen Ueberschlagungen, welche unsere lange Seite im Sinne von (14) *darbietet:*

(15) $$E\left(\frac{\lambda_0 - \mu_0 - \nu_0 + 1}{2}\right).$$

Nichts ist jetzt leichter, als vom reducirten Dreiecke der zweiten Art zum allgemeinen überzugehen. Die Formeln (13) belehren uns,

dass wir dies erreichen, indem wir die Zahlen m, n von Null beginnend unabhängig von einander beliebig oft um eine Einheit wachsen lassen und dadurch das eine Mal die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, das andere Mal $\lambda\pi$ und $\nu\pi$ immer wieder um π vermehren. Aber die Dreiecksseiten, welche die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, resp. $\lambda\pi$, $\nu\pi$ verbinden, überschlagen sich nicht, wie wir wissen. Daher handelt es sich hier geometrisch um wiederholte Anwendung ganz derselben Operation, die wir soeben bei den Dreiecken erster Art schilderten, und die in der Anhängung einer Kugelcalotte an eine sich nicht überschlagende Dreiecksseite bestand. Die einzelne kurze Seite unseres reducirten Dreiecks wird dabei bald in ihr Complement verwandelt, bald kommt sie wieder in ihrer ursprünglichen Form zum Vorschein, wie wir hier kaum erneut zu schildern haben. — Damit aber haben wir in der That eine ganz klare Vorstellung von dem Zustandekommen eines allgemeinen Kreisbogendreiecks der zweiten Art gewonnen. Man beachte noch, dass vermöge (13):

$$\lambda - \mu - \nu = \lambda_0 - \mu_0 - \nu_0.$$

Indem wir auf (15) zurückgreifen, haben wir offenbar:

Auch bei einem Dreiecke zweiter Art überschlagen sich diejenigen Seiten nicht, welche den beiden kleineren Winkeln gegenüberliegen. Die dritte Seite aber bietet ev. eine grössere Zahl von Selbstüberschlagungen dar; diese Zahl ist durch

$$E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right) \tag{16}$$

gegeben.

§ 8.

Das allgemeine geometrische Resultat. Die Charakteristik X der hypergeometrischen Differentialgleichung für das Intervall $\overline{01}$.

Ehe ich jetzt zur anfänglichen analytischen Fragestellung des § 4 zurückkehre, fasse ich vorab die inzwischen gewonnenen geometrischen Resultate in einen allgemeinen Satz zusammen. Wir erreichen dies, indem wir die Bedeutung des E noch dahin modificiren, dass es die grösste ganze, *positive* Zahl sein soll, welche von dem dem E beigesetzten Argumente überschritten wird, — so dass also E allemal Null ist, wenn das Argument negativ oder $\leqq 1$ ist. Wir können dann nämlich jede Grössenordnung der Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, wie auch die Unterscheidung der Dreiecke erster und zweiter Art aufgeben und so sagen:

In einem Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ über-

schlägt sich die dem beliebigen Winkel $\lambda\pi$ gegenüberliegende Seite so oft, als das Symbol

$$E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right) \tag{17}$$

angiebt.

In der That: dieses E ist bei Dreiecken erster Art immer Null, bei Dreiecken zweiter Art aber nur dann eventuel von Null verschieden, wenn λ gerade den grössten der 3 Winkel bezeichnet: in diesem Falle aber stimmt (17) mit (16).

Und nun gehen wir zur hypergeometrischen Differentialgleichung zurück. Wir wollen uns da gleich auf das Intervall $\overline{01}$ der X-Axe beschränken, das uns von Anfang an besonders interessirte. Offenbar haben wir mit Rücksicht auf die Formeln (4):

Die charakteristische Zahl X, *welche dem Intervalle* $\overline{01}$ *hinsichtlich der hypergeometrischen Differentialgleichung zukommt, ist durch folgende Formel gegeben:*

$$X = E\left(\frac{|l-m|-|1-n|-|n-l-m|+1}{2}\right). \tag{18}$$

Wir wollen diese Formel noch etwas specificiren. Erstlich wollen wir annehmen, dass $l \geqq m$ sei, worin keine Particularisation liegt; wir können dann statt $|l-m|$ einfach $(l-m)$ schreiben. Uebrigens aber unterscheiden wir, ob $(1-n)$ und $(n-l-m) \leqq 0$ oder $\geqq 0$ sind (das Nullsein wird, weil es keinen Unterschied macht, jeder der beiden Möglichkeiten zugerechnet). Wir erhalten so folgende Tabelle:

(19)

	$n-l-m \leqq 0$	$n-l-m \geqq 0$
$1-n \leqq 0$	$X = E(1-m)$	$X = E(l-n+1)$
$1-n \geqq 0$	$X = E(n-m)$	$X = E(l)$

§ 9.

Von den Nullstellen der hypergeometrischen Reihe F im Intervalle $\overline{01}$.

Die Formeln (18) und (19) bezeichnen das eigentliche in dieser Arbeit abzuleitende Resultat. Inzwischen wollen wir dasselbe jetzt noch so umsetzen, dass jene elementare Frage erledigt wird, welche in der Einleitung bezeichnet wurde: *Wie oft verschwindet die hypergeometrische Reihe*

$$F(l, m, n, x)$$

im Intervall von $x = 0$ *bis* $x = 1$?

Wir müssen hier einige Vorbemerkungen machen.

Erstlich bemerken wir, dass, wegen des Bildungsgesetzes der Reihe F, das sogenannte dritte Element n niemals Null oder eine negative ganze Zahl sein kann: es würden sonst alle Glieder der Reihe von einer bestimmten Gränze ab unendlich gross sein. Daher ist die im Folgenden verschiedentlich auftretende Constante $\Gamma(n)$ nothwendig eine endliche Grösse.

Zweitens erinnern wir daran, dass die Reihe F für $x = 1$ nur unter der Voraussetzung $(n - l - m) > 0$ convergirt. Es kann uns das aber nicht hindern, auch im Falle $(n - l - m) \leqq 0$ von dem Werthe zu sprechen, den die *Function* F von x, wenn man von $x = 0$ kommend auf $x = 1$ zuschreitet, bei $x = 1$ annimmt. Dieser Werth ist dann freilich immer unendlich; aber es wird unterschieden werden können, ob er positiv oder negativ unendlich ist. —

Wir handeln ferner von den verschiedenen Lösungen, welche unsere Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes $x = 0$ besitzt:

Ist n keine ganze Zahl, so existirt daselbst neben F eine zweite Particularlösung G, die wir in die Form setzen können

$$G = x^{1-n} \cdot \mathfrak{P}(x), \tag{20}$$

unter $\mathfrak{P}(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe verstanden, in welcher das constante Glied (das Glied nullter Dimension) von Null verschieden ist. Dieses G wird also für $x = 0$ unendlich, sobald $1 - n < 0$, dagegen Null, sobald $1 - n > 0$. — Ist aber n ganzzahlig (was nach der gerade gemachten Bemerkung $n > 0$, also $1 - n \leqq 0$ bedingt), so tritt neben F eine Particularlösung G, deren analytischer Ausdruck einen Logarithmus enthält, und die daher für $x = 0$ jedenfalls unendlich wird. — Hiermit halten wir zusammen, dass F selbst für $x = 0$ gleich 1 ist. So folgt:

Ist $(1 - n) \leqq 0$, *so wird bei* $x = 0$ $\frac{G}{F}$ *unendlich, ist* $(1-n) > 0$, *so* $\frac{F}{G}$.

Wir erinnern uns jetzt der Formeln (18), (19) für X und der Bedeutung, welche wir der Zahl X in § 1 und § 2 ertheilten. So haben wir offenbar den Satz:

Für $(1 - n) \leqq 0$ *verschwindet* F, *für* $(1 - n) > 0$ *verschwindet* G *im Inneren des Intervalls* $\overline{01}$ *genau* X*-mal.*

Hiermit ist die Frage nach der Zahl der Nullstellen von F nur erst im Falle $(1 - n) \leqq 0$ entschieden, im anderen Falle können wir nach § 1 vorab nur erst sagen:

Ist $(1 - n) > 0$, *so ist die Anzahl der Nullstellen von* F *im Intervalle* $\overline{01}$ *entweder* X *oder* X + 1.

Zwischen den beiden hier vorliegenden Möglichkeiten unterscheide ich nun durch eine Hülfsbetrachtung, indem ich nämlich das Verhalten der Lösung F unserer Differentialgleichung und einer anderen linear unabhängigen Lösung, die wieder G heissen soll, bei $x = 1$ in Betracht ziehe.

In dieser Hinsicht können wir nach § 1, 2 jedenfalls sagen:

Satz 1: *Wird* $\frac{G}{F}$ *bei* $x = 1$ *unendlich, so hat* F *im Intervalle* $\overline{01}$ *genau* X *Nullstellen.*

Die Bedeutung der Charakteristik X eines Intervalls bleibt nämlich dieselbe, mögen wir das Intervall mit seinem einen oder seinem anderen Endpunkte beginnen. — Uebrigens kann $\frac{G}{F} = \infty$ bei $x = 1$ entweder so eintreten, dass G endlich bleibt, während F verschwindet, oder auch so, dass G unendlich wird, während F endlich bleibt. —

Liegt nun aber der hiermit besprochene Fall nicht vor, so suche ich das *Vorzeichen* zu bestimmen, welches die durch F gegebene Function bei $x = 1$ besitzt (sofern wir uns dem Werthe $x = 1$ von $x = 0$ kommend nähern). Indem F für $x = 0$ gleich 1, d. h. positiv ist, werden wir offenbar haben:

Satz 2: *Je nachdem* F *bei* $x = 1$ *positiv oder negativ ist, werden wir im Intervalle* $\overline{01}$ *eine gerade oder eine ungerade Zahl von Nullstellen des* F *haben;*

und dies ist dann der Satz, durch den wir gegebenenfalls zwischen den beiden Zahlen X und X + 1 entscheiden können. —

Es gilt jetzt, den so gefundenen allgemeinen Ansatz in's Einzelne durchzuführen. Ich unterscheide dabei, ob $(n-l-m) > 0$, < 0, $= 0$.

a) *Erste Annahme:* $(n - l - m) > 0$, $(1 - n) > 0$.

Für $(n - l - m) > 0$ convergirt F bei $x = 1$ bekanntlich zu dem Werthe:

$$\frac{\Gamma(n) \cdot \Gamma(n - l - m)}{\Gamma(n - l) \cdot \Gamma(n - m)}, \tag{21}$$

der jedenfalls endlich ist (vergl. die oben über $\Gamma(n)$ voraufgeschickte Bemerkung) und verschwindet, wenn $(n - l)$ oder $(n - m)$ Null oder eine negative ganze Zahl ist. Im letzteren Falle findet Satz 1 Anwendung und wir sagen also:

Ist $(1 - n)$ *und* $(n - l - m) > 0$ *und* $(n - l)$ *oder* $(n - m)$ *Null oder eine negative ganze Zahl, so hat* F *im Intervalle* $\overline{01}$ X *Nullstellen.*

Anderenfalls untersuchen wir das Vorzeichen von (21). Da $(n - l - m) > 0$, so ist $\Gamma(n - l - m)$ positiv, und das Vozeichen von (21) stimmt mit demjenigen des Productes $\Gamma(n) \cdot \Gamma(n - l) \cdot \Gamma(n - m)$ überein. Wir sagen also nach Satz 2:

Ist $(1-n)$ *und* $(n-l-m)>0$, *aber weder* $(n-l)$ *noch* $(n-m)$ *Null oder eine negative ganze Zahl, so wird von den beiden Zahlen* X *und* X + 1 *die gerade oder die ungerade richtig sein, jenachdem das Product* $\Gamma(n)\,.\,\Gamma(n-l)\,.\,\Gamma(n-m)$ *positiv oder negativ ausfällt.*

b) *Zweite Annahme:* $(n-l-m)<0$, $(1-n)>0$.

Ist $(n-l-m)$ nicht ganzzahlig, so haben wir in der Umgebung des Punktes $x=1$ eine Lösung G unserer Differentialgleichung, für welche die Darstellung besteht

$$(1-x)^{n-l-m}\,.\,\mathfrak{P}(1-x);$$

ist aber $(n-l-m)$ ganzzahlig, so giebt es Lösungen G, in deren analytische Darstellung der Logarithmus von $(1-x)$ eingeht. Daher existirt also, wenn wir jetzt die Annahme $(n-l-m)<0$ machen, auf alle Fälle eine Lösung G, welche bei $x=1$ unendlich wird. Wir werden hiernach die Voraussetzung des Satzes 1 haben, sobald im vorliegenden Falle F für X = 1 endlich bleibt. Dies tritt nun (man denke an das Bildungsgesetz der aufeinander folgenden Glieder der Reihe F) jedenfalls dann ein, wenn l oder m Null oder eine negative ganze Zahl ist. Daher haben wir vorab:

Ist $(1-n)>0$ *und* $(n-l-m)<0$ *und* l *oder* m *Null oder eine negative ganze Zahl, so hat* F *im Intervalle* $\overline{01}$ X *Nullstellen.*

Anderenfalls lassen wir (um Satz 2 anwenden zu können) eine Transformation unserer hypergeometrischen Reihe eintreten. Wir haben:

$$F(l, m, n, x) = (1-x)^{n-l-m}\,.\,F(n-l,\ n-m,\ n,\ x). \tag{23}$$

Hier wird der erste der beiden rechts stehenden Factoren, indem wir von $x=0$ auf $x=1$ zuschreiten, positiv unendlich, und kann also bei der Beurtheilung des uns interessirenden Vorzeichens bei Seite gelassen werden. Der andere Factor aber (die neue hypergeometrische Reihe) convergirt bei $x=1$ zu dem Werthe:

$$\frac{\Gamma(n)\,.\,\Gamma(l+m-n)}{\Gamma(l)\,.\,\Gamma(m)}, \tag{24}$$

den wir nun gerade so discutiren, wie vorhin den Werth (21). Wir erkennen zunächst, dass (24) jedenfalls endlich ist und nur in denjenigen beiden Fällen verschwindet, die wir schon vorweg genommen haben (dass nämlich l oder m Null oder eine negative ganze Zahl ist). In allen anderen Fällen stimmt das Vorzeichen von (24) mit dem des Productes $\Gamma(l)\,.\,\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)$ überein. Wir folgern also:

Ist $(1-n)>0$ *und* $(n-l-m)<0$ *und weder* l *noch* m *Null oder eine negative ganze Zahl, so gilt von den beiden Zahlen* X *und* X + 1 *die gerade oder die ungerade, jenachdem das Product* $\Gamma(l)\,.\,\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)$ *positiv oder negativ ist.*

Zwis
ich nun
der Lö
unabh
trach

$(1-n) = 0$, $(1-n) > 0$.

wir hier als **Gränzfall** zwischen den An-
lassen. In der That werden die beiden
Sätze mit den unter b) gegebenen identisch,
$n - l - m = 0$ nehmen und also $n - l = m$,
ihnen $n - l - m = 0$ setzen. Ich unterlasse es, noch länger hierbei zu ver-
weilen.

Hiermit ist die Zahl der Nullstellen von F im Intervalle $\overline{01}$ in jedem Falle sicher gestellt*).

Natürlich würden wir auch für $(1-n) \leqq 0$ (wo sich oben die Zahl der Nullstellen ohne Weiteres gleich X fand) das Verhalten von F bei $x = 1$ in Betracht ziehen können. Wenn dabei im Resultat schliesslich alle Fallunterscheidungen wegfallen, so liegt dies daran, dass für $(1-n) \leqq 0$ $\Gamma(n)$ ein festes Vorzeichen hat, was für $(1-n) > 0$ selbstverständlich nicht der Fall ist.

Göttingen, den 5. September 1890.

---

*) Ich habe die sämmtlichen im Texte entwickelten Sätze während des verflossenen Juli in meiner Vorlesung über Differentialgleichungen vorgetragen, auch der Göttinger Societät der Wissenschaften am 1. August darüber Mittheilung gemacht (vergl. Göttinger Nachrichten). [Vergl. ferner einen Vortrag vor der mathematischen Section der Bremer Naturforscherversammlung, vom 16. September 1890].

Zur Theorie der bestimmten Integrale und der unendlichen Reihen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

§ 1.

Es sei $f(x)$ eine Function der reellen Variablen x, welche an der Stelle $x = 0$ in der Weise unendlich wird, dass sie *monoton* bleibt und dem absoluten Werthe nach über alle Grenzen wächst, wenn x von einem bestimmten positiven Werthe a ab der Null zustrebt. Alsdann soll es sich hier darum handeln, gewisse für die Existenz des Integrales $\int_0^a f(x)\,dx$ als *nothwendig* erkannte Bedingungen einer näheren Kritik zu unterziehen.

Ueber diesen Punkt findet sich in Riemann's bekannter und speciell für die neuere Theorie des bestimmten Integrals als grundlegend zu betrachtenden Abhandlung *„Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine Fourier'sche Reihe"* folgendes*):

> „Es lässt sich leicht zeigen, dass $xf(x)$ bei abnehmendem x von einer endlichen Grösse a an nicht fortwährend grösser als eine endliche Grösse c bleiben könne (sc. falls $\int_0^a f(x)\,dx$ convergiren soll), ... *Es muss also* $xf(x)$, *wenn diese Function in der Nähe von* $x = 0$ *nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, nothwendig mit* x *unendlich klein werden*, damit $f(x)$ einer Integration fähig sein könne. ... Ebenso findet man, dass im Falle der Convergenz des Integrals *die Functionen*

*) Ges. Werke, p. 229.

$$f(x) \cdot x \lg \frac{1}{x},$$

$$f(x) \cdot x \lg \frac{1}{x} \lg \lg \frac{1}{x},$$

. . . . . .

$$f(x) \cdot x \lg \frac{1}{x} \lg \lg \frac{1}{x} \cdots \lg^{(n)} \frac{1}{x}$$

nicht bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze an fortwährend grösser als eine endliche Grösse bleiben können, *und also, wenn sie nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, mit x unendlich klein werden müssen. . . .*"

Hiernach sagt also Riemann nur soviel, dass die Beziehungen:

(I) $$\lim_{x=0} x \cdot f(x) = 0,$$

(II) $$\lim_{x=0} x \cdot \lg_1 \frac{1}{x} \cdots \lg_n \frac{1}{x} \cdot f(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

nothwendige Bedingungen für die Convergenz des Integrals $\int_0^a f(x)\,dx$ darstellen, jedesmal wenn $x \cdot f(x)$ bezw. $x \cdot \lg^1 \frac{1}{x} \cdots \lg_n \cdot f(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 0$ *monoton* verläuft.

Etwas allgemeiner kann man offenbar aus der Prämisse, dass $x \cdot f(x)$, $x \cdot \lg_1 \frac{1}{x} \cdots \lg_n \frac{1}{x} \cdot f(x)$ im Falle der Convergenz von $\int_0^a f(x)\,dx$ für $a \geqq x \geqq 0$ nicht beständig über einer endlichen Grenze bleiben können, folgendes schliessen:

Es müssen die Ausdrücke:

(I) $$\lim x \cdot f(x),$$

(II) $$\lim x \cdot \lg_1 \frac{1}{x} \cdots \lg_n \frac{1}{x} \cdot f(x)$$

jedenfalls *verschwinden*, sofern die fraglichen Grenzwerthe überhaupt *existiren**); und sie müssen, falls jene Grenzwerthe *nicht existiren*, d. h. *unbestimmt* sind, die *Null zur unteren Unbestimmtheitsgrenze* haben.

Man pflegt nun, wie ich gefunden habe, die oben von Riemann gemachte bezw. die in der zuletzt angegebenen Formulirung enthaltene Einschränkung vielfach zu übersehen und demgemäss die Bedingungen:

---

*) Dabei können $x \cdot f(x)$, $x \lg_1 \frac{1}{x} \cdots \lg_n \frac{1}{x} \cdot f(x)$ immerhin noch unendlich viele Maxima und Minima — freilich mit schliesslich unendlich klein werdender Amplitude — besitzen.

(I) $$\lim x \cdot f(x) = 0,$$

(II) $$\lim x \cdot \lg_1 \frac{1}{x} \cdot \cdots \lg_n \frac{1}{x} \cdot f(x) = 0$$

als *nothwendig* für die Convergenz des betreffenden Integrals anzusehen, sofern *nur* $f(x)$ *selbst* bei der Annäherung an die Stelle $x = 0$ *monoton* in's Unendliche wächst.

Dass diese Schlussfolgerung *lediglich* auf Grund der üblichen d. h. der oben angeführten Riemann'schen Deduction unzulässig ist, liegt auf der Hand. Es erschien mir nun aber wünschenswerth, über deren objective Richtigkeit volle Klarheit zu gewinnen, und hierbei ergab sich mir das, wie ich glaube, nicht uninteressante Resultat, dass die oben mit (I) und (II) bezeichneten Bedingungen sich *keineswegs gleichartig* verhalten, indem die Bedingung (I) sich thatsächlich auch *ohne die obige Einschränkung* als *nothwendig* erweist, die Bedingungen (II) hingegen *nicht*. Es besteht nämlich der folgende Satz:

Wird $f(x)$ *für* $x = 0$ *ohne Maxima und Minima unendlich, so ist für die Convergenz von* $\int_0^a f(x)\,dx$ *unter allen Umständen nothwendig, dass:*

$$\lim x \cdot f(x) = 0.$$

Dagegen giebt es keine mit verschwindendem x *noch so langsam in's Unendliche wachsende Function* $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ *von der Beschaffenheit, dass auch:*

$$\lim x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = 0$$

werden müsste. Vielmehr lassen sich zu jeder solchen Function $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ *Functionen* $f(x)$ *angeben, für welche das betreffende Integral convergirt, während die obere Unbestimmtheitsgrenze des obigen Ausdruckes einen beliebig (d. h. auch unendlich) grossen Werth besitzt.*

Dieser Satz soll in den folgenden beiden Paragraphen bewiesen werden.

§ 2.

Die Richtigkeit der auf $\lim x \cdot f(x)$ bezüglichen Behauptung erkennt man leicht auf folgende Weise.

Für die Convergenz von $\int_0^a f(x)\,dx$ ist *nothwendig und hinreichend*, dass zu beliebig klein vorgeschriebenem positiven δ eine positive Grösse ε' sich so bestimmen lässt, dass:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx\right| < \delta \qquad \text{für jedes } \varepsilon \leqq \varepsilon'.$$

Da $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ *monoton* sein soll, so kann man ε' von vornherein so wählen, dass $f(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \varepsilon'$ beständig gleiches Vorzeichen besitzt, und somit statt der obigen Ungleichung auch die folgende setzen:

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} |f(x)|\,dx < \delta \qquad \text{für jedes } \varepsilon \leqq \varepsilon'.$$

Alsdann muss aber auch

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon'} |f(x)|\,dx < \delta$$

werden, und so ergiebt sich durch Subtraction dieser beiden Ungleichungen als eine jedenfalls *nothwendige* Convergenzbedingung:

$$\delta > \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} |f(x)|\,dx > \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot |f(\varepsilon)|$$

oder:

$$\varepsilon \cdot |f(\varepsilon)| < 2\delta \qquad \text{für jedes } \varepsilon \leqq \varepsilon'.$$

Mithin hat man in der That, da δ von vornherein beliebig klein gewählt werden kann, stets:

$$\lim_{x=0} x \cdot f(x) = 0.$$

Hiernach darf man also bei monoton unendlich werdendem $f(x)$ auch dann *ohne weiteres* auf die *Divergenz* von $\int_0^a f(x)\,dx$ schliessen, wenn $\lim_{x=0} x \cdot f(x)$ *unbestimmt* mit der unteren Grenze *Null* wird. (Ein Beispiel hierzu s. § 4).

§ 3.

Um den zweiten Theil des oben ausgesprochenen Satzes zu beweisen, sei $\psi(y)$ eine *positive*, mit y *monoton* zunehmende und für unendlich wachsende y *beliebig langsam* — jedenfalls aber *langsamer als y selbst* — in's Unendliche wachsende Function.

Alsdann gehört zu

$$\psi(y) = z \prec y$$

eine *inverse* Function

$$y = J(z) \succ z$$

welche offenbar mit x gleichfalls *monoton* wächst, jedoch schliesslich *stärker* als x unendlich wird.

Dabei ist also:

$$J\big(\psi(y)\big) = \psi\big(J(y)\big) = y. \tag{1}$$

Nun werde gesetzt:

$$f(x) = \frac{J\left(\left[\sqrt[\sigma]{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}\right]^{\sigma}\right)}{\left[\sqrt[\sigma]{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}\right]^{\varrho}} \tag{2}$$

wo:

$$\sigma \geqq \varrho > 1,$$

und das Symbol $[y]$, wie üblich, die grösste in y enthaltene ganze Zahl bedeutet, so lässt sich zeigen:

1) $f(x)$ wächst bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ *monoton* in's Unendliche;

2) $\lim x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$ ist *nicht* schlechthin *Null*, sondern nimmt für $\sigma > \varrho$ unter anderen Werthen auch unendlich grosse, für $\sigma = \varrho$ als obere Grenze den Werth 1 an;

3) das Integral $\int_0^a f(x)\,dx$ ist nichtsdestoweniger *convergent*.

Ich betrachte $f(x)$ zunächst in einem Intervalle von der Form:

$$J(n^{\sigma})^{-1} \geqq x > J(\overline{n+1}^{\sigma})^{-1} \tag{3}$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Man hat alsdann:

$$J(n^{\sigma}) \leqq \frac{1}{x} < J(\overline{n+1}^{\sigma})$$

also mit Benutzung von Gl. (1):

$$n^{\sigma} \leqq \psi\left(\frac{1}{x}\right) < (n+1)^{\sigma} \tag{4}$$

und daher:

$$\left[\sqrt[\sigma]{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}\right] = n. \tag{5}$$

Es besitzt somit in dem ganzen Intervalle (3) den constanten Werth:

$$f(x) = \frac{J(n^{\sigma})}{n^{\varrho}}. \tag{6}$$

Wird jetzt $x = J(\overline{n+1}^{\sigma})^{-1}$, so springt offenbar $f(x)$ auf $\frac{J(\overline{n+1}^{\sigma})}{(n+1)^{\varrho}}$ über, welcher Werth dann wiederum bis unmittelbar vor $x = J(\overline{n+2}^{\sigma})^{-1}$ beibehalten wird, u. s. f. Da hierbei der Zähler von $f(x)$, nämlich $J(n^{\sigma})$, für hinlänglich grosse n *beliebig viel schneller* wächst, als n^{σ}, also um so mehr auch *schneller* als der Nenner n^{ϱ}, so folgt, dass $f(x)$

bei Annäherung an die Stelle $x = 0$ in der That *monoton* zunehmend in's Unendliche wächst.

Ferner hat man, wenn speciell gesetzt wird:

$$x = J(n^\sigma)^{-1} \tag{7}$$

mit Berücksichtigung der Beziehungen (4) und (6):

$$x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) = J(n^\sigma)^{-1} \cdot n^\sigma \cdot \frac{J(n^\sigma)}{n^\varrho} = n^{\sigma-\varrho} \tag{8}$$

sodass für solche Werthe von x sich ergiebt:

$$\lim x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) \begin{cases} = \infty & \text{falls } \sigma > \varrho, \\ = 1 & \text{„ } \sigma = \varrho. \end{cases} \tag{9}$$

Uebrigens gilt Gl. (9), wie leicht zu sehen, nicht nur gerade für *diese einzelnen Stellen* x, sondern für *alle* x *eines gewissen* von je einer solchen Stelle *nach links* (d. h. in der Richtung nach $x = 0$ zu) sich erstreckenden *Intervalles*, nämlich für:

$$x = \left(J(n^\sigma) + h_n\right)^{-1} \tag{7a}$$

wo $h_n \geqq 0$ den Bedingungen zu genügen hat:

$$h_n \begin{cases} < J\left(\overline{n+1}^\sigma\right) - J(n^\sigma), \\ < J\left(n^\sigma\right). \end{cases} \tag{7b}$$

Vermöge der *ersten* dieser Bedingungen fällt dann x noch in das Intervall von $J(n^\sigma)^{-1}$ bis $J\left(\overline{n+1}^\sigma\right)^{-1}$ *exclusive*, sodass $f(x)$ wiederum durch Gl. (6) bestimmt wird, während zugleich nach (4):

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = (n+\vartheta)^\sigma$$

gesetzt werden kann, wo ϑ einen positiven ächten Bruch bedeutet. Darnach wird zunächst:

$$x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) = \frac{J(n^\sigma)}{J(n^\sigma) + h_n} \cdot \frac{(n+\vartheta)^\sigma}{n^\varrho} \tag{8a}$$

und somit in Folge der *zweiten* Bedingung (7b), gerade wie oben Gl. (9):

$$\lim x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) \begin{cases} = \infty & \text{für } \sigma > \varrho, \\ = 1 & \text{„ } \sigma = \varrho. \end{cases} \tag{9a}$$

(Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass für gewisse Werthe von x — nämlich solche, die unmittelbar *rechts* von den Sprungstellen $x = J(n^\sigma)^{-1}$ liegen — $\lim x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$ *verschwindet*, wenn $\psi(y)$ nicht nur schwächer als y, sondern höchstens so stark wie $\lg y$ unendlich wird: in der That könnte ja andernfalls das betreffende Integral überhaupt nicht convergiren). —

Betrachtet man jetzt

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx \quad (\text{wo } \varepsilon < \varepsilon'),$$

so möge gesetzt werden:

$$\varepsilon' \leqq J(m^\sigma)^{-1} \quad (\text{wo } m, n \text{ ganze positive Zahlen bedeuten,}$$
$$\varepsilon \geqq J(n^\sigma)^{-1} \quad \text{und } m < n),$$

also:

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx \leqq \int_{J(n^\sigma)^{-1}}^{J(m^\sigma)^{-1}} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Nun hat man:

$$\int_{J(n^\sigma)^{-1}}^{J(m^\sigma)^{-1}} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{m} \int_{J(\overline{\nu+1}^\sigma)^{-1}}^{J(\nu^\sigma)^{-1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{m}^{n-1} \frac{J(\nu^\sigma)}{\nu^\varrho} \int_{J(\overline{\nu+1}^\sigma)^{-1}}^{J(\nu^\sigma)^{-1}} dx$$

$$= \sum_{m}^{n-1} \frac{1}{\nu^\varrho} \left\{ 1 - \frac{J(\nu^\sigma)}{J(\overline{\nu+1}^\sigma)} \right\}$$

$$< \sum_{m}^{n-1} \frac{1}{\nu^\varrho}$$

eine Grösse, welche wegen $\varrho > 1$ lediglich durch Wahl von m, unabhängig von $n > m$ beliebig klein gemacht werden kann. Mithin wird das Integral (10) lediglich durch Wahl von $\varepsilon' \leqq J(m^\sigma)^{-1}$, unabhängig von $\varepsilon < \varepsilon'$ beliebig klein, also $\int_0^a f(x)\,dx$ *convergent.*

Die Function $f(x)$ besitzt somit die oben sub. 1)—3) angegebenen Eigenschaften.

§ 4.

Beispiele. Es werde gesetzt

$$\psi(y) = \lg y, \quad \text{also} \quad J(s) = e^s,$$
$$\sigma = 2, \quad \text{also} \quad 1 < \varrho \leqq 2,$$

so wird:

$$(11) \qquad f(x) = \frac{e^{\left[\sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]^2}}{\left[\sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]^{\varrho}}$$

und diese Function ist an der Stelle $x = 0$ integrabel, obschon

$$\lim x \cdot \lg \frac{1}{x} \cdot f(x)$$

nicht schlechthin verschwindet. Vielmehr hat man:

$$\lim_{x=0} x \cdot \lg \frac{1}{x} \cdot f(x) \begin{cases} = \infty & \text{falls: } \varrho < 2, \\ = 1 & \text{„ } \varrho = 2, \end{cases}$$

sobald

$$\frac{1}{x} = e^{n^2} + h_n, \quad \text{wo} \quad h_n < e^{n^2}$$

(die *zweite* nach (7 b) für h_n geltende Bedingung, nämlich $h_n < e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$ ist dann schon von selbst erfüllt).

Die Function $f(x)$ ist auch insofern merkwürdig, als sie — obschon *monoton* in's Unendliche wachsend — auf keins der bekannten *Convergens*kriterien reagirt. Denn es nimmt natürlich

$$\lim_{x=0} x \cdot \lg_1 \frac{1}{x} \cdots \lg_{x-1} \frac{1}{x} \left(\lg_x \frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon} \cdot f(x)$$

u. a. stets auch den Werth ∞ an (selbst noch im Falle $\varrho = 2$).

Um sich ein Bild von dem Verlaufe der Function $f(x)$, etwa für $\varrho = 2$, zu machen, bemerke man, dass für $\frac{1}{x} = e^{n^2}$ sich ergiebt:

$$\left[\sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]^2 = n^2 \quad \text{d. h.} \quad = \lg \frac{1}{x},$$

also:

$$f(x) = \frac{1}{x \lg \frac{1}{x}};$$

dagegen für $\frac{1}{x} = \lim_{h=0} (e^{n^2} - h)$:

$$\left[\sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]^2 = (n-1)^2 \quad \text{d. h.} \quad = \left(\sqrt{\lg \frac{1}{x}} - 1\right)^2,$$

also:

$$f(x) = \frac{e}{x \cdot e^{2\sqrt{\lg \frac{1}{x}}} \left(\lg \frac{1}{x} - 2\sqrt{\lg \frac{1}{x}} + 1\right)}.$$

Setzt man jetzt:

$$f_1(x) = \frac{e}{x \cdot e^{2\sqrt{\lg \frac{1}{x}}} \left(\lg \frac{1}{x} - 2\sqrt{\lg \frac{1}{x}} + 1\right)} < \frac{1}{x \left(\lg \frac{1}{x}\right)^p}, \quad (p \text{ beliebig gross}),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x \lg \frac{1}{x}}$$

und denkt sich $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ graphisch dargestellt, so erscheint $f(x)$ als eine Treppe, deren Stufen (bei Annäherung an die Nullstelle immer kürzer und höher werdend) an allen Stellen $x = e^{-n^2}$ sich auf die Curve $f_1(x)$ stützen und bis zur Curve $f_2(x)$ hinaufreichen. Dabei besitzt nur $f_1(x)$ ein convergentes, dagegen $f_2(x)$ ein divergentes Integral. —

Aendert man die soeben betrachtete Function $f(x)$ in der Weise ab, dass man statt $\left[\sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]$ schreibt: $\left[1 + \sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]$, und bezeichnet sie dann etwa mit $F(x)$, also:

$$F(x) = \frac{e^{\left[1+\sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]^2}}{\left[1+\sqrt{\lg \frac{1}{x}}\right]^2}, \tag{12}$$

so wird hier für $\frac{1}{x} = e^{n^2}$:

$$F(x) = \frac{e^{(n+1)^2}}{(n+1)^2}$$

und daher für solche Werthe von x (bezw. etwas allgemeiner für $\frac{1}{x} = e^{n^2} + h_n$, wo $h_n < e^{n^2}$):

$$\lim_{x=0} x \cdot F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{e^{2n+1}}{(n+1)^2} = \infty.$$

Man darf daher nach § 2 *ohne Weiteres* schliessen, dass $\int_0^a F(x)\,dx$ hier *divergirt*, obschon für $\frac{1}{x} = e^{n^2} - h_n$:

$$\lim x \cdot F(x) = \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

wird.

Dabei unterscheidet sich offenbar $F(x)$ von $f(x)$ nur dadurch, dass $F(x)$ den constanten Werth $\frac{e^{(n+1)^2}}{(n+1)^2}$ schon im Intervalle:

$$e^{-n^2} \geqq x > e^{-(n+1)^2}$$

besitzt, während $f(x)$ den nämlichen Werth erst in dem nächstfolgenden Intervalle (nach der Nullstelle zu), nämlich:

$$e^{-(n+1)^2} \geqq x > e^{-(n+2)^2}$$

annimmt.

§ 5.

In meiner Abhandlung *„Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern"* habe ich bereits nachgewiesen*), dass — entgegen der bisher vielfach verbreiteten Anschauung — die Bedingungen

$$\begin{aligned} &\lim n \cdot \lg_1 n \cdot u_n \quad = 0, \quad (n = \infty) \\ &\lim n \cdot \lg_1 n \, \lg_2 n \cdot u_n = 0, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

für die Convergenz der Reihe $\sum u_\nu$ selbst dann *keineswegs nothwendig* sind, wenn die Glieder u_ν mit wachsendem ν niemals zunehmen, also sich *monoton* verhalten; dass sich vielmehr, *wie langsam* auch $\psi(\nu)$ mit ν in's Unendliche wachsen möge, stets convergirende Reihen $\sum u_\nu$ mit niemals zunehmenden Gliedern angeben lassen, für welche

$$\lim n \cdot \psi(n) \cdot u_n$$

unter anderen Werthen auch beliebig grosse annimmt.

Dieses Resultat ist offenbar mit dem in § 3 gefundenen sehr nahe verwandt: immerhin geht es nicht an, eins aus dem anderen herzuleiten. Denn bezeichnet man etwa mit $\varphi(x)$ eine monotone Function von x, von der Beschaffenheit, dass für $x = \nu$ (d. h. gleich einer positiven ganzen Zahl) $\varphi(\nu) = u_\nu$ ist, so convergirt zwar mit der Reihe $\sum_0^\infty u_\nu$ auch das Integral $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$, auch wenn

$$\lim_{x=\infty} x \cdot \psi(x) \cdot \varphi(x)$$

nicht schlechthin verschwindet. Sodann erhält man durch Einführung von $\frac{1}{x}$, an Stelle der Integrationsvariablen x, wenn $\frac{1}{a} = a$ gesetzt wird:

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx, \qquad \text{wo: } f(x) = \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

und es folgt, dass auch dieses Integral mit der singulären Stelle $x = 0$ gleichfalls convergirt, selbst wenn:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x=0} x \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$$

*) Math. Ann. Bd. 35, p. 347 ff.

wiederum *nicht* schlechthin verschwindet. Indessen ist die so erhaltene Function $f(x) = \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ *nicht monoton*, wie man sofort übersieht, wenn man beachtet, dass u_ν mit wachsendem ν, also auch $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ mit abnehmenden x treppenförmig *ab*nimmt*), während gleichzeitig $\frac{1}{x^2}$ in einem continuirlichen Zuge (ohne beständigen Krümmungswechsel) *zu*nimmt.

Es kommt also gerade dasjenige Resultat, auf das es hier vor allem ankommt, auf diesem Wege *nicht* zum Vorschein. —

Ich möchte aber bei dieser Gelegenheit neben dem in der citirten Abhandlung construirten Reihentypus $\sum u_\nu$ hier noch einen anderen, in mancher Beziehung einfacheren angeben. Während nämlich dort nicht jedes einzelne Glied, sondern immer erst eine gewisse *Gruppe von Gliedern* durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck in ν dargestellt erscheint (sodass es also auch nicht angehen würde, die oben mit $\varphi(x)$ bezeichnete Function aus u_ν einfach durch Substitution von x an Stelle von ν herzustellen), so soll jetzt u_ν selbst als einfacher, expliciter Ausdruck in ν hingeschrieben werden.

Versteht man unter $\psi(x)$ wieder eine *monotone*, mit x *beliebig langsam* in's Unendliche wachsende Function, unter $J(x)$ die *inverse* Function, so werde gesetzt:

$$(13) \qquad u_\nu = \frac{1}{\psi(\nu)^\varrho \, J\left(\left[1+\sqrt[\varrho]{\psi(\nu)}\right]^\sigma\right)}, \qquad \text{wo } \begin{cases} 0 < \varrho \leqq 1, \\ \sigma > \frac{1}{\varrho}. \end{cases}$$

Alsdann lässt sich zeigen, dass:

1) $\sum u_\nu$ convergirt;

2) der Ausdruck $\nu \cdot \psi(\nu) \cdot u_\nu$ mit unendlich wachsendem ν *nicht* durchweg verschwindet (obschon u_ν mit wachsendem ν offenbar *monoton* abnimmt).

Man setze:

$$\sum_\nu^{\nu} u_\nu = \sum_n^{n} v_n,$$

wo v_n eine gewisse Gruppe von Gliedern u_ν bedeutet, nämlich:

$$v_n = \sum_{\left[J\left(\overline{n-1}^{\sigma}\right)\right]+1}^{\left[J\left(n^{\sigma}\right)\right]} u_\nu,$$

*) Cf. a. a. O. p. 350.

oder, falls $J(\overline{n-1}^\sigma)$, $J(n^\sigma)$ selbst ganze Zahlen sein sollten:

$$v_n = \sum_{J(\overline{n-1}^\sigma)}^{J(n^\sigma)-1} u_\nu.$$

Man hat dann in jedem Falle für je eine solche Gliedergruppe v_n:

$$J(\overline{n-1}^\sigma) \leqq \nu < J(n^\sigma)$$

und daher:

$$\overline{n-1}^\sigma \leqq \psi(\nu) < n^\sigma, \tag{14}$$

also:

$$[\sqrt[\varrho]{\psi(\nu)}] = n-1. \tag{15}$$

Mit Benützung von (14) und (15) ergiebt sich nun:

$$v_n < \frac{[J(n^\sigma)] - [J(\overline{n-1}^\sigma)]}{(n-1)^{\varrho\sigma} \cdot J(n^\sigma)} < \frac{1}{(n-1)^{\varrho\sigma}}$$

und:

$$\sum_\nu^r u_\nu = \sum_n^\infty v_n < \sum_n^\infty \frac{1}{(n-1)^{\varrho\sigma}}$$

mithin $\sum u_\nu$ *convergent*, da $\varrho\sigma > 1$.

Ferner findet man zunächst:

$$\nu \cdot \psi(\nu) \cdot u_\nu = \frac{\nu \cdot \psi(\nu)^{1-\varrho}}{J\left(\left[1+\sqrt[\varrho]{\psi(\nu)}\right]^\sigma\right)} \tag{16}$$

und somit, wenn man speciell setzt:

$$\nu = J(n^\sigma) - h_n, \tag{17}$$

wo h_n wesentlich positiv sein und den Bedingungen genügen soll:

$$h_n \begin{cases} < J(n^\sigma) - J(\overline{n-1}^\sigma), \\ < J(n^\sigma) \end{cases} \tag{18}$$

mit Berücksichtigung von (14) und (15):

$$\nu \cdot \psi(\nu) \cdot u_\nu \geqq \frac{(J(n^\sigma) - h_n)\,(n-1)^{(1-\varrho)\sigma}}{J(n^\sigma)},$$

d. h. es ergiebt sich für solche Werthe von ν:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \psi(\nu) \cdot u_\nu \begin{cases} = \infty & \text{falls: } \varrho < 1, \\ = 1 & \text{„ } \varrho = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Die Reihe $\sum u_\nu$ hat somit die oben ausgesprochenen Eigenschaften. —

Ebenso bleibt die monotone Function:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)^\varrho \cdot J\left(\left[1+\sqrt[\sigma]{\psi(x)}\right]^\sigma\right)}, \tag{20}$$

welche aus u_ν durch Substitution von x an Stelle von ν entsteht, *im Unendlichen integrabel*, obschon:

$$\lim x \cdot \psi(x) \cdot \varphi(x)$$

für $x = \infty$ nach Gl. (19) unter anderen Werthen auch den Werth ∞ bezw. 1 annimmt, *wie langsam* auch $\psi(x)$ mit x in's Unendliche wachsen möge.

(Beispiel: $\psi(x) = \lg x$, $\sigma = 2$, also $\frac{1}{2} < \varrho \leqq 1$; die monotone Function:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\lg x)^\varrho \, e^{\left[1+\sqrt{\lg x}\right]^2}}$$

bleibt dann im Unendlichen integrabel, ebenso $\sum \varphi(\nu)$ convergent, obschon:

$$\lim_{x=\infty} x \cdot \lg x \cdot \varphi(x)$$

nicht schlechthin verschwindet, vielmehr für $x = e^{n^2} - h_n$ und $\varrho < 1$ unendlich gross wird, bezw. im Grenzfalle $\varrho = 1$ den Werth 1 annimmt).

Ich ergreife diese Gelegenheit, um ein kleines Versehen zu berichtigen, welches auf S. 56 dieses Bandes in meinem Aufsatze „Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen" stehen geblieben. Es muss dort (Zeile 3 und 4) heissen:

wenn: $\lg_x M_{n+1} \underline{\simeq} \lg_x M_n$ (statt: $M_{n+1} \underline{\simeq} M_n$)
$\lg_x M_{n+1} \underline{\simeq} c \,.\, \lg_x M_n$ ($M_{n+1} \underline{\simeq} c \,.\, M_n$).

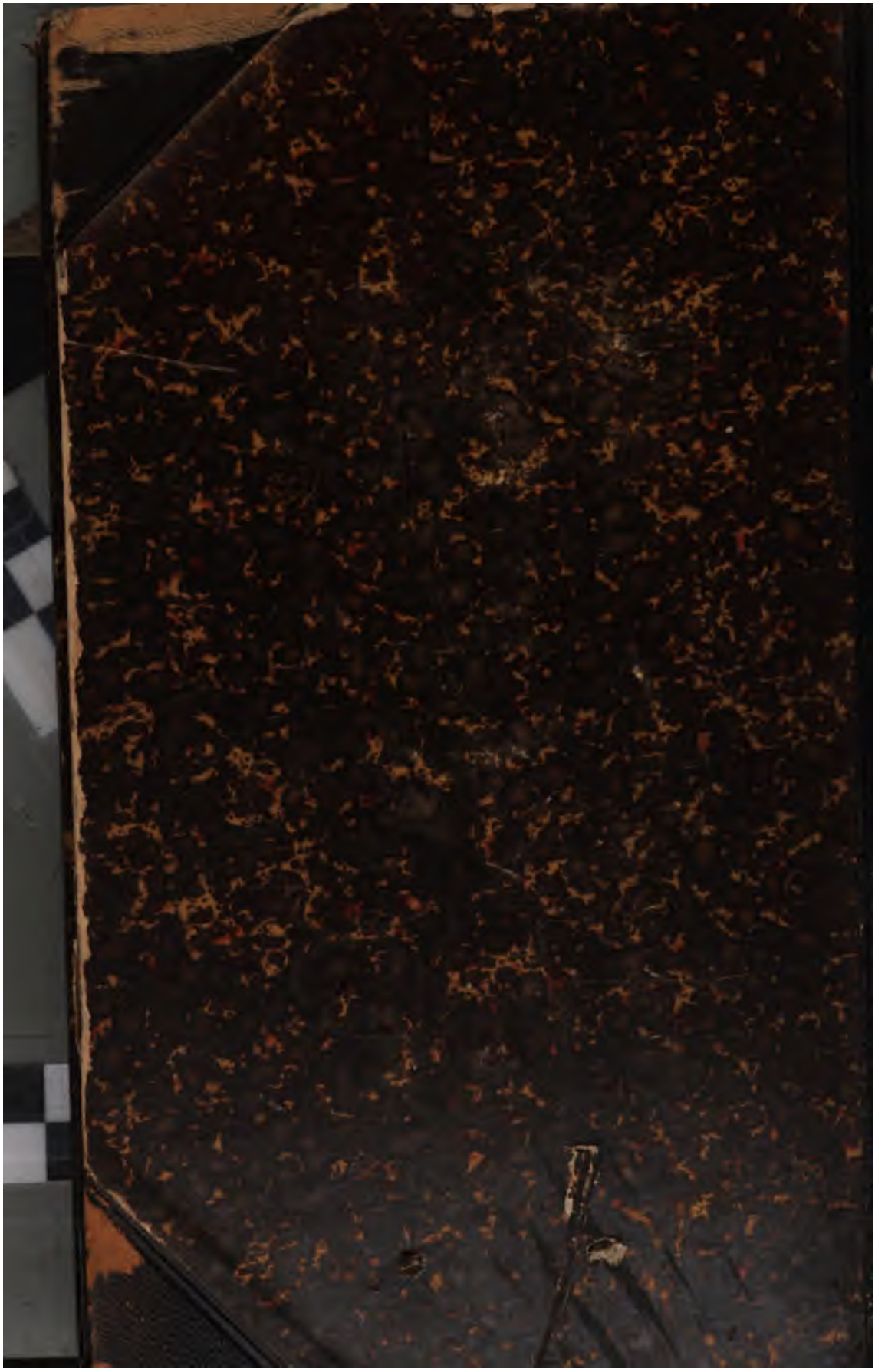
Hierdurch modificirt sich das unmittelbar folgende in der Weise, dass Gl. (22) nur für den Fall $M_{n+1} \underline{\simeq} M_n$ gilt, während im Falle $M_{n+1} \underline{\simeq} c \,.\, M_n$ (in welchem ja offenbar gleichfalls die *erste* der obigen

Bedingungen: $\lg_\varkappa M_{n+1} \geqq \lg_\varkappa M_n$ schon für $\varkappa = 1$ erfüllt ist) an ihre Stelle die folgende tritt:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \cdot \sum_m^\infty{}_\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg_1 M_\nu \cdots (\lg_\varkappa M_\nu)^{1+\varrho}} = \frac{\lg c}{c-1}. \tag{22}$$

(NB. Auf Zeile 10 steht in Folge eines Druckfehlers:

$$\varkappa \lg M_{n+1} - \varkappa \lg M_n \quad \text{statt:} \quad \lg M_{n+1} - \lg M_n.$$

Ein weiterer sinnstörender Druckfehler findet sich auf S. 54, Lehrsatz II: dort ist auf der rechten Seite der ersten Gl. (19) der Factor g weggeblieben. Ferner steht auf S. 47, Fussnote, Ungl. (2) fälschlich $\frac{x}{1-x}$ statt $\frac{x}{1+x}$.)

Tegernsee 2. September 1890.